Valeurs spéciales des fonctions L en caractéristique p

Vincent Lafforgue*

3 mai 2009

Résumé. Nous exprimons les valeurs spéciales de fonctions L en caractéristique p en termes de groupes d'extension dans la catégorie des chtoucas, en utilisant un peu de théorie de Fontaine en caractéristique p.

Le but de ce travail est d'interpréter la valeur spéciale de la fonction L associée à un chtouca sur une courbe sur $\mathbb{F}_q$, en termes de groupes d'extension dans la catégorie des chtoucas. Bien que les valeurs spéciales soient en général transcendantes sur le corps de définition du chtouca, les démonstrations sont faciles et algébriques, sans difficultés d'analyse. Nous utilisons la formule des traces d'Anderson [And00], généralisée par Böckle et Pink [BP04], qui est une variante de la formule des points fixes de Woods-Hole, et un peu de théorie de Fontaine en égales caractéristiques, dans un cadre plus général que dans [GL08]. Nous travaillons avec des chtoucas plutôt que des t-motifs d'Anderson [And86], car les chtoucas sont plus généraux et les calculs d'extensions dans la catégorie des chtoucas sont particulièrement aisés. Le lien avec [AT90], où Anderson et Thakur donnent une interprétation différente des valeurs spéciales de la fonction zeta de Carlitz, est discuté dans le paragraphe 6.1. Nous ne savons pas s'il y a un rapport avec [And96, Tha04].

Dans le paragraphe 3.5 de [Kat93], Kato montre en particulier que la valeur spéciale $L^*(X, \mathcal{F}, 1)$ de la fonction L associée à un faisceau ℓ-adique lisse $\mathcal{F}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_\ell$ sur une courbe X lisse sur $\mathbb{F}_q$ relie deux trivialisations de $\det(H_c^\bullet(X, \mathcal{F}) \otimes \mathbb{Q}_\ell)^{-1}$, sous l'hypothèse que la valeur propre 1 est semi-simple pour l'action du Frobenius sur $H_c^\bullet(X, \mathcal{F}) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ (ce qui est conjecturé lorsque $\mathcal{F}$ vient d'un "motif sur X"). On appelle valeur spéciale de la fonction $L(X, \mathcal{F}, T)$ et on note $L^*(X, \mathcal{F}, 1)$ le nombre $G(1) \in \mathbb{Q}_\ell^*$ tel que

*CNRS et Institut de mathématiques de Jussieu, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris, vlafforg@math.jussieu.fr

$L(X,\mathcal{F},T)=(1-T)^r G(T)$ et $G(1)\neq 0$. Une des trivialisations est donnée par l'élément zeta de Kato, l'autre est reliée à l'accouplement des hauteurs.

Nous voulons faire ici la même chose, lorsque le faisceau ℓ-adique est remplacé par un F-cristal au sens de Böckle et Pink [BP04] et Emerton et Kisin [EK04], plus précisément par un F-cristal provenant d'un chtouca. Soit X une courbe projective lisse sur $\mathbb{F}_q$. On note $\mathrm{Fr}: X\to X$ le morphisme $x\mapsto x^q$. Soit C une courbe affine lisse sur $\mathbb{F}_q$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ des fibrés vectoriels sur $C\times X$, et $\mathcal{E}\xrightarrow{i}\mathcal{E}'\xleftarrow{j}(\mathrm{Id}\times\mathrm{Fr})^*(\mathcal{E})$ des morphismes qui sont des isomorphismes aux points génériques de $C\times X$. On note $Z(\det(i))$ et $Z(\det(j))$ les hypersurfaces de $C\times X$, lieux des zéros de $\det(i)$ et $\det(j)$. D'abord si $Z(\det(i))$ est vide, on peut définir une valeur spéciale $L^*(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j),1)\in\mathbb{F}_q(C)$ et grâce à la formule des traces d'Anderson, l'interpréter à l'aide de groupes d'extension.

En général, soit v une place de C, et F_v le corps local associé (complétion de $\mathbb{F}_q(C)$). Alors on peut définir une valeur spéciale $L_v^*(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j),1)\in F_v$ (en fait nous considérerons une fonction L tronquée). Sous l'hypothèse que $Z(\det(i))$ n'a pas de composante irréductible commune avec $\{v\}\times X$, nous l'interprétons à l'aide de groupes d'extensions. Pour cela nous utilisons des expressions de fonctions L comme polynômes caractéristiques dues à Wan, Taguchi, Anderson, Böckle, Pink, Emerton, Kisin ([Wan96, TW96, And00, BP04, EK04]) en suivant la méthode de [And00] et [BP04].

Par rapport à la situation du paragraphe 3.5 de [Kat93], il y a trois différences :

- la valeur spéciale peut être transcendante sur le corps de définition $\mathbb{F}_q(C)$ du chtouca,
- la fonction L s'exprime comme un polynôme caractéristique d'un opérateur u sur un certain espace de telle sorte que le noyau et le conoyau de $1-u$ soient des groupes d'extension dans la catégorie des chtoucas, mais cet espace peut être de dimension infinie,
- on a besoin d'un peu de théorie de Fontaine en égales caractéristiques.

Ce dernier point rappelle la conjecture de Bloch-Kato sur les corps de nombres, surtout avec le point de vue de Fontaine et Perrin-Riou [Fon92, FPR91, FPR94] qui a été pour nous une source importante d'inspiration. Cependant, en plus de sa facilité, notre énoncé est intrinsèquement différent, pour les raisons suivantes : les fonctions L en caractéristique p ne possèdent pas d'équation fonctionnelle, notre énoncé ne fait intervenir aucune dualité et la cohomologie cohérente apparaît à la place de la cohomologie étale. D'autre part les chtoucas ne vérifient pas la transversalité de Griffiths, c'est pourquoi la notion de structure de Hodge doit être modifiée (le bon remplaçant a été mis en évidence par Pink dans [Pin97]). Dans cet article $\mathrm{Coker}\, i$ joue le même rôle que $H_{dR}/Fil^0 H_{dR}$ dans la conjecture de Bloch-Kato. En fait on peut vérifier que Coker i intervient dans le calcul des groupes d'extensions de structures de Hodge-Pink de la même manière que $H_{dR}/Fil^0 H_{dR}$ pour les extensions de structures de Hodge (voir par exemple [GL08] pour la définition d'une structure de Hodge-Pink).

A cause des modules déterminants, il se peut que certains diagrammes ne commutent qu'au signe près.

Dans tout cet article on fixe un corps fini $\mathbb{F}_q$, et on note p sa caractéristique. Par défaut tous les produits tensoriels sont sur $\mathbb{F}_q$.

Je remercie Gebhard Böckle et Richard Pink pour des discussions très utiles.

J'ai decouvert tardivement l'article [PR03] de Papanikolas et Ramachandran qui contient des idées reliées (voir le paragraphe 6.1).

1 Rappels concernant les modules déterminants et les valeurs spéciales de fonctions L de faisceaux ℓ-adiques sur une courbe sur $\mathbb{F}_q$

Nous commençons par un bref rappel sur les modules déterminants, d'après [KM76] et le paragraphe 2.1 de [Kat93]. Soit A un anneau commutatif. La sous-catégorie pleine $D^{\mathrm{par}}(A)$ de la catégorie dérivée bornée des A-modules est formée des objets qui peuvent être représentés par des complexes parfaits, i.e. des complexes bornés de A-modules projectifs de type fini. Pour tout complexe parfait $... \to C^i \to C^{i+1} \to ...$, le A-module $\bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} \det(C^i)^{(-1)^i}$ est localement libre de rang 1 et ne dépend que la classe de C à quasi-isomorphisme près. On le note $\det(C)$. Pour tout triangle distingué $C \to C' \to C''$ on a $\det(C') = \det(C)\otimes\det(C'')$. Pour contrôler les signes il faudrait aussi associer à tout complexe parfait C sa caractéristique d'Euler-Poincaré $\sum_{i\in\mathbb{Z}}(-1)^i \mathrm{rang}(C^i)$ qui est une fonction localement constante $\mathrm{Spec}\, A \to \mathbb{Z}$, ne dépendant que de la classe de quasi-isomorphisme de C. Dans la suite les isomorphismes de déterminants seront aussi des égalités de caractéristiques d'Euler-Poincaré.

Supposons A noethérien régulier (par exemple $\mathbb{Z}_\ell$, $k[[z]]$ avec k une extension finie de $\mathbb{F}_q$, l'anneau des fonctions sur une courbe affine lisse irréductible sur $\mathbb{F}_q$, ou le corps des fractions d'un de ces anneaux). Soit M un A-module de type fini. Alors le complexe formé par M placé en degré 0 est quasi-isomorphe à un complexe parfait et on note $\det(M)$ son déterminant. Autrement dit M admet une résolution $0 \to M_k \to M_{k-1} \to ... \to M_0 \to M \to 0$, où les M_i sont des A-modules projectifs de type fini, le A-module $\bigotimes_{i=0}^k \det(M_i)^{(-1)^i}$ est localement libre de rang 1 et ne dépend pas du choix de la résolution de

M et on le note $\det(M)$. Tout complexe borné $... \to C^i \to C^{i+1} \to ...$ de A-modules de type fini est quasi-isomorphe à un complexe parfait et on a $\det(C) = \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} \det(C^i)^{(-1)^i} = \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} \det(H^i(C))^{(-1)^i}$.

Dans le paragraphe 3.5 de [Kat93], Kato interprète la valeur spéciale en 1 de la fonction L d'un faisceau ℓ-adique sur un schéma sur $\mathbb{F}_q$, comme rapport entre deux trivialisations de l'inverse du déterminant de la cohomologie de son dual de Verdier, à la suite de [Tat95] et [BK90]. Le lemme essentiel est le lemme 3.5.8 de [Kat93], qui reprend le lemme z.4 du paragraphe 5 de [Tat95]. Pour la commodité du lecteur, nous rappelons ce travail, en nous limitant aux faisceaux lisses sur des courbes lisses sur $\mathbb{F}_q$ et en utilisant la cohomologie à support compact plutôt que la cohomologie sans support.

Soit donc Y une courbe lisse sur $\mathbb{F}_q$ et $\mathcal{F}$ un faisceau ℓ-adique lisse sur Y, à coefficients dans $\mathbb{Z}_\ell$. Alors $R\Gamma_c(\bar{Y}, \mathcal{F})$ est un objet de la catégorie dérivée des $\mathbb{Z}_\ell$-modules, et est muni d'un endomorphisme de Frobenius arithmétique F. Dans cette catégorie dérivée on a un triangle distingué

$$R\Gamma_c(Y, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha} R\Gamma_c(\bar{Y}, \mathcal{F}) \xrightarrow{1-F} R\Gamma_c(\bar{Y}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\beta} ...$$

Il en résulte une trivialisation du déterminant de $R\Gamma_c(Y, \mathcal{F})$, et on note $z(Y, \mathcal{F}) \in \det(R\Gamma_c(Y, \mathcal{F}))^{-1}$ le générateur qui assure cette trivialisation. L'image de $z(Y, \mathcal{F})$ dans $\det(R\Gamma_c(Y, \mathcal{F}) \otimes \mathbb{Q}_\ell)^{-1}$ ne dépend que de $\mathcal{F} \otimes \mathbb{Q}_\ell$. Par ailleurs $\beta \circ \alpha$ est un endomorphisme de degré 1 et de carré nul de $R\Gamma_c(Y, \mathcal{F}) \otimes \mathbb{Q}_\ell$, qui s'identifie au cup produit avec le générateur θ de $H^1(\mathbb{F}_q, \mathbb{Z}_\ell) = \mathrm{Hom}_{cont}(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q), \mathbb{Z}_\ell)$ qui envoie le Frobenius arithmétique sur 1. Sous l'hypothèse que la valeur propre 1 de F sur les $H^i_c(\bar{Y}, \mathcal{F}) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ est semi-simple, le complexe

$$...H_c^{i-1}(Y, \mathcal{F}) \otimes \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\beta\circ\alpha} H_c^i(Y, \mathcal{F}) \otimes \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\beta\circ\alpha} H_c^{i+1}(Y, \mathcal{F}) \otimes \mathbb{Q}_\ell...$$

est exact. Cela fournit une trivialisation $\lambda : \det(R\Gamma_c(Y, \mathcal{F}))^{-1} \otimes \mathbb{Q}_\ell \simeq \mathbb{Q}_\ell$.

Par ailleurs soit

$$L(Y, \mathcal{F}, T) = \prod \det(1 - TF | H^i_c(\bar{Y}, \mathcal{F}) \otimes \mathbb{Q}_\ell)^{(-1)^{i+1}}$$

la fonction L attachée à $\mathcal{F}$.

Proposition 1.1 *(proposition 3.5.7 de [Kat93]) Sous l'hypothèse que la valeur propre 1 de F sur $H^i_c(\bar{Y}, \mathcal{F}) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ est semi-simple pour $i = 0, 1, 2$, la valeur spéciale $L^*(Y, \mathcal{F}, 1)$ est égale à $\lambda(z(Y, \mathcal{F}))$.* □

Comme $z(Y, \mathcal{F})$ est un générateur de $\det(R\Gamma_c(Y, \mathcal{F}))^{-1}$, si on ne s'intéresse qu'à la valuation ℓ-adique de $L^*(Y, \mathcal{F}, 1)$, on peut se passer de $z(Y, \mathcal{F})$ (c'est ce que fait Tate dans [Tat95]). D'autre part le morphisme $\beta\circ\alpha : H_c^i(Y,\mathcal{F})\otimes\mathbb{Q}_\ell \to H_c^{i+1}(Y,\mathcal{F})\otimes\mathbb{Q}_\ell$ peut aussi être obtenu de la façon suivante : la dualité de Poincaré géométrique fournit un accouplement parfait $H_c^i(\bar{Y},\mathcal{F})\otimes\mathbb{Q}_\ell \times H^{2-i}(\bar{Y},\mathcal{F}^*(1))\otimes\mathbb{Q}_\ell \to \mathbb{Q}_\ell$, que l'on peut restreindre (par $\alpha : H_c^i(Y,\mathcal{F}) \to H_c^i(\bar{Y},\mathcal{F})$ et le morphisme analogue $H^{2-i}(Y,\mathcal{F}^*(1)) \to H^{2-i}(\bar{Y},\mathcal{F}^*(1))$) en l'accouplement des hauteurs $H_c^i(Y,\mathcal{F})\otimes\mathbb{Q}_\ell \times H^{2-i}(Y,\mathcal{F}^*(1))\otimes\mathbb{Q}_\ell \to \mathbb{Q}_\ell$ (on renvoie au premier paragraphe de [Bei87] pour une discussion sur l'accouplement des hauteurs sur les corps de fonctions). D'autre part la dualité arithmétique (voir [Mil86]) fournit un accouplement parfait $H_c^{i+1}(Y,\mathcal{F})\otimes\mathbb{Q}_\ell \times H^{2-i}(Y,\mathcal{F}^*(1))\otimes\mathbb{Q}_\ell \to \mathbb{Q}_\ell$. Ces deux accouplements permettent de retrouver $\beta\circ\alpha$, qui est la composée $H_c^i(Y,\mathcal{F})\otimes\mathbb{Q}_\ell \to \big(H^{2-i}(\bar{Y},\mathcal{F}^*(1))\otimes\mathbb{Q}_\ell\big)^* \xrightarrow{\sim} H_c^{i+1}(Y,\mathcal{F})\otimes\mathbb{Q}_\ell$.

2 Valeurs spéciales de fonctions L en caractéristique p, dans un cas simple

Nous allons considérer dans ce paragraphe une situation très analogue à celle du paragraphe précédent, à ceci près que la formule des traces de Grothendieck-Lefschetz est remplacée par la formule des points fixes de Woods-Hole ou par l'interprétation cohomologique de la formule des traces d'Anderson donnée au paragraphe 7.4 de [BP04].

Soit X une courbe projective lisse sur $\mathbb{F}_q$, $C = \mathrm{Spec}A$ une courbe affine lisse sur $\mathbb{F}_q$. On note $F = \mathbb{F}_q(C)$ le corps des fractions de A. On note $|X|$ l'ensemble des points fermés de X et pour $x \in |X|$, on note $k(x)$ son corps résiduel et d_x son degré sur $\mathbb{F}_q$. Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel sur $C\times X$. On note ${}^\tau\mathcal{E}$ l'image inverse de $\mathcal{E}$ par $\mathrm{Id}\times\mathrm{Fr}$, où Fr est le morphisme $x \mapsto x^q$ de X dans lui-même. On note τ l'application qui à une section de $\mathcal{E}$ associe la section de ${}^\tau\mathcal{E}$ qui est son image inverse par $\mathrm{Id}\times\mathrm{Fr}$.

Soit $u : {}^\tau\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ un morphisme de fibrés sur $C\times X$. Pour $x\in|X|$, on note $u_x : {}^\tau\mathcal{E}_x \to \mathcal{E}_x$ la restriction de u à $C\times\mathrm{Spec}\,(k(x)) = \mathrm{Spec}\,(A\otimes k(x))$, si bien que $u_x\tau$ est un endomorphisme $1\otimes\mathrm{Fr}$-linéaire du $A\otimes k(x)$-module projectif de type fini associé à $\mathcal{E}_x$. Le facteur local de la fonction L de $(\mathcal{E},u)$ est par définition

$$L(x,(\mathcal{E},u),T) = \det_A(1 - Tu_x\tau)^{-1} = \det_{A\otimes k(x)}(1 - T^{d_x}(u_x\tau)^{d_x})^{-1}$$

qui appartient à $1 + T^{d_x}A[[T^{d_x}]]$. La fonction L de $(\mathcal{E},u)$ est alors

$$L(X,(\mathcal{E},u),T) = \prod_{x\in|X|} L(x,(\mathcal{E},u),T) \in 1 + TA[[T]].$$

Pour plus de détails sur les fonctions L associées aux "τ-faisceaux" voir par exemple [BP04], [Boe02] et [TW96].

Notons $H^0(X,\mathcal{E})$ et $H^1(X,\mathcal{E})$ les A-modules de type fini qui sont les images directes de $\mathcal{E}$ par la projection $C\times X\to C$. Pour $i=0,1$, on note encore $\tau: H^i(X,\mathcal{E})\to H^i(X,{}^\tau\mathcal{E})$ l'image inverse par $\mathrm{Id}\times\mathrm{Fr}$ sur $C\times X$, et $u: H^i(X,{}^\tau\mathcal{E})\to H^i(X,\mathcal{E})$ le morphisme induit par u. Alors $H^0(X,\mathcal{E})\otimes_A F$ et $H^1(X,\mathcal{E})\otimes_A F$ sont des F-espaces vectoriels de dimension finie et ce sont les images directes de la restriction de $\mathcal{E}$ à $X\times\operatorname{Spec}F$ par $X\times\operatorname{Spec}F\to\operatorname{Spec}F$. En appliquant la formule des points fixes de Woods-Hole (SGA 5 III, Corollaire 6.12) au $\operatorname{Spec}F$-schéma projectif et lisse $\operatorname{Sym}^n X$ muni de l'endomorphisme Fr, et au $\mathcal{O}$-module cohérent $\mathrm{TS}^n_{\mathrm{ext}}(\mathcal{E})$ (aussi noté $\Gamma^n_{\mathrm{ext}}(\mathcal{E})$ dans SGA 4 XVII 5.5 et défini comme $(\pi_*(\mathcal{E}^{\boxtimes n}))^{\mathfrak{S}_n}$ où $\pi: X^n\to\operatorname{Sym}^n X$ est le morphisme évident) muni de $\mathrm{TS}^n_{\mathrm{ext}}(u): {}^\tau(\mathrm{TS}^n_{\mathrm{ext}}(\mathcal{E}))\to\mathrm{TS}^n_{\mathrm{ext}}(\mathcal{E})$, et en sommant sur $n\in\mathbb{N}$, on obtient

$$L(X,(\mathcal{E},u),T)=\frac{\det(1-Tu\tau|_{H^1(X,\mathcal{E})\otimes_A F})}{\det(1-Tu\tau|_{H^0(X,\mathcal{E})\otimes_A F})}\quad\text{dans}\quad 1+TF[[T]].\tag{1}$$

Pour plus de détails on renvoie aux paragraphes 1 et 2 du chapitre "Fonctions L modulo ℓ^n et modulo p" de [SGA4et1/2], où la même méthode est utilisée dans un cadre un peu différent, au paragraphe 5.5 de SGA 4 XVII (en particulier à la proposition 5.5.34) et à un travail ultérieur.

Notons $H^i(X,(\mathcal{E},u))=\mathrm{E}xt^i(X,(\mathcal{O},\mathrm{Id}),(\mathcal{E},u))$, les groupes d'extension de $(\mathcal{O},\mathrm{Id})$ par $(\mathcal{E},u)$ dans la catégorie abélienne des couples $(\mathcal{F},v)$, où $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}$-module sur $C\times X$, muni d'un endomorphisme $v: {}^\tau\mathcal{F}\to\mathcal{F}$. Ce sont des A-modules de type fini, nuls pour $i\neq 0,1,2$, et on a une suite exacte longue

$$0\to H^0(X,(\mathcal{E},u))\xrightarrow{\alpha}H^0(X,\mathcal{E})\xrightarrow{1-u\tau}H^0(X,\mathcal{E})\xrightarrow{\beta}$$

$$H^1(X,(\mathcal{E},u))\xrightarrow{\alpha}H^1(X,\mathcal{E})\xrightarrow{1-u\tau}H^1(X,\mathcal{E})\xrightarrow{\beta}H^2(X,(\mathcal{E},u))\to 0.$$

Cette suite exacte fournit un générateur $z(X,(\mathcal{E},u))$ du A-module (libre de rang 1) $\det(H^\bullet(X,(\mathcal{E},u)))^{-1}$. Faisons maintenant l'hypothèse

$$\mathrm{Ker}\,((1-u\tau)^2)=\mathrm{Ker}\,(1-u\tau)$$

dans $H^0(X,\mathcal{E})\otimes_A F$ et $H^1(X,\mathcal{E})\otimes_A F$. Il n'y a aucune raison pour que cette hypothèse de semi-simplicité de la valeur propre 1 soit toujours vérifiée. Sous cette hypothèse, le complexe

$$0\to H^0(X,(\mathcal{E},u))\otimes_A F\xrightarrow{\beta\circ\alpha}H^1(X,(\mathcal{E},u))\otimes_A F\xrightarrow{\beta\circ\alpha}H^2(X,(\mathcal{E},u))\otimes_A F\to 0\tag{2}$$

est exact et on note $\lambda: \det(H^\bullet(X,(\mathcal{E},u)))^{-1}\otimes_A F\to F$ l'isomorphisme qui en résulte.

On a alors la proposition suivante.

Proposition 2.1 *Sous l'hypothèse de semi-simplicité de la valeur propre* 1 *de* $u\tau$ *sur* $H^0(X,\mathcal{E})\otimes_A F$ *et* $H^1(X,\mathcal{E})\otimes_A F$*, l'ordre d'annulation de* $L(X,(\mathcal{E},u),T)$ *en* $T=1$ *est égal à* $-\dim H^0(X,(\mathcal{E},u))\otimes_A F+\dim H^2(X,(\mathcal{E},u))\otimes_A F$ *et la valeur spéciale* $L^*(X,(\mathcal{E},u),1)\in A$ *est égale à* $\lambda(z(X,(\mathcal{E},u)))$ *dans* F.

Démonstration. En effet on applique le lemme 3.5.8 de [Kat93] au complexe $R\Gamma(X,\mathcal{E})\otimes_A F$ muni de l'endomorphisme $u\tau$. Pour la commodité du lecteur nous reprenons la démonstration. Pour $i=0,1$, soit P^i, Q^i et R^i le noyau, le conoyau et l'image de $H^i(X,\mathcal{E})\otimes_A F \stackrel{1-u\tau}{\to} H^i(X,\mathcal{E})\otimes_A F$. On a $P^0=H^0(X,(\mathcal{E},u))\otimes_A F$, $Q^1=H^2(X,(\mathcal{E},u))\otimes_A F$ et une suite exacte $0\to Q^0\to H^1(X,(\mathcal{E},u))\otimes_A F\to P^1\to 0$. Le complexe (2) se décompose en les applications $P^0\stackrel{\gamma_0}{\to} Q^0$ et $P^1\stackrel{\gamma_1}{\to} Q^1$, où pour $i=0,1$, γ_i est la composée $P^i\to H^i(X,\mathcal{E})\otimes_A F\to Q^i$ et est un isomorphisme par hypothèse. Alors

$$L(X,(\mathcal{E},u),T)=(1-T)^{-\dim P^0+\dim P^1}\frac{\det(1-Tu\tau|_{R^1})}{\det(1-Tu\tau|_{R^0})},$$

donc l'ordre d'annulation de $L(X,(\mathcal{E},u),T)$ en $T=1$ est $-\dim P^0+\dim P^1=-\dim P^0+\dim Q^1=-\dim H^0(X,(\mathcal{E},u))\otimes_A F+\dim H^2(X,(\mathcal{E},u))\otimes_A F$. Il reste à montrer que pour $i=0,1$, l'image de $1\in F$ par la suite d'isomorphismes

$$F\simeq\det(H^i(X,\mathcal{E})\otimes_A F)\otimes\det(H^i(X,\mathcal{E})\otimes_A F)^{-1}\simeq$$

$$\det(H^i(X,\mathcal{E})\otimes_A F\stackrel{1-u\tau}{\to}H^i(X,\mathcal{E})\otimes_A F)\simeq\det(P^i)\otimes\det(Q^i)^{-1}\simeq F$$

(où le dernier isomorphisme vient de $\gamma_i: P^i\stackrel{\sim}{\to}Q^i$) est égale à $\det(1-u\tau|_{R^i})$. On a $H^i(X,\mathcal{E})\otimes_A F=P^i\oplus R^i$, et dans cette décomposition la matrice de $1-u\tau$ est de la forme $\begin{pmatrix}0&0\\0&*\end{pmatrix}$, et l'isomorphisme $P^i\to Q^i$ vient de l'égalité $Q^i\simeq H^i/R^i$. On se ramène ainsi au cas où P^i et Q^i sont nuls, et il s'agit alors de la définition même du déterminant d'un endomorphisme. □

Nous allons maintenant donner un énoncé similaire pour les fonctions L tronquées. Soit $S=\{w_1,...,w_h\}$ un ensemble fini de places de $|X|$. On note

$$L_S(X,(\mathcal{E},u),T)=\prod_{x\in|X|-S}L(x,(\mathcal{E},u),T)\in 1+TA[[T]]$$

la fonction L tronquée. On note $\mathcal{O}(-S)$ le fibré en droites $\mathcal{O}(-w_1-...-w_h)$ sur X, et $\mathcal{E}(-S)=\mathcal{E}\otimes\mathcal{O}(-S)$. On a ${}^\tau(\mathcal{E}(-S))={}^\tau\mathcal{E}(-qw_1-...-qw_h)$ donc u détermine un morphisme ${}^\tau(\mathcal{E}(-S))\to\mathcal{E}(-S)$ et on note $H_S(X,(\mathcal{E},u))$ la cohomologie du cône (décalé de [-1]) de $R\Gamma(X,\mathcal{E}(-S))\stackrel{1-u\tau}{\to}R\Gamma(X,\mathcal{E}(-S))$. Le cône décalé de [-1] d'un morphisme de complexes est simplement le complexe total associé. On a une suite exacte longue

$$0 \to H^0_S(X,(\mathcal{E},u)) \xrightarrow{\alpha} H^0(X,\mathcal{E}(-S)) \xrightarrow{1-u\tau} H^0(X,\mathcal{E}(-S)) \xrightarrow{\beta}$$

$$H^1_S(X,(\mathcal{E},u)) \xrightarrow{\alpha} H^1(X,\mathcal{E}(-S)) \xrightarrow{1-u\tau} H^1(X,\mathcal{E}(-S)) \xrightarrow{\beta} H^2_S(X,(\mathcal{E},u)) \to 0.$$

Comme précédemment on en déduit un générateur $z_S(X,(\mathcal{E},u))$ du A-module (libre de rang 1) $\det(H^\bullet_S(X,(\mathcal{E},u)))^{-1}$.

On peut interpréter les $H^i_S(X,(\mathcal{E},u))$ comme des groupes d'extensions à support compact sur $X-S$. En effet pour $n \geq 1$ on a $u^\tau(\mathcal{E}(-nS)) \subset \mathcal{E}(-qnS)$ et $qn \geq n+1$. On en déduit par récurrence sur n que le morphisme de complexes

$$\text{Cône}\Big(R\Gamma(X,\mathcal{E}(-nS)) \xrightarrow{1-u\tau} R\Gamma(X,\mathcal{E}(-nS))\Big)[-1]$$

$$\to \text{Cône}\Big(R\Gamma(X,\mathcal{E}(-S)) \xrightarrow{1-u\tau} R\Gamma(X,\mathcal{E}(-S))\Big)[-1]$$

est un quasi-isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (cet argument apparaîtra de nouveau dans la preuve du lemme 4.1).

Faisons maintenant l'hypothèse de semi-simplicité de la valeur propre 1 : $\operatorname{Ker}((1-u\tau)^2) = \operatorname{Ker}(1-u\tau)$ dans $H^0(X,\mathcal{E}(-S))\otimes_A F$ et $H^1(X,\mathcal{E}(-S))\otimes_A F$. Alors le complexe

$$0 \to H^0_S(X,(\mathcal{E},u)) \otimes_A F \xrightarrow{\beta\circ\alpha} H^1_S(X,(\mathcal{E},u)) \otimes_A F \xrightarrow{\beta\circ\alpha} H^2_S(X,(\mathcal{E},u)) \otimes_A F \to 0$$

est exact et on note $\lambda : \det(H^\bullet_S(X,(\mathcal{E},u)))^{-1} \otimes_A F \to F$ l'isomorphisme qui en résulte.

Proposition 2.2 *Sous l'hypothèse de semi-simplicité de la valeur propre* 1 *de* $u\tau$ *sur* $H^0(X,\mathcal{E}(-S)) \otimes_A F$ *et* $H^1(X,\mathcal{E}(-S)) \otimes_A F$*, l'ordre d'annulation de* $L_S(X,(\mathcal{E},u),T)$ *en* $T=1$ *est égal à* $-\dim H^0_S(X,(\mathcal{E},u)) \otimes_A F + \dim H^2_S(X,(\mathcal{E},u)) \otimes_A F$ *et la valeur spéciale* $L^*_S(X,(\mathcal{E},u),1) \in A$ *est égale à* $\lambda(z_S(X,(\mathcal{E},u)))$ *dans* F*.*

Démonstration. On applique le lemme 3.5.8 de [Kat93] au complexe $R\Gamma(X,\mathcal{E}(-S)) \otimes_A F$ muni de l'endomorphisme $u\tau$, ou bien on reprend la démonstration de la proposition 2.1. D'autre part

$$L_S(X,(\mathcal{E},u),T) = \frac{\det(1-Tu\tau|_{H^1(X,\mathcal{E}(-S))\otimes_A F})}{\det(1-Tu\tau|_{H^0(X,\mathcal{E}(-S))\otimes_A F})} \quad \text{dans} \quad 1+TF[[T]].$$

A cause du triangle distingué

$$\Gamma(X, \mathcal{E}(-S)) \to R\Gamma(X, \mathcal{E}) \to \bigoplus_{w \in S} \mathcal{E}_w$$

(où $\mathcal{E}_w$ est la fibre de $\mathcal{E}$ en w), cela est équivalent à la formule (1). Lorsque S est non vide cela résulte aussi de l'interprétation cohomologique de la formule des traces d'Anderson donnée au paragraphe 7.4 de [BP04]. $\square$

3 Fonctions L en caractéristique p

Nous rappelons d'abord des travaux de Anderson [And00], Wan [Wan96], Taguchi et Wan [TW96], et Böckle et Pink [BP04], en suivant [And00] et [BP04], et en nous limitant strictement à la situation qui nous intéresse. Emerton et Kisin ont montré un résultat analogue dans [EK04] mais nous n'utiliserons pas leur formalisme. La lecture de [And00] est recommandée.

Soit $Y = \operatorname{Spec} R$ une courbe affine lisse sur $\mathbb{F}_q$. On note $|Y|$ l'ensemble des points fermés de Y et pour $x \in |Y|$, on note $k(x)$ son corps résiduel et d_x son degré sur $\mathbb{F}_q$. Soit $A = k[[z]]$, où k est une extension finie de $\mathbb{F}_q$. On note $A\widehat{\otimes}R = (k \otimes R)[[z]]$ le produit tensoriel complété (sur $\mathbb{F}_q$).

Soit $\mathcal{M}$ un $A\widehat{\otimes}R$-module projectif de type fini. On note ${}^{\tau}\mathcal{M} = \mathcal{M} \otimes_{A\widehat{\otimes}R, 1\widehat{\otimes}\mathrm{Fr}} A\widehat{\otimes}R$, où Fr est le morphisme $x \mapsto x^q$ de R dans lui-même. On note τ l'application $1\widehat{\otimes}\mathrm{Fr}$-linéaire de $\mathcal{M}$ dans ${}^{\tau}\mathcal{M}$ qui à $m \in \mathcal{M}$ associe $m \otimes 1 \in {}^{\tau}\mathcal{M}$.

Soit $u : {}^{\tau}\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ un morphisme de $A\widehat{\otimes}R$-modules. Pour $x \in |Y|$, on note $\mathcal{M}_x = \mathcal{M}_{A\widehat{\otimes}R} A \otimes k(x)$ et $u_x : {}^{\tau}\mathcal{M}_x \to \mathcal{M}_x$ la restriction de u à x et $\tau : \mathcal{M}_x \to {}^{\tau}\mathcal{M}_x$ comme précédemment. Le facteur local de la fonction L de $(\mathcal{M}, u)$ est par définition

$$\begin{aligned} L(x, (\mathcal{M}, u), T) &= \det{}_A(1 - T u_x \tau)^{-1} \\ &= \det{}_{A\otimes k(x)}(1 - T^{d_x}(u_x\tau)^{d_x})^{-1} \in 1 + T^{d_x} A[[T^{d_x}]]. \end{aligned}$$

La fonction L de $(\mathcal{M}, u)$ est alors

$$L(Y, (\mathcal{M}, u), T) = \prod_{x \in |Y|} L(x, (\mathcal{M}, u), T) \in 1 + TA[[T]].$$

Supposons d'abord que $\mathcal{M}$ est isomorphe à $A\widehat{\otimes}M$, où M est un R-module projectif de type fini (c'est-à-dire l'espace des sections d'un fibré vectoriel sur Y). Soit V le R-module $\operatorname{Hom}_R(M, \Omega_R)$, où Ω_R est le R-module inversible formé des sections du fibré canonique ω_Y de Y. On a le $A\widehat{\otimes}R$-module $\mathcal{V} = A\widehat{\otimes}V = \operatorname{Hom}_{A\widehat{\otimes}R}(\mathcal{M}, A\widehat{\otimes}\Omega_R)$. D'après [And00] et la proposition 7.2.5

de [BP04], u détermine par dualité, et à l'aide du morphisme de Cartier, un endomorphisme Cartier-linéaire $\kappa_{\mathcal{V}} : A\widehat{\otimes}V \to A\widehat{\otimes}V$ (c'est-à-dire linéaire si le premier $A\widehat{\otimes}V$ est considéré comme $A\widehat{\otimes}R$-module en faisant agir $a \otimes r$ par $a \otimes r^q$). Plus précisément, en notant $C : \Omega_R \to \Omega_R$ la puissance $\frac{\log q}{\log p}$-ième du morphisme de Cartier, pour $\mu \in A\widehat{\otimes}V = \mathrm{Hom}_{A\widehat{\otimes}R}(\mathcal{M}, A\widehat{\otimes}\Omega_R)$, on a $\kappa_{\mathcal{V}}(\mu) = (1\widehat{\otimes}C) \circ \mu \circ u\tau : \mathcal{M} \to A\widehat{\otimes}\Omega_R$.

D'après le théorème 7.3.10 de [BP04], on a le résultat suivant

Proposition 3.1 *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. La réduction de $L(Y, (\mathcal{M}, u), T)$ modulo z^m, qui appartient a priori à $1 + T(A/z^mA)[[T]]$, est un polynôme. De plus*

$$\mathrm{Id}_{(A/z^mA)\otimes R} \otimes_{A\widehat{\otimes}R} \kappa_{\mathcal{V}} : A/z^mA \otimes V \to A/z^mA \otimes V$$

(réduction de $\kappa_{\mathcal{V}}$ modulo z^m) a un "noyau" (au sens de [And00]), c'est-à-dire qu'il existe une suite $W_0 \subset W_1 \subset W_2...$ de sous-espaces de dimension finie de V, tels que

$$\bigcup W_i = V, \qquad \textit{et} \qquad \kappa_{\mathcal{V}}(A/z^mA \otimes W_{i+1}) \subset A/z^mA \otimes W_i.$$

Pour toute suite $W_0 \subset W_1 \subset W_2...$ comme ci-dessus on a

$$L(Y, (\mathcal{M}, u), T) \bmod z^m = \det(1 - T\kappa_{\mathcal{V}}|_{A/z^mA\otimes W_0}).$$

Démonstration. La proposition est un cas particulier du théorème 7.3.10 de [BP04] (avec A/z^mA au lieu de A). Lorsque $m = 1$ c'est un cas particulier du théorème 1 de [And00] (avec R au lieu de A et $r = 1$), et pour m quelconque la preuve s'étend presque sans changements, comme l'ont remarqué Böckle et Pink. $\square$

En général soit $\mathcal{M}$ un $A\widehat{\otimes}R$-module projectif de type fini et $u : {}^\tau\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ un morphisme de $A\widehat{\otimes}R$-modules. Soit X une courbe projective lisse telle que Y s'identifie à un ouvert dense de X, et $w_1, ..., w_h$ les points de X en dehors de Y. On note $\mathrm{Spf}\, A\hat{\times}X$ et $\mathrm{Spf}\, A\hat{\times}Y$ les schémas formels sur $\mathrm{Spf}\, A$, images inverses de X et de Y par le morphisme de $\mathrm{Spf}\, A$ vers le point. Bien sûr $\mathrm{Spf}\, A\hat{\times}Y = \mathrm{Spf}\,(A\widehat{\otimes}R)$. On fixe un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur $\mathrm{Spf}\, A\hat{\times}X$ dont la restriction à $\mathrm{Spf}\, A\hat{\times}Y$ ait $\mathcal{M}$ comme espace des sections globales. Soit $\mathcal{V} = \mathrm{Hom}_{A\widehat{\otimes}R}(\mathcal{M}, A\widehat{\otimes}\Omega_R)$. Comme précédemment on définit un morphisme Cartier-linéaire $\kappa_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$. Pour tout $t \in \mathbb{N}$, on a le sous-A-module

$$\mathcal{V}_t = H^0(\mathrm{Spf}\, A\hat{\times}X, \mathcal{E}^* \otimes \Omega_X(t(\sum_{i=1}^h w_i))) \subset \mathcal{V} = H^0(\mathrm{Spf}\, A\hat{\times}Y, \mathcal{E}^* \otimes \Omega_X).$$

On a $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \dots$, et $\mathcal{V}$ s'identifie au complété du A-module $\bigcup_t \mathcal{V}_t$ pour la topologie z-adique. Pour t assez grand $\mathcal{V}_t$ est un A-module libre de type fini facteur direct dans $\mathcal{V}$ (de plus $\mathcal{V}_t$ est fermé pour la topologie z-adique et tout supplémentaire de $\mathcal{V}_t$ est fermé pour la topologie z-adique). En effet comme X est projective $\mathcal{E}$ provient d'un fibré vectoriel sur $\mathrm{Spec}\, A \times X$ et donc pour t assez grand $H^1(\mathrm{Spf}\, A \hat{\times} X, \mathcal{E}^* \otimes \Omega_X(t(\sum_{i=1}^h w_i))) = 0$. On a alors une suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{V}_t \to \mathcal{V}_{t+1} \to \mathcal{E}^* \otimes \Omega_X((t+1)(\sum_{i=1}^h w_i))/\mathcal{E}^* \otimes \Omega_X(t(\sum_{i=1}^h w_i)) \to 0$$

qui est scindée puisque le terme de droite est un A-module libre. Donc pour t assez grand, $\mathcal{V}_t$ est facteur direct dans $\mathcal{V}_{t+1}$ et on en déduit facilement que pour t assez grand $\mathcal{V}_t$ est facteur direct dans $\mathcal{V}$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ l'inclusion $\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t \subset \mathcal{V}/z^m\mathcal{V}$ s'identifie à l'inclusion

$$H^0(\mathrm{Spf}\,(A/z^mA) \hat{\times} X, \mathcal{E}^* \otimes \Omega_X(t(\sum_{i=1}^h w_i))) \subset H^0(\mathrm{Spf}\,(A/z^mA) \hat{\times} Y, \mathcal{E}^* \otimes \Omega_X) \to 0$$

et on a $\mathcal{V}/z^m\mathcal{V} = \bigcup_t (\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t)$.

Proposition 3.2 *Soit $m \in \mathbb{N}^*$.*

a) La réduction de $L(Y, (\mathcal{M}, u), T)$ modulo z^m, qui appartient a priori à $1 + T(A/z^mA)[[T]]$, est un polynôme.

b) Pour t assez grand,

$$\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t = H^0(\mathrm{Spf}\,(A/z^mA) \hat{\times} X, \mathcal{E}^* \otimes \Omega_X(t(\sum_{i=1}^h w_i)))$$

est un sous-A/z^mA-module libre de type fini facteur direct de

$$\mathcal{V}/z^m\mathcal{V} = H^0(\mathrm{Spf}\,(A/z^mA) \hat{\times} Y, \mathcal{E}^* \otimes \Omega_X)$$

qui est stable par la réduction modulo z^m de $\kappa_{\mathcal{V}}$ et

$$L(Y, (\mathcal{M}, u), T) \quad mod \quad z^m = \det_{A/z^mA}(1 - T\kappa_{\mathcal{V}}|_{\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t}).$$

Démonstration. Montrons a). Il existe un $A\widehat{\otimes}R$-module projectif de type fini $\mathcal{M}'$ tel que $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}'$ soit de la forme $A\widehat{\otimes}M$ avec M un R-module projectif de type fini. On munit $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}'$ de $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : {}^\tau(\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}') \to \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}'$. On a $L(Y, (\mathcal{M}', 0), T) = 1$, d'où $L(Y, (\mathcal{M}, u), T) = L(Y, (\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}', \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}), T)$ et a) résulte alors de la proposition 3.1.

Montrons b). Il existe $a \in \mathbb{N}$ (dépendant de m) tel que

$$u({}^{\tau}\mathcal{E}|_{\mathrm{Spf}\,(A/z^m A)\hat{\times}X}) \subset \mathcal{E}(a(\sum_{i=1}^{h} w_i))|_{\mathrm{Spf}\,(A/z^m A)\hat{\times}X}.$$

Lemme 3.3 *Pour t assez grand, on a $\kappa_{\mathcal{V}}(\mathcal{V}_{qt-a}/z^m\mathcal{V}_{qt-a}) \subset \mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t$.*

Démonstration. En effet tout $\mu \in \mathcal{V}_{qt-a}/z^m\mathcal{V}_{qt-a}$ est un morphisme $\mathcal{E}(-(qt-a)(\sum_{i=1}^{h} w_i)) \to \Omega_X$ sur $\mathrm{Spf}\,(A/z^m A)\hat{\times}X$ et $\kappa_{\mathcal{V}}(\mu)$ est la composée

$$\mathcal{E}(-t(\sum_{i=1}^{h} w_i)) \xrightarrow{\tau} (\mathrm{Id}\hat{\times}\mathrm{Fr})_*{}^{\tau}\mathcal{E}(-qt(\sum_{i=1}^{h} w_i)) \xrightarrow{u}$$

$$(\mathrm{Id}\hat{\times}\mathrm{Fr})_*\mathcal{E}(-(qt-a)(\sum_{i=1}^{h} w_i)) \xrightarrow{\mu} (\mathrm{Id}\hat{\times}\mathrm{Fr})_*\Omega_X \xrightarrow{1\hat{\otimes}C} \Omega_X$$

sur $\mathrm{Spf}\,(A/z^m A)\hat{\times}X$. Notons en passant que pour t assez grand,

$$H^1(\mathrm{Spf}\,(A/z^m A)\hat{\times}X, \mathcal{E}(-t(\sum_{i=1}^{h} w_i)))$$

$$\text{et}\quad \mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t = H^0(\mathrm{Spf}\,(A/z^m A)\hat{\times}X, \mathcal{E}^* \otimes \Omega_X(t(\sum_{i=1}^{h} w_i)))$$

sont des $A/z^m A$-modules libres duaux l'un de l'autre et que le morphisme

$$H^1(\mathrm{Spf}\,(A/z^m A)\hat{\times}X, \mathcal{E}(-t(\sum_{i=1}^{h} w_i))) \to$$

$$H^1(\mathrm{Spf}\,(A/z^m A)\hat{\times}X, \mathcal{E}(-(qt-a)(\sum_{i=1}^{h} w_i)))$$

induit par $u\tau$ est le transposé du morphisme du lemme 3.3. $\square$

Il résulte du lemme 3.3 que dans b), $\det_{A/z^m A}(1 - T\kappa_{\mathcal{V}}|_{\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t})$ est indépendant de t, pour t assez grand. Montrons qu'il est indépendant du fibré $\mathcal{E}$ choisi pour prolonger $\mathcal{M}$ de $\mathrm{Spf}\,A\hat{\times}Y$ à $\mathrm{Spf}\,A\hat{\times}X$. Soit $\mathcal{E}'$ un autre prolongement, et $\mathcal{V}'_t \subset \mathcal{V}$ associés à $\mathcal{E}'$ comme $\mathcal{V}_t$ à $\mathcal{E}$. Il existe $b \in \mathbb{N}$ (dépendant de m) tel que $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}(b(\sum_{i=1}^{h} w_i))$ et $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'(b(\sum_{i=1}^{h} w_i))$ sur $\mathrm{Spf}\,(A/z^m A)\hat{\times}X$. On a alors $\mathcal{V}_t \subset \mathcal{V}'_{t+b}$ et $\mathcal{V}'_t \subset \mathcal{V}_{t+b}$. Pour t assez grand on a donc des inclusions de $A/z^m A$-modules libres facteurs directs $\mathcal{V}_t \subset \mathcal{V}'_{t+b} \subset \mathcal{V}_{qt-a}$, et le lemme 3.3 implique $\det_{A/z^m A}(1 - T\kappa_{\mathcal{V}}|_{\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t}) = \det_{A/z^m A}(1 - T\kappa_{\mathcal{V}'}|_{\mathcal{V}'_{t+b}/z^m\mathcal{V}'_{t+b}})$.

Soit $\mathcal{M}'$ comme dans la preuve de a), $\mathcal{V}'$ associé à $\mathcal{M}'$ et soit $\mathcal{E}'$ un prolongement de $\mathcal{M}'$. Alors $\kappa_{\mathcal{V}'} = 0$ et on a $L(Y, (\mathcal{M}', 0), T) = 1$ et $\det_{A/z^m A}(1 - T\kappa_{\mathcal{V}'}|_{\mathcal{V}'_t/z^m\mathcal{V}'_t}) = 1$. Il suffit donc de montrer b) pour $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}'$, et on est donc ramené au cas où $\mathcal{M}$ est isomorphe à $A\widehat{\otimes}M$, où M est un R-module projectif de type fini. Soit E un fibré vectoriel sur X tel que M soit l'espace des sections de E sur Y. On prend pour $\mathcal{E}$ l'image inverse de E sur $\mathrm{Spf}\, A\hat{\times}X$. Alors pour t assez grand on a $\mathcal{V}_t = A \otimes V_t$, où $V_t = H^0(X, E^* \otimes \Omega_X(t(\sum_{i=1}^h w_i)))$. Pour t assez grand, $W_i = V_{t+i}$ définit une suite $W_0 \subset W_1 \subset \ldots$ comme dans l'énoncé de la proposition 3.1 et b) résulte alors de cette proposition. □

Pour t assez grand on note $(\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t)^\perp$ l'orthogonal de $\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t$ dans $\mathrm{Hom}_{A/z^m A}(\mathcal{V}/z^m\mathcal{V}, A/z^m A) = \mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}, A/z^m A)$. D'après le lemme 3.3, pour t assez grand, $\kappa_{\mathcal{V}}$ préserve $\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t$ et $1-\kappa_{\mathcal{V}}$ agit sur $(\mathcal{V}/z^m\mathcal{V})/(\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t)$ par un automorphisme. Donc pour t assez grand, $1 - {}^t\kappa_{\mathcal{V}}$ préserve $(\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t)^\perp$ et agit dessus par un automorphisme. Donc le morphisme de complexes (quotient par $(\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t)^\perp \stackrel{1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}}}{\rightarrow} (\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t)^\perp$)

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}, A/z^m A) & \stackrel{1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}}}{\rightarrow} & \mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}, A/z^m A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{A/z^m A}(\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t, A/z^m A) & \stackrel{1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}}}{\rightarrow} & \mathrm{Hom}_{A/z^m A}(\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t, A/z^m A) \end{array} \qquad (3)$$

est un quasi-isomorphisme On note que le complexe du bas est un complexe parfait de $A/z^m A$-modules.

Lemme 3.4 *Le complexe de A-modules* $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}, A) \stackrel{1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}}}{\rightarrow} \mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}, A)$ *est quasi-isomorphe à un complexe parfait et*

$$\dim(\mathrm{Ker}\,(1 - {}^t\kappa_{\mathcal{V}}) \otimes_A F) = \dim(\mathrm{Coker}\,(1 - {}^t\kappa_{\mathcal{V}}) \otimes_A F).$$

Démonstration. Soit t assez grand pour que $\mathcal{V}_t$ soit un A-sous-module facteur direct dans $\mathcal{V}$ et que $1 - {}^t\kappa_{\mathcal{V}}$ préserve $(\mathcal{V}_t/z\mathcal{V}_t)^\perp$ et agisse dessus par un automorphisme. On choisit un supplémentaire de $\mathcal{V}_t$ dans $\mathcal{V}$, d'où une inclusion $i : \mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}_t, A) \to \mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}, A)$ qui donne lieu à une décomposition en somme directe

$$\mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}, A) = i(\mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}_t, A)) \oplus \mathcal{V}_t^\perp.$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix} \quad \text{de} \quad 1 - {}^t\kappa_{\mathcal{V}}$$

est telle que $B_{2,2} \mod z$ est un automorphisme de $\mathcal{V}_t^\perp/z\mathcal{V}_t^\perp$ et donc $B_{2,2}$ est un automorphisme de $\mathcal{V}_t^\perp$ (car $\mathcal{V}_t^\perp = \mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}/\mathcal{V}_t, A)$ est complet pour la topologie z-adique). Donc le complexe

$$\mathcal{V}_t^\perp \stackrel{1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}}}{\rightarrow} (1 - {}^t\kappa_{\mathcal{V}})\mathcal{V}_t^\perp$$

est exact. Le quotient par ce complexe exact induit un quasi-isomorphisme

$$\text{de} \qquad \mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}, A) \overset{1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}}}{\to} \mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}, A)$$

$$\text{dans} \qquad \mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}, A)/\mathcal{V}_t^\perp \overset{1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}}}{\to} \mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}, A)/(1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}})\mathcal{V}_t^\perp.$$

Le premier terme de ce complexe s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}_t, A)$. Comme $B_{2,2}$ est inversible, on a

$$\mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}, A) = i(\mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}_t, A)) \oplus (1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}})\mathcal{V}_t^\perp$$

ce qui identifie le second terme à $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}_t, A)$ et le complexe tout entier à

$$\mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}_t, A) \overset{B_{1,1}-B_{1,2}B_{2,2}^{-1}B_{2,1}}{\to} \mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}_t, A).$$

On a donc un quasi-isomorphisme explicite entre $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}, A) \overset{1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}}}{\to} \mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}, A)$ et un complexe formé de deux A-modules libres de type fini de même rang. On en déduit $\dim(\mathrm{Ker}\,(1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}}) \otimes_A F) = \dim(\mathrm{Coker}\,(1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}}) \otimes_A F)$. □

On note Δ le déterminant du complexe $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}, A) \overset{1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}}}{\to} \mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}, A)$, qui a un sens grâce au lemme 3.4.

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, le quasi-isomorphisme (3) fournit, pour t assez grand, une identification de A/z^mA-modules inversibles

$$\Delta \otimes_A A/z^mA \simeq \det(\mathrm{Hom}_{A/z^mA}(\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t, A/z^mA))$$

$$\otimes \det(\mathrm{Hom}_{A/z^mA}(\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t, A/z^mA))^{-1} \simeq A/z^mA.$$

Le lemme 3.3 montre que cette identification est indépendante de t, pour t assez grand. Les identifications obtenues pour différentes valeurs de m sont compatibles (prendre le même entier t assez grand pour les comparer). Donc ces identifications fournissent un isomorphisme de A-modules inversibles $\Delta \simeq A$.

Définition 3.5 *On note $z(Y, (\mathcal{M}, u)) \in \Delta$ l'image inverse de 1 par cet isomorphisme.*

D'après le lemme 3.4, le noyau et le conoyau de $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}, A) \overset{1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}}}{\to} \mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}, A)$ sont des A-modules de type fini. Faisons l'hypothèse
(H) *la composée* $\mathrm{Ker}\,(1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}}) \to \mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}, A) \to \mathrm{Coker}\,(1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}})$ *induit un isomorphisme* $\mathrm{Ker}\,(1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}}) \otimes_A F \to \mathrm{Coker}\,(1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}}) \otimes_A F$.

On note

$$\lambda : \Delta \otimes_A F \simeq \det(\mathrm{Ker}\,(1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}}) \otimes_A F) \otimes \det(\mathrm{Coker}\,(1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}}) \otimes_A F)^{-1} \simeq F$$

l'identification qui en résulte.

La proposition 3.6 ci-dessous est une variante du lemme 3.5.8 de [Kat93]. Pour l'énoncer on a besoin des notions suivantes. On note $A\langle\langle T\rangle\rangle$ l'anneau de Tate, formé des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n T^n$ avec $a_n \in A$ tendant vers 0 pour la topologie z-adique quand n tend vers l'infini. La valeur spéciale $F^*(1)$ d'un élément $F(T) \in 1 + TA\langle\langle T\rangle\rangle$ est définie comme $G(1)$ où G est l'unique élément de l'anneau de Tate tel que $F(T) = (1-T)^r G(T)$ pour un certain entier r et $G(1) \neq 0$. Un tel entier r existe, car si $(1-T)^r$ divise $F(T)$, il divise aussi sa réduction modulo z, qui est un polynôme dans $1 + Tk[[T]]$, donc il existe un plus grand entier r tel que $F(T) = (1-T)^r G(T)$ avec G dans l'anneau de Tate, et alors $G(1) \neq 0$. On dit que r est l'ordre d'annulation de $F(T)$ en $T = 1$.

D'après le a) de la proposition 3.2, $L(Y, (\mathcal{M}, u), T)$ appartient à $1 + TA\langle\langle T\rangle\rangle$.

Proposition 3.6 *L'ordre d'annulation de $L(Y, (\mathcal{M}, u), T)$ en $T = 1$ est*

$$\dim(\mathrm{Ker}\,(1 - {}^t\kappa_{\mathcal{V}}) \otimes_A F) = \dim(\mathrm{Coker}\,(1 - {}^t\kappa_{\mathcal{V}}) \otimes_A F)$$

et $L^*(Y, (\mathcal{M}, u), 1) = \lambda(z(Y, (\mathcal{M}, u)))$.

Démonstration. La preuve de la proposition 3.6 occupe le reste de ce paragraphe. L'identification $\lambda : \Delta \otimes_A F \simeq F$ provient en fait d'un morphisme $\lambda : \Delta \to A$ défini comme suit. On a

$$\Delta = \det(\mathrm{Ker}\,(1 - {}^t\kappa_{\mathcal{V}})) \otimes \det(\mathrm{Coker}\,(1 - {}^t\kappa_{\mathcal{V}}))^{-1}$$

et le morphisme composé

$$\mathrm{Ker}\,(1 - {}^t\kappa_{\mathcal{V}}) \to \mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}, A) \to \mathrm{Coker}\,(1 - {}^t\kappa_{\mathcal{V}})$$

est injectif par l'hypothèse (H). De plus son conoyau est fini donc par le lemme suivant il donne un morphisme $\lambda : \Delta \to A$.

Lemme 3.7 *Soit C un objet de $D^{par}(A)$ quasi-isomorphe à un complexe $P \xrightarrow{\theta} Q$ (en degrés 0 et 1) où P et Q sont des A-modules libres de type fini de même rang et θ est injectif. Pour tout quasi-isomorphisme entre C et un complexe $P \xrightarrow{\theta} Q$ comme précédemment,* $\det(\theta) : \det(P) \to \det(Q)$ *donne un morphisme* $\det(C) \to A$. *Ce morphisme est non nul et ne dépend que de C.*

Démonstration. En effet $C \otimes_A F$ est exact, d'où une trivialisation $\det(C) \otimes_A F \simeq F$ qui ne dépend que de C et est le produit tensoriel par F du morphisme $\det(C) \to A$ considéré dans le lemme. □

Soit r le rang du A-module libre $\mathrm{Ker}\,(1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}})$. Il s'agit de montrer que $L(Y,(\mathcal{M},u),T)=(1-T)^rG(T)$ avec $G(T)\in 1+TA\langle\langle T\rangle\rangle$ et que $G(1)=\lambda(z(Y,(\mathcal{M},u)))$. En effet cela suffit pour conclure car $\lambda(z(Y,(\mathcal{M},u)))\in A$ est non nul (puisque λ induit un isomorphisme $\Delta\otimes_A F\simeq F$) donc r est bien l'ordre d'annulation et $G(1)$ la valeur spéciale $L^*(Y,(\mathcal{M},u),1)$.

Il reste donc à montrer que pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, l'image de $G(T)=L(Y,(\mathcal{M},u),T)(1-T)^{-r}\in 1+TA[[T]]$ dans $1+T(A/z^mA)[[T]]$ est un polynôme dont la valeur en 1 est $\big(\lambda(z(Y,(\mathcal{M},u)))\mod z^m\big)\in A/z^mA$.

Soit donc $m\in\mathbb{N}^*$. Soit t assez grand. On rappelle, d'après la preuve du lemme 3.4, que le quotient par le complexe exact

$$\mathcal{V}_t^{\perp}\overset{1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}}}{\longrightarrow}(1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}})\mathcal{V}_t^{\perp}$$

induit un quasi-isomorphisme de

$$\mathrm{Hom}_A(\mathcal{V},A)\overset{1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}}}{\longrightarrow}\mathrm{Hom}_A(\mathcal{V},A)\quad\text{dans}\quad\mathcal{U}_0\overset{1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}}}{\longrightarrow}\mathcal{U}_1$$

où pour raccourcir les formules on a posé

$$\mathcal{U}_0=\mathrm{Hom}_A(\mathcal{V},A)/\mathcal{V}_t^{\perp}\quad\text{et}\quad\mathcal{U}_1=\mathrm{Hom}_A(\mathcal{V},A)/(1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}})\mathcal{V}_t^{\perp}.$$

Le quasi-isomorphisme précédent fournit un isomorphisme

$$\Delta\overset{\alpha_1}{\to}\det_A(\mathcal{U}_0)\otimes\det_A(\mathcal{U}_1)^{-1}.$$

Comme $K=\mathrm{Ker}\,(1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}})$ est de type fini et vérifie

$$K=(K\otimes_A F)\cap\mathrm{Hom}_A(\mathcal{V},A),$$

K est sous-A-module libre de type fini facteur direct de $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{V},A)$. Comme la restriction de $1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}}$ à $\mathcal{V}_t^{\perp}$ est injective, on a $K=\mathrm{Ker}(1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}}:\mathcal{U}_0\to\mathcal{U}_1)$ donc la composée $K\to\mathrm{Hom}_A(\mathcal{V},A)\to\mathcal{U}_0$ est injective et d'image facteur direct. Comme $\mathcal{V}_t^{\perp}$ et $(1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}})\mathcal{V}_t^{\perp}$ coïncident modulo z^m (dans $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{V},A/z^mA)$), la composée $K\to\mathrm{Hom}_A(\mathcal{V},A)\to\mathcal{U}_1$ coïncide avec la composée $K\to\mathrm{Hom}_A(\mathcal{V},A)\to\mathcal{U}_0$ modulo z^m, donc sa réduction modulo z^m est injective et d'image facteur direct donc elle-même est injective et d'image facteur direct. D'où un isomorphisme

$$\det_A(\mathcal{U}_0)\otimes\det_A(\mathcal{U}_1)^{-1}\overset{\alpha_2}{\to}\det_A(\mathcal{U}_0/K)\otimes\det_A(\mathcal{U}_1/K)^{-1}.$$

Enfin $1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}}:\mathcal{U}_0/K\to\mathcal{U}_1/K$ est un morphisme entre deux A-modules libres de même rang, qui est injectif à cause de l'hypothèse (H). Son déterminant appartient à $\det_A(\mathcal{U}_1/K)\otimes\det_A(\mathcal{U}_0/K)^{-1}$, et donne un morphisme

$$\det_A(\mathcal{U}_0/K)\otimes\det_A(\mathcal{U}_1/K)^{-1}\overset{\alpha_3}{\to}A.$$

Lemme 3.8 *On a égalité entre* $\lambda : \Delta \to A$ *et la composée des morphismes* $\Delta \overset{\alpha_1}{\to} \det_A(\mathcal{U}_0) \otimes \det_A(\mathcal{U}_1)^{-1} \overset{\alpha_2}{\to} \det_A(\mathcal{U}_0/K) \otimes \det_A(\mathcal{U}_1/K)^{-1} \overset{\alpha_3}{\to} A$.

Démonstration. La démonstration de ce lemme ressemble à la preuve du lemme z.4 du paragraphe 5 de [Tat95]. On peut décrire la composée $\alpha_3 \circ \alpha_2 : \det_A(\mathcal{U}_0) \otimes \det_A(\mathcal{U}_1)^{-1} \to A$ apparaissant dans le lemme 3.8 d'une autre façon. On a $\det_A(\mathcal{U}_0) \simeq \det_A(\mathcal{U}_0/K) \otimes \det(K)$ à cause de la suite exacte $0 \to K \to \mathcal{U}_0 \to \mathcal{U}_0/K \to 0$, l'application $(x, y) \mapsto (1 - {}^t\kappa_{\mathcal{V}})(x) + y$ de $\mathcal{U}_0/K \oplus K$ dans $\mathcal{U}_1$ est injective et de conoyau fini et le lemme 3.7 appliqué à ce complexe $\mathcal{U}_0/K \oplus K \to \mathcal{U}_1$ redonne $\alpha_3 \circ \alpha_2$. Mais comme $\mathcal{U}_0/K \overset{1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}}}{\to} \mathcal{U}_1$ est injective, le complexe $\mathcal{U}_0/K \oplus K \to \mathcal{U}_1$ est quasi-isomorphe à $K \to \mathrm{Coker}\,(1 - {}^t\kappa_{\mathcal{V}})$, et le lemme 3.7 appliqué à ce complexe redonne $\lambda : \Delta \to A$, ce qui termine la démonstration du lemme 3.8. $\square$

On a $\mathcal{U}_0/z^m\mathcal{U}_0 \simeq \mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}_t, A/z^mA)$ et $\mathcal{U}_1/z^m\mathcal{U}_1 \simeq \mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}_t, A/z^mA)$. La réduction modulo z^m de α_1 est donc un isomorphisme

$$\Delta \otimes_A A/z^mA \overset{\alpha_1}{\to} \det(\mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}_t, A/z^mA)) \otimes \det(\mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}_t, A/z^mA))^{-1} = A/z^mA.$$

On vérifie facilement que l'image de $z(Y, (\mathcal{M}, u))$ est 1. De même la réduction modulo z^m de $\alpha_2 \circ \alpha_1(z(Y, (\mathcal{M}, u)))$ vient de la composée des isomorphismes

$$(\mathcal{U}_0/K)/z^m(\mathcal{U}_0/K) \simeq \mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}_t, A/z^mA)/(K/z^mK) \simeq (\mathcal{U}_1/K)/z^m(\mathcal{U}_1/K).$$

Il est alors clair que la réduction modulo z^m de $\alpha_3 \circ \alpha_2 \circ \alpha_1(z(Y, (\mathcal{M}, u)))$ est $\det(1 - {}^t\kappa_{\mathcal{V}}|_{\mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}_t, A/z^mA)/(K/z^mK)})$. Mais ce déterminant est égal à $G(1)$, car $G(T) = \det_{A/z^mA}(1 - T^t\kappa_{\mathcal{V}}|_{\mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}_t, A/z^mA)/(K/z^mK)})$. En effet par b) de la proposition 3.2 on a

$$\begin{aligned}\big(L(Y, (\mathcal{M}, u), T) \mod z^m\big) &= \det_{A/z^mA}(1 - T\kappa_{\mathcal{V}}|_{\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t}) \\ &= \det_{A/z^mA}(1 - T^t\kappa_{\mathcal{V}}|_{\mathrm{Hom}_A(\mathcal{V}_t, A/z^mA)}),\end{aligned}$$

et $\det_{A/z^mA}(1 - T^t\kappa_{\mathcal{V}}|_{K/z^mK}) = (1 - T)^r$. $\square$

4 Un petit peu de théorie de Fontaine en égales caractéristiques

Dans ce paragraphe on prend de nouveau $A = k[[z]]$, où k est une extension finie de $\mathbb{F}_q$. On notera $F = A[\frac{1}{z}]$ le corps des fractions de A. Soit K un corps local non archimédien contenant $\mathbb{F}_q$ (donc de caractéristique p), dont on note k_K le corps résiduel (qui est une extension finie de $\mathbb{F}_q$), $\mathcal{O}_K$

l'anneau des entiers, et π_K une uniformisante. On a donc un isomorphisme $\mathcal{O}_K = k_K[[\pi_K]]$. On note $A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K = (k\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K)[[z]] = (k \otimes k_K)[[z, \pi_K]]$ le produit tensoriel complété qui est un produit fini d'anneaux factoriels, permutés circulairement par $1 \otimes \mathrm{Fr}$. On rappelle que pour tout $A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$-module $\mathcal{M}$, ${}^\tau\mathcal{M}$ désigne $\mathcal{M} \otimes_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K, 1\otimes\mathrm{Fr}} A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$. On note $\tau : \mathcal{M} \to {}^\tau\mathcal{M}$ l'application $1 \otimes \mathrm{Fr}$-linéaire qui à x associe $x \otimes 1$.

Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ des $A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$-modules libres de rang fini et

$$\mathcal{M} \xrightarrow{i} \mathcal{M}' \xleftarrow{j} {}^\tau\mathcal{M}$$

des morphismes qui sont des isomorphismes aux points génériques. On note $Z(\det(i))$ et $Z(\det(j))$ le lieu des zéros de $\det(i)$ et $\det(j)$.

On note $H^i(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K, (\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j))$ les groupes d'extension de $(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K, A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K, \mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ par $(\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j)$ dans la catégorie abélienne A-linéaire des quadruplets $(\mathcal{N}, \mathcal{N}', \tilde{i}, \tilde{j})$, où $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ sont des $A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$ modules et $\tilde{i} : \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$ et $\tilde{j} : {}^\tau\mathcal{N} \to \mathcal{N}'$ des morphismes. Calculons d'abord $H^1(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K, (\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j))$. Etant donné une extension $(\mathcal{N}, \mathcal{N}', \tilde{i}, \tilde{j})$ de $(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K, A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K, \mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ par $(\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j)$, on peut trivialiser $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ comme extensions de $A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$-modules, c'est-à-dire choisir des isomorphismes $\mathcal{N} = \mathcal{M} \oplus A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K, \mathcal{N}' = \mathcal{M}' \oplus A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$ et alors $\tilde{i} = \begin{pmatrix} i & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\tilde{j} = \begin{pmatrix} j & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc la donnée de $\tilde{i}$ et $\tilde{j}$ équivaut à celle de deux éléments x et y de $\mathcal{M}'$. Si on change les trivialisations de $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ en les multipliant à droite par des automorphismes de $\mathcal{M} \oplus A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$ et $\mathcal{M}' \oplus A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$ de matrices $\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $u \in \mathcal{M}$ et $v \in \mathcal{M}'$, x et y sont remplacés par $x - i(u) + v$ et $y - j({}^\tau u) + v$.

Il est donc clair que l'on a une suite exacte longue de A-modules :

$$0 \to H^0(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K, (\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j)) \to \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}' \xrightarrow{\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -j\tau & 1 \end{pmatrix}}$$
$$\mathcal{M}' \oplus \mathcal{M}' \to H^1(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K, (\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j)) \to 0$$

d'où une suite exacte longue de A-modules

$$0 \to H^0(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K, (\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j)) \to \mathcal{M} \xrightarrow{i-j\tau} \mathcal{M}' \to$$
$$H^1(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K, (\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j)) \to 0.$$

Dans cette dernière suite exacte longue, à un élément $y \in \mathcal{M}'$ la dernière flèche associe l'extension $(\mathcal{N}, \mathcal{N}', \tilde{i}, \tilde{j})$, où

$$\mathcal{N} = \mathcal{M} \oplus A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K, \mathcal{N}' = \mathcal{M}' \oplus A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K, \tilde{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{j} = \begin{pmatrix} j & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Justifions maintenant le fait que $H^i(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K,(\mathcal{M},\mathcal{M}',i,j)) = 0$ pour $i \neq 0,1$. Dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \xrightarrow{0} & \mathcal{O} & \xleftarrow{0} & 0 \\
\downarrow 0 & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} & & \downarrow 0 \\
& \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \\
\mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{O}\oplus\mathcal{O} & \longleftarrow & \mathcal{O} \\
\downarrow 1 & & \downarrow (1,1) & & \downarrow 1 \\
\mathcal{O} & \xrightarrow{1} & \mathcal{O} & \xleftarrow{1} & \mathcal{O}
\end{array}$$

les lignes sont des objets de la catégorie abélienne des quadruplets $(\mathcal{N},\mathcal{N}',\tilde{i},\tilde{j})$, les deux premières lignes sont des objets projectifs de cette catégorie qui représentent les foncteurs $(\mathcal{N},\mathcal{N}',\tilde{i},\tilde{j}) \mapsto \mathcal{N}'$ et $(\mathcal{N},\mathcal{N}',\tilde{i},\tilde{j}) \mapsto \mathcal{N}$ et les flèches verticales sont des morphismes dans cette catégorie qui forment une suite exacte courte. De plus le morphisme donné par les flèches verticales du haut représente le morphisme de foncteurs $\mathcal{N} \overset{i-j\tau}{\to} \mathcal{N}'$. On en déduit que $H^\bullet(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K,(\mathcal{M},\mathcal{M}',i,j))$ est bien la cohomologie du complexe $\mathcal{M} \overset{i-j\tau}{\to} \mathcal{M}'$.

Lorsque i est un isomorphisme, tout est simple, comme le montre le lemme suivant, qui justifie dans ce cas particulier tout ce que nous allons faire dans le reste de ce paragraphe.

Lemme 4.1 *Supposons que i est un isomorphisme. Alors*

$$\pi_K\mathcal{M} \overset{i-j\tau}{\to} \pi_K\mathcal{M}'$$

est un isomorphisme, et donc la réduction modulo π_K,

$$\textit{du complexe } \mathcal{M} \overset{i-j\tau}{\to} \mathcal{M}' \textit{ dans le complexe } \mathcal{M}/\pi_K\mathcal{M} \overset{i-j\tau}{\to} \mathcal{M}'/\pi_K\mathcal{M}',$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration. Le lemme résulte simplement du fait que pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, $i : \pi_K^t\mathcal{M} \to \pi_K^t\mathcal{M}'$ est un isomorphisme, alors que $j\tau$ envoie $\pi_K^t\mathcal{M}$ dans $\pi_K^{qt}\mathcal{M}'$. $\square$

Lorsque i est un isomorphisme on a donc une suite exacte

$$0 \to H^0(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K,(\mathcal{M},\mathcal{M}',i,j)) \to \mathcal{M}/\pi_K\mathcal{M} \overset{i-j\tau}{\to} \mathcal{M}'/\pi_K\mathcal{M}' \to$$

$$H^1(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K,(\mathcal{M},\mathcal{M}',i,j)) \to 0$$

d'où une identification

$$\det(H^\bullet(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K,(\mathcal{M},\mathcal{M}',i,j)))^{-1}\simeq\det(\mathcal{M}/\pi_K\mathcal{M})^{-1}\otimes\det(\mathcal{M}'/\pi_K\mathcal{M}')\simeq A \quad (4)$$

où la deuxième identification vient de l'isomorphisme $i:\mathcal{M}/\pi_K\mathcal{M}\to\mathcal{M}'/\pi_K\mathcal{M}'$.

Revenons maintenant au cas général.

Lemme 4.2 *Supposons que les hypersurfaces* $Z(\det(i))$ *et* $z=0$ *de* $\operatorname{Spec}(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K)$ *n'ont pas de composante irréductible commune. Alors*

a) le $A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$*-module* $\operatorname{Coker} i=\mathcal{M}'/i(\mathcal{M})$ *est un* A*-module libre de type fini,*

b) pour $t\in\mathbb{N}$ *assez grand,* $i-j\tau:\pi_K^t\mathcal{M}\to\pi_K^t\mathcal{M}'$ *est injectif et son conoyau est un* A*-module libre de type fini de même rang que* $\operatorname{Coker} i$*,*

c) $H^0(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K,(\mathcal{M},\mathcal{M}',i,j))$ *est un* A*-module libre de type fini et* $H^1(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K,(\mathcal{M},\mathcal{M}',i,j))$ *est un* A*-module de type fini et*

$$\dim_F(H^1(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K,(\mathcal{M},\mathcal{M}',i,j))\otimes_A F)$$
$$-\operatorname{rang}_A(H^0(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K,(\mathcal{M},\mathcal{M}',i,j)))=\operatorname{rang}_A(\operatorname{Coker} i).$$

Démonstration. Choisissons des bases de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ et soit $f\in A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$ le déterminant de i dans ces bases. Ainsi $Z(\det(i))$ est le réduit de $f=0$. On fait donc l'hypothèse que les composantes de f dans les facteurs de $A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$ ne sont pas divisibles par z. Grâce à cette hypothèse, il existe $s\in\mathbb{N}$ et $i'\in\operatorname{Hom}_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K}(\mathcal{M}',\mathcal{M})$ tels que $i'i$ soit égal à $\pi_K^s\mathrm{Id}$ modulo $z\operatorname{End}_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K}(\mathcal{M})$ et ii' soit égal à $\pi_K^s\mathrm{Id}$ modulo $z\operatorname{End}_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K}(\mathcal{M}')$.

Montrons a). Comme $i'i:\mathcal{M}/z\mathcal{M}\to\mathcal{M}/z\mathcal{M}$ est la multiplication par π_K^s, $i:\mathcal{M}/z\mathcal{M}\to\mathcal{M}'/z\mathcal{M}'$ est injectif et son conoyau est un k-espace vectoriel de dimension finie, dont on note d la dimension. Soient $x_1,\dots,x_d\in\mathcal{M}'$ relevant une base de ce conoyau. Alors $(i,x_1,\dots,x_d):\mathcal{M}\oplus A^d\to\mathcal{M}'$ est un isomorphisme modulo z, donc est un isomorphisme. On en déduit a).

Montrons b). Soit $t\in\mathbb{N}^*$ tel que $(q-1)t>s$. Alors

$$i'(i-j\tau):\pi_K^t(\mathcal{M}/z\mathcal{M})\to\pi_K^t(\mathcal{M}/z\mathcal{M})$$

est tel que pour tout $a\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathcal{M}/z\mathcal{M}$,

$$i'(i-j\tau)(\pi_K^{t+a}x)=\pi_K^{t+a+s}x \bmod \pi_K^{t+a+s+1}(\mathcal{M}/z\mathcal{M}).$$

On en déduit que

$$i'(i-j\tau):\pi_K^t(\mathcal{M}/z\mathcal{M})\to\pi_K^t(\mathcal{M}/z\mathcal{M})$$

est injectif et que son image est $\pi_K^{t+s}(\mathcal{M}/z\mathcal{M})$. Donc

$$\pi_K^s(i-j\tau) = ii'(i-j\tau) : \pi_K^t(\mathcal{M}/z\mathcal{M}) \to \pi_K^t(\mathcal{M}'/z\mathcal{M}')$$

est injectif et son image est $\pi_K^{t+s} i(\mathcal{M}/z\mathcal{M})$. Donc

$$i - j\tau : \pi_K^t(\mathcal{M}/z\mathcal{M}) \to \pi_K^t(\mathcal{M}'/z\mathcal{M}')$$

est injectif et son image est $\pi_K^t i(\mathcal{M}/z\mathcal{M})$ et donc son conoyau est un k-espace vectoriel de dimension d. Soient $x_1, \ldots, x_d \in \pi_K^t\mathcal{M}'$ relevant une base de ce conoyau. Alors $(i-j\tau, x_1, \ldots, x_d) : \pi_K^t\mathcal{M} \oplus A^d \to \pi_K^t\mathcal{M}'$ est un isomorphisme modulo z, donc est un isomorphisme. On en déduit b).

Enfin b) implique c) : on a la suite exacte

$$0 \to H^0(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K, (\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j)) \to \mathcal{M}/\pi_K^t\mathcal{M} \to \mathcal{M}'/(i-j\tau)(\pi_K^t\mathcal{M})$$

$$\to H^1(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K, (\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j)) \to 0,$$

$\mathcal{M}'/(i-j\tau)(\pi_K^t\mathcal{M})$ est une extension du A-module libre de type fini $\mathcal{M}'/\pi_K^t\mathcal{M}'$ par le conoyau de $i-j\tau : \pi_K^t\mathcal{M} \to \pi_K^t\mathcal{M}'$ et donc $H^\bullet(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K, (\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j))$ est la cohomologie d'un complexe de deux A-modules libres de type fini, dont la différence des rangs est le rang de $\operatorname{Coker} i$. Ceci termine la preuve du lemme 4.2. □

La preuve de a) et b) du lemme 4.2 montre aussi que

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $i : \mathcal{M}/z^n\mathcal{M} \to \mathcal{M}'/z^n\mathcal{M}'$ et
- pour t assez grand, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $i - j\tau : \pi_K^t(\mathcal{M}/z^n\mathcal{M}) \to \pi_K^t(\mathcal{M}'/z^n\mathcal{M}')$

sont injectifs et que leurs conoyaux sont des A/z^nA-modules libres dont le rang est le rang de $\operatorname{Coker} i$ sur A.

Le c) du lemme 4.2 donne un sens au A-module libre de rang 1

$$\det(H^\bullet(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K, (\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j)))^{-1} =$$

$$\det(H^0(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K, (\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j)))^{-1} \otimes \det(H^1(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K, (\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j))).$$

Nous allons nous inspirer de la preuve du lemme 4.2 pour construire un isomorphisme de A-modules libres de rang 1

$$\det(H^\bullet(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K, (\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j)))^{-1} \simeq \det(\operatorname{Coker} i).$$

Lemme 4.3 *On reprend les hypothèses du lemme 4.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in \mathbb{N}$ assez grand (en fonction de n)*

$$i - j\tau : \pi_K^t(\mathcal{M}/z^n\mathcal{M}) \to \pi_K^t(\mathcal{M}'/z^n\mathcal{M}')$$

est injectif et son image est égale à celle de l'application injective

$$i : \pi_K^t(\mathcal{M}/z^n\mathcal{M}) \to \pi_K^t(\mathcal{M}'/z^n\mathcal{M}')$$

donc ces applications ont le même conoyau C, qui est un A/z^nA-module libre de type fini.

Démonstration. On remarque d'abord que l'injectivité des applications i et $i - j\tau$ de $\pi_K^t(\mathcal{M}/z^n\mathcal{M})$ dans $\pi_K^t(\mathcal{M}'/z^n\mathcal{M}')$ a déjà été établie dans la preuve du lemme 4.2, sous l'hypothèse $(q-1)t > s$. Supposons maintenant $(q-1)t > ns$ et montrons que ces applications ont la même image. Comme ii' est $\pi_K^s\mathrm{Id}$ modulo z, pour tout $a \in \mathbb{N}$, l'image de $\pi_K^{t+a}(\mathcal{M}'/z^n\mathcal{M}')$ par ii' contient $\pi_K^{t+a+ns}(\mathcal{M}'/z^n\mathcal{M}')$ donc a fortiori on a

$$i(\pi_K^{t+a}(\mathcal{M}/z^n\mathcal{M})) \supset \pi_K^{t+a+ns}(\mathcal{M}'/z^n\mathcal{M}').$$

Or pour tout $a \in \mathbb{N}$,

$$j\tau(\pi_K^{t+a}(\mathcal{M}/z^n\mathcal{M})) \subset \pi_K^{qt+qa}(\mathcal{M}'/z^n\mathcal{M}') \subset \pi_K^{t+a+ns+1}(\mathcal{M}'/z^n\mathcal{M}').$$

Donc $i^{-1}j\tau : \pi_K^t(\mathcal{M}/z^n\mathcal{M}) \to \pi_K^t(\mathcal{M}/z^n\mathcal{M})$ est bien défini et pour tout $a \in \mathbb{N}$ il envoie $\pi_K^{t+a}(\mathcal{M}/z^n\mathcal{M})$ dans $\pi_K^{t+a+1}(\mathcal{M}'/z^n\mathcal{M}')$. Donc

$$1 - i^{-1}j\tau : \pi_K^t(\mathcal{M}/z^n\mathcal{M}) \to \pi_K^t(\mathcal{M}/z^n\mathcal{M})$$

est inversible et i et $i - j\tau = i(1 - i^{-1}j\tau)$ ont la même image. $\square$

Soient n, t comme dans le lemme précédent. Le complexe

$$i - j\tau : (\mathcal{M}/z^n\mathcal{M}) \to (\mathcal{M}'/z^n\mathcal{M}')$$

est quasi-isomorphe au complexe parfait

$$(\mathcal{M}/z^n\mathcal{M} + \pi_K^t\mathcal{M}) \to \big(\mathcal{M}'/z^n\mathcal{M}'\big)/\big(i - j\tau\big)\big(\pi_K^t(\mathcal{M}/z^n\mathcal{M})\big)$$

dont le deuxième terme est une extension de $(\mathcal{M}'/z^n\mathcal{M}' + \pi_K^t\mathcal{M}')$ par C, d'où un isomorphisme de A/z^nA-modules libres de rang 1

$$\begin{aligned} \det(H^\bullet(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K, (\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j)))^{-1} \otimes_A (A/z^nA) \simeq \\ \det((\mathcal{M}/z^n\mathcal{M} + \pi_K^t\mathcal{M}))^{-1} \otimes \det((\mathcal{M}'/z^n\mathcal{M}' + \pi_K^t\mathcal{M}')) \otimes \det(C). \end{aligned} \tag{5}$$

Pour n, t comme dans le lemme précédent, le complexe

$$i : (\mathcal{M}/z^n\mathcal{M}) \to (\mathcal{M}'/z^n\mathcal{M}')$$

est quasi-isomorphe au complexe parfait

$$(\mathcal{M}/z^n\mathcal{M} + \pi_K^t\mathcal{M}) \to \big(\mathcal{M}'/z^n\mathcal{M}'\big)/i\big(\pi_K^t(\mathcal{M}/z^n\mathcal{M})\big)$$

dont le deuxième terme est une extension de $(\mathcal{M}'/z^n\mathcal{M}' + \pi_K^t\mathcal{M}')$ par C, d'où un isomorphisme de A/z^nA-modules libres de rang 1

$$\begin{aligned}\det(\operatorname{Coker} i) \otimes_A (A/z^nA) \simeq \det((\mathcal{M}/z^n\mathcal{M} + \pi_K^t\mathcal{M}))^{-1} \\ \otimes\det((\mathcal{M}'/z^n\mathcal{M}' + \pi_K^t\mathcal{M}')) \otimes \det(C).\end{aligned} \tag{6}$$

L'isomorphisme

$$\det(H^\bullet(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K, (\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j)))^{-1} \otimes_A (A/z^nA) \simeq \det(\operatorname{Coker} i) \otimes_A (A/z^nA) \tag{7}$$

qui résulte de (5) et (6) est indépendant de t (pour t assez grand comme dans le lemme 4.3) et quand n varie ces isomorphismes sont compatibles.

Définition 4.4 *On note*

$$\iota : \det(H^\bullet(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K, (\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j)))^{-1} \simeq \det(\operatorname{Coker} i)$$

l'isomorphisme de A-modules libres de rang 1 *dont la réduction modulo z^n est (7) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

Remarque. L'isomorphisme (7) se voit plus simplement de la manière suivante. Pour t assez grand, les complexes $R\Gamma(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K, (\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j))\otimes_A(A/z^nA)$ et $(\operatorname{Coker} i) \otimes_A (A/z^nA)$ (placé en degré 1) sont quasi-isomorphes aux complexes parfaits

$$(\mathcal{M}/z^n\mathcal{M} + \pi_K^t\mathcal{M}) \stackrel{i-j\tau}{\to} \big(\mathcal{M}'/z^n\mathcal{M}'\big)/i\big(\pi_K^t(\mathcal{M}/z^n\mathcal{M})\big)$$

$$\text{et} \quad (\mathcal{M}/z^n\mathcal{M} + \pi_K^t\mathcal{M}) \xrightarrow{i} \big(\mathcal{M}'/z^n\mathcal{M}'\big)/i\big(\pi_K^t(\mathcal{M}/z^n\mathcal{M})\big).$$

Donc $\det(H^\bullet(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K, (\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j)))^{-1}\otimes_A(A/z^nA)$ et $\det(\operatorname{Coker} i)\otimes_A(A/z^nA)$ sont tous deux isomorphes à

$$\det\nolimits_{A/z^nA}(\mathcal{M}/z^n\mathcal{M} + \pi_K^t\mathcal{M})^{-1} \otimes \det\nolimits_{A/z^nA}\big((\mathcal{M}'/z^n\mathcal{M}')/i(\pi_K^t(\mathcal{M}/z^n\mathcal{M}))\big)$$

et donc ils sont isomorphes entre eux.
Remarque. Lorsque i est un isomorphisme, l'identification de la définition 4.4 coïncide avec (4).

Supposons maintenant que $Z(\det(i))$ et $Z(\det(j))$ n'ont pas de composante irréductible commune avec l'hypersurface $\pi_K = 0$ de $\operatorname{Spec}(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K)$, c'est-à-dire que $(\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j)$ a bonne réduction. Alors $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}/\pi_K\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'_0 = \mathcal{M}'/\pi_K\mathcal{M}'$ sont des $A \otimes k_K$ modules libres, et on note $i_0 : \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}'_0$ et $j_0 : {}^\tau\mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}'_0$ les réductions de i et j, qui sont des isomorphismes après tensorisation par $F \otimes k_K = (k \otimes k_K)((z))$. On notera aussi $\tau : \mathcal{M}_0 \to {}^\tau\mathcal{M}_0$ l'application $1 \otimes \mathrm{Fr}$-linéaire évidente, et de même pour $\mathcal{M}'_0$.

Comme dans [GL08], on introduit l'anneau

$$\mathcal{C} \text{ contenant } A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K = (k \otimes k_K)[[z, \pi_K]],$$

formé des séries $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ avec $a_n \in (k \otimes k_K)[[\pi_K]]$, qui convergent sur le disque ouvert rigide de rayon 1 privé de l'origine, c'est-à-dire telles qu'il existe une fonction $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant $\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{p(n)}{n} = +\infty$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_{-n} soit divisible par $\pi_K^{p(n)}$ (le rôle de $p(n)$ est de minorer le minimum des valuations des composantes de a_{-n} lorsqu'on décompose $k \otimes k_K$ en un produit de corps finis). On a aussi

$$\mathcal{C} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}^*} \left((k \otimes k_K)[[z, \pi_K]][[\frac{\pi_K^{q^m}}{z}]][\frac{1}{z}]\right) \quad \text{dans} \quad (F \otimes k_K)[[\pi_K]].$$

Soit f comme précédemment, c'est-à-dire le déterminant de i dans des bases de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ (de sorte que $Z(\det(i))$ est le réduit de $f = 0$) et soit $f_0 \in A \otimes k_K$ la réduction de f modulo π_K. L'hypothèse que $Z(\det(i))$ n'a pas de composante irréductible commune avec $\pi_K = 0$ équivaut à dire que f_0 est inversible dans $F \otimes k_K$ (qui est un produit de corps). Grâce à l'inclusion $k_K \subset \mathcal{O}_K$ on peut voir f_0 comme un élément de $A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$. Dans l'anneau $\mathcal{C}$ on a l'élément particulier

$$\alpha = (\frac{f}{f_0})^\tau(\frac{f}{f_0})^{\tau^2}(\frac{f}{f_0})...$$

Lorsque $k = \mathbb{F}_q$ et f est une puissance de $z - \pi$ avec π est un élément non nul de $\pi_K\mathcal{O}_K$, le lemme suivant est essentiellement le lemme 6.4 de [GL08], à ceci près que nous notons ici Q l'application notée R^{-1} dans [GL08].

Lemme 4.5 *a) Il existe un unique morphisme Q de $\mathcal{C}[\frac{1}{\alpha}]$-modules congru à* Id *modulo π_K de $\mathcal{M}_0 \otimes_{A\otimes k_K} \mathcal{C}[\frac{1}{\alpha}]$ vers $\mathcal{M} \otimes_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K} \mathcal{C}[\frac{1}{\alpha}]$ tel que l'on ait*

$$(i^{-1}j \otimes 1)^\tau Q = Q(i_0^{-1}j_0 \otimes 1).$$

b) Il existe un unique morphisme Q' de $\mathcal{C}[\frac{1}{{}^\tau\alpha}]$-modules congru à Id *modulo π_K de $\mathcal{M}'_0 \otimes_{A\otimes k_K} \mathcal{C}[\frac{1}{{}^\tau\alpha}]$ vers $\mathcal{M}' \otimes_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K} \mathcal{C}[\frac{1}{{}^\tau\alpha}]$ tel que l'on ait*

$$(j^\tau i^{-1} \otimes 1)^\tau Q' = Q'(j_0{}^\tau i_0^{-1} \otimes 1).$$

c) On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{M}_0 \otimes_{A\otimes k_K} \mathcal{C}[\frac{1}{\alpha}] & \overset{i_0\otimes 1}{\rightarrow} & \mathcal{M}'_0 \otimes_{A\otimes k_K} \mathcal{C}[\frac{1}{\alpha}] & \overset{j_0\otimes 1}{\leftarrow} & {}^\tau\mathcal{M}_0 \otimes_{A\otimes k_K} \mathcal{C}[\frac{1}{\alpha}] & \dots \\ \downarrow Q & & \downarrow Q' & & \downarrow {}^\tau Q & \\ \mathcal{M} \otimes_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K} \mathcal{C}[\frac{1}{\alpha}] & \overset{i\otimes 1}{\rightarrow} & \mathcal{M}' \otimes_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K} \mathcal{C}[\frac{1}{\alpha}] & \overset{j\otimes 1}{\leftarrow} & {}^\tau\mathcal{M} \otimes_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K} \mathcal{C}[\frac{1}{\alpha}] & \dots \end{array}$$

L'énoncé du lemme a bien un sens car i est un isomorphisme après tensorisation par $A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K[\frac{1}{f}]$, et donc a fortiori après tensorisation par $\mathcal{C}[\frac{1}{\alpha}]$ et de même i_0 est un isomorphisme après tensorisation par $F \otimes k_K$, donc a fortiori après tensorisation par $\mathcal{C}[\frac{1}{\alpha}]$.

Démonstration. La démonstration de a) est la même que celle du lemme 6.4 de [GL08]. D'abord Q est unique, car si $\tilde{Q}$ est une autre solution, $\tilde{Q} - Q$ est congru à 0 modulo π_K, donc $\tilde{Q} - Q = (i^{-1}j \otimes 1)^\tau(\tilde{Q} - Q)(i_0^{-1}j_0 \otimes 1)^{-1}$ est congru à 0 modulo π_K^q, donc il est congru à 0 modulo $\pi_K^{q^2}$,..., donc il est nul. Pour montrer l'existence de Q, on fixe des bases de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ (d'où des bases de $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}'_0$ par réduction modulo π_K) et on note encore i, j, i_0, j_0 les matrices de i, j, i_0, j_0 dans ces bases. Par les formules de Cramer, on a $i^{-1} \in f^{-1}M_r(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K)$ et donc $i^{-1}j \in f^{-1}M_r(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K)$. De plus $i_0^{-1}j_0 \in GL_r(F\otimes k_K)$ est la réduction modulo π_K de $i^{-1}j$. Alors Q est la limite (pour la topologie π_K-adique dans $M_r((F \otimes k_K)[[\pi_K]])$) de la suite

$$q_n = (i^{-1}j)^\tau(i^{-1}j)\dots^{\tau^{n-1}}(i^{-1}j)^{\tau^{n-1}}(j_0^{-1}i_0)\dots^\tau(j_0^{-1}i_0)(j_0^{-1}i_0).$$

Cette limite existe puisque $q_{n+1} - q_n$ appartient à $\pi_K^{q^n}M_r((F \otimes k_K)[[\pi_K]])$.

Vérifions que R appartient à $\alpha^{-1}M_r(\mathcal{C})$.

Soient $C_1, C_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$j_0^{-1} \in z^{-C_1}M_r(A \otimes k_K) \text{ et } f_0^{-1} \in z^{-C_2}A \otimes k_K.$$

Alors q_n appartient à $z^{-C_1 n}f^{-1\tau}f^{-1}\dots^{\tau^{n-1}}f^{-1}M_r(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K)$, et

$$q_{n+1} - q_n \in \pi_K^{q^n}z^{-C_1(n+1)}f^{-1\tau}f^{-1}\dots^{\tau^n}f^{-1}M_r(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K)$$

$$\text{d'où } \ \alpha(q_{n+1} - q_n) \in \pi_K^{q^n}z^{-(C_1+C_2)(n+1)}({}^{\tau^{n+1}}\alpha)M_r(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K)$$

$$\subset \pi_K^{q^n}z^{-(C_1+C_2)(n+1)}M_r(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K) \otimes_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K} A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K[[\frac{\pi_K^{q^{n+1}}}{z^{C_2}}]]$$

puisque $\frac{f}{f_0} \in 1 + \frac{\pi_K}{z^{C_2}}A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$ implique $\alpha \in A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K[[\frac{\pi_K}{z^{C_2}}]]$.

Pour b) on repète la démonstration de a) avec le diagramme

$$\mathcal{M}' \overset{j}{\leftarrow} {}^\tau\mathcal{M} \overset{{}^\tau i}{\rightarrow} {}^\tau\mathcal{M}'$$

au lieu de $\mathcal{M} \xrightarrow{i} \mathcal{M}' \xleftarrow{j} {}^\tau\mathcal{M}$, ${}^\tau f$ au lieu de f et $j{}^\tau i^{-1}$ au lieu de $i^{-1}j$. On a

$$Q' = \lim_{n\mapsto\infty} j{}^\tau i^{-1} \ldots {}^{\tau^{n-1}}j{}^{\tau^n}i^{-1}{}^{\tau^n}i_0{}^{\tau^{n-1}}j_0^{-1} \ldots {}^\tau i_0 j_0^{-1}.$$

Enfin c) résulte des formules pour Q et Q' dans les démonstrations de a) et b). Ceci termine la preuve du lemme 4.5. $\square$

Supposons désormais que $Z(\det(j))$ n'a pas de composante irréductible commune avec l'hypersurface $\pi_K = 0$ et que $Z(\det(i))$ n'a pas de composante irréductible commune avec ses images inverses par les puissances de $\mathrm{Id} \times \mathrm{Fr}$. Cette hypothèse implique que $Z(\det(i))$ n'a aucune composante irréductible commune avec $z = 0$ et $\pi_K = 0$, et on est donc dans le cadre d'application des lemmes 4.2 et 4.5.

Soit $f \in A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$ égal, comme précédemment, au déterminant de i dans des bases de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$. Alors les composantes de f, ${}^\tau f$, ${}^{\tau^2}f$,... dans les facteurs de $A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$ sont premières entre eux deux à deux.

Par les formules de Cramer, $(\mathrm{Coker}\, i) \otimes_A F$ est un module (de type fini) sur la F-algèbre finie $(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K) \otimes_A F$, qu'on pourrait aussi noter $(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K)[\frac{1}{z}]$ (c'est une algèbre finie sur $(k \otimes k_K)((z))$, qui est un produit de corps, eux-mêmes extensions finies de F).

Lemme 4.6 *Le quotient $A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K \to A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K \to A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$ s'étend en un morphisme de F-algèbres $\mathcal{C}[\frac{1}{{}^\tau\alpha}] \to (A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K) \otimes_A F$.*

Démonstration. Il existe $s \in \mathbb{N}^*$ et $f' \in A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$ tels que $ff' = \pi_K^s \mod zA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$. Donc l'image de $\frac{\pi_K^s}{z}$ dans $(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K)\otimes_A F$ appartient à $(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K)$ et le quotient $A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K \to A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K \to A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$ s'étend en un morphisme

$$\mathcal{C} \to (A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K) \otimes_A F.$$

Il reste à montrer que l'image de ${}^\tau\alpha$ est inversible. Avec les notations de la preuve du lemme 4.5, on a ${}^{\tau^n}\alpha \in 1 + \frac{\pi_K^{q^n}}{z^{C_2}}A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K[[\frac{\pi_K^{q^n}}{z^{C_2}}]]$. Or si $q^n > sC_2$, l'image de $\frac{\pi_K^{q^n}}{z^{C_2}}$ dans $(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K) \otimes_A F$ appartient à $\pi_K(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K)$ et donc l'image de $1 + \frac{\pi_K^{q^n}}{z^{C_2}}A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K[[\frac{\pi_K^{q^n}}{z^{C_2}}]]$ dans $(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K)\otimes_A F$ est incluse dans $1+\pi_K(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K)$ et est donc formée d'éléments inversibles. Donc pour n assez grand l'image de ${}^{\tau^n}\alpha$ dans $(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K)\otimes_A F$ est inversible. Grâce à l'hypothèse que les composantes de $f, {}^\tau f, {}^{\tau^2}f, \ldots$ dans les facteurs de $A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$ sont premières entre eux deux à deux, les images de $\frac{{}^\tau f}{{}^\tau f_0}$, $\frac{{}^{\tau^2}f}{{}^{\tau^2}f_0}$,... dans $(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K)\otimes_A F$ sont inversibles. Donc l'image de ${}^\tau\alpha = \frac{{}^\tau f}{{}^\tau f_0} \ldots \frac{{}^{\tau^{n-1}}f}{{}^{\tau^{n-1}}f_0}{}^{\tau^n}\alpha$

dans $(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K)\otimes_A F$ est inversible. Ceci termine la démonstration du lemme 4.6. $\square$

On en déduit un morphisme de F-espaces vectoriels

$$(\mathcal{M}'\otimes_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K}\mathcal{C}[\frac{1}{\tau_\alpha}])/i(\mathcal{M}\otimes_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K}\mathcal{C}[\frac{1}{\tau_\alpha}])\to(\operatorname{Coker} i)\otimes_A F. \tag{8}$$

En fait on doit pouvoir montrer, en adaptant la preuve du lemme 2.3 a) de [GL08], que les morphismes

$$\mathcal{C}/f\mathcal{C}\to\mathcal{C}[\frac{1}{\tau_\alpha}]/f\mathcal{C}[\frac{1}{\tau_\alpha}]\to(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K)\otimes_A F$$

sont des isomorphismes et que le morphisme de (8) est un isomorphisme, mais nous n'en avons pas besoin.

On note $\delta:\mathcal{M}_0\otimes_A F\to(\operatorname{Coker} i)\otimes_A F$ la composée de l'isomorphisme $i_0:\mathcal{M}_0\otimes_A F\to\mathcal{M}'_0\otimes_A F$, de l'inclusion de $\mathcal{M}'_0\otimes_A F$ dans $\mathcal{M}'_0\otimes_{A\otimes k_K}\mathcal{C}[\frac{1}{\tau_\alpha}]$, de Q' (construit dans le lemme 4.5) et de la projection de $\mathcal{M}'\otimes_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K}\mathcal{C}[\frac{1}{\tau_\alpha}]$ dans $(\operatorname{Coker} i)\otimes_A F$ qui figure dans (8).

La proposition suivante est l'analogue en égales caractéristiques de la suite exacte habituelle pour H^0 et H^1_f en théorie de Fontaine (voir le corollaire 3.8.4 de [BK90]). On définit

$$\begin{array}{rcccc}\gamma: & \mathcal{M}_0\otimes_A F & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{M}_0\otimes_A F & \oplus & (\operatorname{Coker} i)\otimes_A F\\ & x_0 & \mapsto & (x_0-i_0^{-1}j_0\tau(x_0) & , & \delta(x_0)).\end{array}$$

Proposition 4.7 *On suppose que $Z(\det(j))$ n'a pas de composante irréductible commune avec l'hypersurface $\pi_K=0$ et que $Z(\det(i))$ n'a pas de composante irréductible commune avec ses images inverses par les puissances de* $\mathrm{Id}\times\mathrm{Fr}$.

Alors on a une suite exacte de F-espaces vectoriels de dimension finie :

$$0\to H^0(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K,(\mathcal{M},\mathcal{M}',i,j))\otimes_A F\to\mathcal{M}_0\otimes_A F\xrightarrow{\gamma}\mathcal{M}_0\otimes_A F\oplus(\operatorname{Coker} i)\otimes_A F$$

$$\to H^1(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K,(\mathcal{M},\mathcal{M}',i,j))\otimes_A F\to 0.$$

Démonstration. Comme $i_0:\mathcal{M}_0\otimes_A F\to\mathcal{M}'_0\otimes_A F$ est un isomorphisme, le complexe $\mathcal{M}_0\otimes_A F\xrightarrow{\gamma}\mathcal{M}_0\otimes_A F\oplus(\operatorname{Coker} i)\otimes_A F$ est isomorphe au complexe

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_0\otimes_A F & \to & \mathcal{M}'_0\otimes_A F\oplus(\operatorname{Coker} i)\otimes_A F\\ x_0 & \mapsto & (i_0x_0-j_0\tau(x_0),\delta(x_0)).\end{array}$$

Il s'agit donc de construire un quasi-isomorphisme (ρ_1, ρ_2) entre les complexes de F-espaces vectoriels suivants

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} \otimes_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K} A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K[\frac{1}{z}] & \overset{i-j\tau}{\to} & \mathcal{M}' \otimes_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K} A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K[\frac{1}{z}] \\ \downarrow \rho_1 & & \downarrow \rho_2 \\ \mathcal{M}_0 \otimes_A F & \to & \mathcal{M}'_0 \otimes_A F \oplus (\operatorname{Coker} i) \otimes_A F \\ x_0 & \mapsto & (i_0 x_0 - j_0\tau(x_0), \delta(x_0)). \end{array}$$

On définit ρ_1 comme la réduction modulo π_K et

$$\text{pour} \quad y \in \mathcal{M}' \otimes_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K} A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K[\frac{1}{z}], \quad \rho_2(y) = (y \bmod \pi_K, -\epsilon(y))$$

où $\epsilon : \mathcal{M}' \otimes_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K} A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K[\frac{1}{z}] \to (\operatorname{Coker} i) \otimes_A F$ est l'extension par F-linéarité du morphisme A-linéaire $\epsilon : \mathcal{M}' \to (\operatorname{Coker} i) \otimes_A F$ défini comme suit. A $y \in \mathcal{M}'$ on associe $(\mathcal{N}, \mathcal{N}', \tilde{i}, \tilde{j})$ extension de $(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K, A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K, \mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ par $(\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j)$, donnée par

$$\mathcal{N} = \mathcal{M} \oplus A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K, \mathcal{N}' = \mathcal{M}' \oplus A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K, \tilde{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{j} = \begin{pmatrix} j & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soient $\tilde{Q}$, $\tilde{Q}'$ et $\tilde{\delta}$ associés à $(\mathcal{N}, \mathcal{N}', \tilde{i}, \tilde{j})$ comme Q, Q', δ sont associés à $(\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j)$ par le lemme 4.5 et la construction qui précède l'énoncé de la proposition 4.7. L'égalité $\mathcal{N} = \mathcal{M} \oplus A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$ induit par réduction modulo π_K une égalité $\mathcal{N}_0 = \mathcal{M}_0 \oplus A \otimes k_K$, d'où une égalité de $F \otimes k_K$-modules $\mathcal{N}_0 \otimes_A F = \mathcal{M}_0 \otimes_A F \oplus F \otimes k_K$. On note $a \in \mathcal{N}_0 \otimes_A F$ l'élément correspondant à $(0,1) \in \mathcal{M}_0 \otimes_A F \oplus F \otimes k_K$. On pose alors $\epsilon(y) = \tilde{\delta}(a)$ dans $(\operatorname{Coker} \tilde{i}) \otimes_A F = (\operatorname{Coker} i) \otimes_A F$.

Montrons que le diagramme est commutatif. Soit $x \in \mathcal{M}$, $x_0 \in \mathcal{M}_0$ sa réduction modulo π_K et changeons l'isomorphisme $\mathcal{N} = \mathcal{M} \oplus A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$ par $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, l'isomorphisme $\mathcal{N}' = \mathcal{M}' \oplus A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$ par $\begin{pmatrix} 1 & i(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, gardons $\tilde{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et remplaçons $\tilde{j}$ par $\begin{pmatrix} j & y + (i - j\tau)(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $a = (0,1)$ est remplacé (dans l'ancienne trivilisation de $\mathcal{N}_0 \otimes_A F$) par $(-x_0, 1)$ et $\tilde{\delta}(a)$ est donc remplacé par $\tilde{\delta}(a) - \delta(x_0)$, tandis que la réduction $y_0 \in \mathcal{M}'_0$ de y modulo π_K est remplacée par $y_0 + (i_0 - j_0\tau)(x_0)$.

Il nous reste donc à montrer l'exactitude du complexe

$$0 \to \pi_K \mathcal{M} \otimes_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K} A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K[\frac{1}{z}] \overset{i-j\tau}{\to} \pi_K \mathcal{M}' \otimes_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K} A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K[\frac{1}{z}]$$

$$\overset{\epsilon}{\to} (\operatorname{Coker} i) \otimes_A F \to 0.$$

Supposons maintenant $(\mathcal{N},\mathcal{N}',\tilde{i},\tilde{j})$ comme ci-dessus mais avec $y\in\pi_K\mathcal{M}'$: c'est-à-dire

$$\mathcal{N}=\mathcal{M}\oplus A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K, \mathcal{N}'=\mathcal{M}'\oplus A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K, \tilde{i}=\begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \tilde{j}=\begin{pmatrix} j & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Fixons des bases de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$. La matrice $\tilde{Q}'$ est la limite de la suite

$$(\tilde{j}{}^{\tau}\tilde{i}^{-1})...^{\tau^{n-1}}(\tilde{j}{}^{\tau}\tilde{i}^{-1})^{\tau^{n-1}}({}^{\tau}\tilde{i}_0\tilde{j}_0^{-1})...({}^{\tau}\tilde{i}_0\tilde{j}_0^{-1})$$
$$=\begin{pmatrix} j^{\tau}i^{-1} & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}...^{\tau^{n-1}}\begin{pmatrix} j^{\tau}i^{-1} & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{\tau^{n-1}}\begin{pmatrix} {}^{\tau}i_0j_0^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}...\begin{pmatrix} {}^{\tau}i_0j_0^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Donc pour $y\in\pi_K\mathcal{M}'\otimes_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K}A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K[\frac{1}{z}]$, $\epsilon(y)$ est l'image par le morphisme ${}^{\tau}\alpha^{-1}\mathcal{M}'\otimes_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K}\mathcal{C}\to(\mathrm{Coker}\, i)\otimes_A F$ (qui figure dans (8)) de

$$y+j^{\tau}(i^{-1}y)+j^{\tau}(i^{-1}j^{\tau}(i^{-1}y))+...=y+j^{\tau}i^{-1}({}^{\tau}y)+j^{\tau}i^{-1\tau}j^{\tau^2}i^{-1}({}^{\tau^2}y)+....$$

Le fait que cette somme converge dans ${}^{\tau}\alpha^{-1}\mathcal{M}'\otimes_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K}\mathcal{C}$ résulte de la construction de $\tilde{\delta}$ donc en dernière analyse de la démonstration du lemme 4.5. Pour la commodité du lecteur, rappelons que

$$j^{\tau}i^{-1}...^{\tau^{n-1}}j^{\tau^n}i^{-1\tau^n}y\in\pi_K^{q^n\,\tau}f^{-1}...^{\tau^n}f^{-1}\mathcal{M}'$$
$$\subset{}^{\tau}\alpha^{-1}\pi_K^{q^n}z^{-nC_2}({}^{\tau^{n+1}}\alpha)\mathcal{M}'\subset{}^{\tau}\alpha^{-1}\pi_K^{q^n}z^{-nC_2}\mathcal{M}'\otimes_{A\otimes\mathcal{O}_K}A\otimes\mathcal{O}_K[[\frac{\pi_K^{q^{n+1}}}{z^{C_2}}]]$$

entraîne facilement la convergence de cette somme dans ${}^{\tau}\alpha^{-1}\mathcal{M}'\otimes_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K}\mathcal{C}$.

Pour tout $t\in\mathbb{N}^*$, $i-j\tau$ envoie $\pi_K^t\mathcal{M}\otimes_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K}A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K[\frac{1}{z}]$ dans $\pi_K^t\mathcal{M}\otimes_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K}A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K[\frac{1}{z}]$ et $i-j\tau$ induit un isomorphisme

$$\Big(\pi_K\mathcal{M}\otimes_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K}A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K[\frac{1}{z}]\Big)/\Big(\pi_K^t\mathcal{M}\otimes_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K}A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K[\frac{1}{z}]\Big)$$
$$\simeq\Big(\pi_K\mathcal{M}'\otimes_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K}A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K[\frac{1}{z}]\Big)/\Big(\pi_K^t\mathcal{M}'\otimes_{A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K}A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K[\frac{1}{z}]\Big).$$

En effet, pour tout $a\in\{1,\dots,t-1\}$,

$$i-j\tau:(\pi_K^a\mathcal{M}/\pi_K^{a+1}\mathcal{M})[\frac{1}{z}]\to(\pi_K^a\mathcal{M}'/\pi_K^{a+1}\mathcal{M}')[\frac{1}{z}]$$

coïncide avec i et induit par conséquent un isomorphisme.

Il suffit donc de montrer l'exactitude du complexe

$$0\to\pi_K^t\mathcal{M}\otimes_A F\xrightarrow{i-j\tau}\pi_K^t\mathcal{M}'\otimes_A F\xrightarrow{\epsilon}(\mathrm{Coker}\, i)\otimes_A F\to 0.$$

Cela résulte du lemme suivant.

Lemme 4.8 *Pour $t \in \mathbb{N}^*$ assez grand le complexe*

$$0 \to \pi_K^t \mathcal{M} \stackrel{i-j\tau}{\to} \pi_K^t \mathcal{M}' \stackrel{\epsilon}{\to} \pi_K^t \mathcal{M}'/i(\pi_K^t \mathcal{M}) \to 0 \qquad (\star_t)$$

est bien défini et il est exact.

Par abus on pourrait noter $\pi_K^t(\operatorname{Coker} i)$ le dernier terme du complexe.
Démonstration. Montrons d'abord que le complexe $(\star_t)$ est bien défini, c'est-à-dire que

$$\epsilon(\pi_K^t \mathcal{M}') \subset (\operatorname{Coker} i) \otimes_A F \text{ est inclus dans } \pi_K^t(\operatorname{Coker} i) = \pi_K^t \mathcal{M}'/i(\pi_K^t \mathcal{M}).$$

Pour $y \in \pi_K^t \mathcal{M}'$ et $n \in \mathbb{N}$ on a $j^\tau i^{-1} \ldots^{\tau^{n-1}} j^{\tau^n} i^{-1\tau^n} y \in \pi_K^{q^n t \tau} f^{-1} \ldots^{\tau^n} f^{-1} \mathcal{M}'$ et comme $\operatorname{Coker} i$ est un $(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K)$-module, le fait que, si t est assez grand l'image de $j^\tau i^{-1} \ldots^{\tau^{n-1}} j^{\tau^n} i^{-1\tau^n} y$ dans $(\operatorname{Coker} i) \otimes_A F$ appartient à $\pi_K^t(\operatorname{Coker} i)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (et donc que le complexe $(\star_t)$ est bien défini) résulte du lemme suivant.

Lemme 4.9 *Si t est assez grand, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'image de $\pi_K^{q^n t \tau} f^{-1} \ldots^{\tau^n} f^{-1}$ dans $(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K) \otimes_A F$ appartient à $\pi_K^t(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K)$.*

Démonstration. Cela est vrai pour $t \geq \frac{C_3}{q-1}$ où C_3 est comme dans le lemme suivant, puisque pour $t \geq \frac{C_3}{q-1}$ on a $q^n t - nC_3 \geq t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Lemme 4.10 *Il existe $C_3 \in \mathbb{N}$ telle que pour $t \geq \frac{C_3}{q}$ et $n \in \mathbb{N}$, l'image de $\pi_K^{q^n t \tau} f^{-1} \ldots^{\tau^n} f^{-1}$ dans $(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K) \otimes_A F$ appartient à*

$$\pi_K^{q^n t - nC_3}(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K).$$

Démonstration. Comme l'image de $\frac{\pi_K^s}{z}$ dans $(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K) \otimes_A F$ appartient à $A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$, pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $q^m > sC_2$, l'image de $\frac{\pi_K^{q^m}}{z^{C_2}}$ dans $(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K)\otimes_A F$ appartient à $\pi_K(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K)$. Comme $\frac{f}{f_0} \in 1 + \frac{\pi_K}{z^{C_2}} A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$, l'image de $\frac{\tau^m f}{\tau^m f_0}$ appartient à $1 + \pi_K(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K)$ donc est inversible dans $A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$ et donc l'image de ${}^{\tau^m} f^{-1}$ dans $(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K) \otimes_A F$ appartient à $z^{-C_2}(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K)$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $q^m \leq sC_2$, l'image de ${}^{\tau^m} f$ dans $(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K) \otimes_A F$ est inversible et comme ces valeurs de m sont en nombre fini, il existe $C_2' \geq C_2$ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, l'image de ${}^{\tau^m} f^{-1}$ dans $(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K)\otimes_A F$ appartienne à $z^{-C_2'}(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K)$. Si $q^n t \geq nsC_2'$ on a

$$\pi_K^{q^n t} z^{-nC_2'}(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K) \subset \pi_K^{q^n t - nsC_2'}(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K).$$

On prend $C_3 = sC_2'$. Ceci termine la démonstration du lemme 4.10, donc aussi celle du lemme 4.9. $\square\square$

Nous savons maintenant que le complexe $(\star_t)$ du lemme 4.8 est bien défini, pour tout $t \geq \frac{C_3}{q-1}$. Fixons un entier t tel que $t > \frac{C_3}{q-1}$ et montrons que le complexe est exact. Pour tout $t' \geq t$ on a le sous-complexe

$$0 \to \pi_K^{t'}\mathcal{M} \overset{i-j\tau}{\to} \pi_K^{t'}\mathcal{M}' \overset{\epsilon}{\to} \pi_K^{t'}\mathcal{M}'/i(\pi_K^{t'}\mathcal{M}) \to 0 \qquad (\star_{t'})$$

Le quotient de $\star_{t'}$ par $\star_{t'+1}$ s'écrit

$$\begin{aligned} &0 \to (\pi_K^{t'}\mathcal{M}/\pi_K^{t'+1}\mathcal{M}) \overset{i-j\tau}{\to} (\pi_K^{t'}\mathcal{M}'/\pi_K^{t'+1}\mathcal{M}') \\ &\overset{\epsilon}{\to} (\pi_K^{t'}\mathcal{M}'/\pi_K^{t'+1}\mathcal{M}')/i(\pi_K^{t'}\mathcal{M}/\pi_K^{t'+1}\mathcal{M}) \to 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Comme $j\tau(\pi_K^{t'}\mathcal{M}) \subset \pi_K^{qt'}\mathcal{M} \subset \pi_K^{t'+1}\mathcal{M}$ on peut remplacer $i - j\tau$ par i dans (9). Comme $t' \geq t > \frac{C_3}{q-1}$, on a $q^n t' - nC_3 > t'$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc le lemme 4.10 montre que l'on peut remplacer ϵ par le quotient dans (9). Donc l'exactitude de (9) est évidente. Par récurrence on montre que pour tout $t' \geq t$, le complexe quotient de $(\star_t)$ par $(\star_{t'})$ est exact, et en passant à la limite on en déduit que le complexe $(\star_t)$ est exact, ce qui termine la preuve du lemme 4.8 et donc celle de la proposition 4.7. $\square\square$

Proposition 4.11 *On suppose que $Z(\det(j))$ n'a pas de composante irréductible commune avec l'hypersurface $\pi_K = 0$ et que $Z(\det(i))$ n'a pas de composante irréductible commune avec ses images inverses par les puissances de* $\mathrm{Id} \times \mathrm{Fr}$.

Alors l'identification

$$\det(H^\bullet(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K, (\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j)))^{-1} \otimes_A F$$

$$\simeq \det(\mathcal{M}_0 \otimes_A F)^{-1} \otimes \det(\mathcal{M}_0 \otimes_A F) \otimes \det((\operatorname{Coker} i) \otimes_A F)$$

$$\simeq \det(\operatorname{Coker} i) \otimes_A F$$

qui résulte de la suite exacte de la proposition 4.7 coïncide avec $\iota \otimes 1$, où

$$\iota : \det(H^\bullet(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K, (\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j)))^{-1} \simeq \det(\operatorname{Coker} i)$$

est l'isomorphisme de la définition 4.4.

Démonstration. D'abord on remarque que l'identification

$$\det(H^\bullet(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K, (\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j)))^{-1} \otimes_A F \simeq \det(\operatorname{Coker} i) \otimes_A F$$

donnée par la suite exacte de la proposition 4.7 provient en fait d'une identification

$$\det(H^\bullet(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K, (\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j)))^{-1} \simeq \det(\operatorname{Coker} i)$$

définie comme suit. On a un triangle distingué formé par les trois complexes

$$\pi_K^t \mathcal{M} \overset{i-j\tau}{\to} \pi_K^t \mathcal{M}' \tag{10}$$

$$\mathcal{M} \overset{i-j\tau}{\to} \mathcal{M}' \tag{11}$$

$$\mathcal{M}/\pi_K^t \mathcal{M} \quad \overset{i-j\tau}{\to} \quad \mathcal{M}'/\pi_K^t \mathcal{M}' \tag{12}$$

qui sont tous les trois quasi-isomorphes à des complexes parfaits (le complexe (12) est lui-même parfait). Le lemme 4.8 fournit un isomorphisme entre l'inverse du déterminant du complexe (10) et $\det(\pi_K^t(\operatorname{Coker} i))$. L'inverse du déterminant du complexe (12) est $\det(\mathcal{M}/\pi_K^t\mathcal{M})^{-1} \otimes \det(\mathcal{M}'/\pi_K^t\mathcal{M}')$ qui s'identifie à

$$\det((\operatorname{Coker} i)/\pi_K^t(\operatorname{Coker} i))$$

à cause de la suite exacte

$$0 \to \mathcal{M}/\pi_K^t\mathcal{M} \overset{i}{\to} \mathcal{M}'/\pi_K^t\mathcal{M}' \to (\operatorname{Coker} i)/\pi_K^t(\operatorname{Coker} i) \to 0.$$

D'où une identification entre l'inverse du déterminant du complexe (11) (qui est aussi $\det(H^\bullet(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K, (\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j)))^{-1}$) et

$$\det(\pi_K^t(\operatorname{Coker} i)) \otimes \det((\operatorname{Coker} i)/\pi_K^t(\operatorname{Coker} i))$$

mais ce produit tensoriel est lui-même isomorphe à $\det(\operatorname{Coker} i)$ à cause de la suite exacte $0 \to \pi_K^t(\operatorname{Coker} i) \to (\operatorname{Coker} i) \to (\operatorname{Coker} i)/\pi_K^t(\operatorname{Coker} i) \to 0$.

On doit montrer que pour tout $n \in N$, le produit tensoriel par A/z^nA de cette identification $\det(H^\bullet(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K, (\mathcal{M}, \mathcal{M}', i, j)))^{-1} \simeq \det(\operatorname{Coker} i)$ coïncide avec l'isomorphisme ι de la définition 4.4. On voit facilement que cela résulte du lemme suivant.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Grâce au lemme 4.3, pour t assez grand on a le complexe exact

$$\begin{gathered} 0 \to \pi_K^t(\mathcal{M}/z^n\mathcal{M}) \overset{i-j\tau}{\to} \pi_K^t(\mathcal{M}'/z^n\mathcal{M}') \\ \to \big(\pi_K^t(\mathcal{M}'/z^n\mathcal{M}')\big)/i\big(\pi_K^t(\mathcal{M}/z^n\mathcal{M})\big) \to 0 \end{gathered}$$

où la dernière flèche est le quotient.

Lemme 4.12 *Pour t assez grand ce complexe coïncide avec le produit tensoriel par A/z^nA du complexe $(\star_t)$ du lemme 4.8.*

Démonstration. On doit montrer que pour t assez grand la réduction modulo z^n de
$$\epsilon : \pi_K^t \mathcal{M}' \to \pi_K^t \mathcal{M}'/i(\pi_K^t \mathcal{M})$$
est le quotient. Comme $\pi_K^t \mathcal{M}'/i(\pi_K^t \mathcal{M}) = \pi_K^t(\mathrm{Coker}\, i)$ est un $A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$-module et que l'image de $\frac{\pi_K^s}{z}$ dans $(A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K) \otimes_A F$ appartient à $A\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K/fA\widehat{\otimes}\mathcal{O}_K$ on a

$$\pi_K^{ns}(\pi_K^t \mathcal{M}'/i(\pi_K^t \mathcal{M})) \subset z^n(\pi_K^t \mathcal{M}'/i(\pi_K^t \mathcal{M})).$$

Donc il suffit de montrer que pour t assez grand, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \pi_K^t \mathcal{M}'$, l'image de $j^\tau i^{-1} \ldots^{\tau^{m-1}} j^{\tau^m} i^{-1}(^{\tau^m} y)$ dans $\pi_K^t \mathcal{M}'/i(\pi_K^t \mathcal{M}) = \pi_K^t(\mathrm{Coker}\, i)$ appartient à $\pi_K^{t+ns}(\mathrm{Coker}\, i)$. Or d'après le lemme 4.10 l'image de $j^\tau i^{-1} \ldots^{\tau^{m-1}} j^{\tau^m} i^{-1}(^{\tau^m} y)$ appartient à $\pi_K^{q^m t - mC_3}(\mathrm{Coker}\, i)$. Si $t \geq \frac{C_3+ns}{q-1}$, on a pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $q^m t - mC_3 \geq t + ns$, et donc pour un tel entier t la réduction modulo z^n de ϵ est le quotient. □□

5 Un énoncé avec des groupes d'extension

Soit X une courbe projective lisse sur $\mathbb{F}_q$, $C = \mathrm{Spec} A$ une courbe affine lisse sur $\mathbb{F}_q$. On note $F = \mathbb{F}_q(C)$ le corps des fractions de A. On note $|X|$ l'ensemble des points fermés de X et pour $x \in |X|$, on note $k(x)$ son corps résiduel et d_x son degré sur $\mathbb{F}_q$. Soient r un entier et $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ des fibrés vectoriels de rang r sur $C \times X$. On note $^\tau\mathcal{E}$ l'image inverse de $\mathcal{E}$ par $\mathrm{Id} \times \mathrm{Fr}$, où Fr est le morphisme $x \mapsto x^q$ de X dans lui-même. On note τ l'application qui à une section de $\mathcal{E}$ associe la section de $^\tau\mathcal{E}$ qui est son image inverse par $\mathrm{Id} \times \mathrm{Fr}$.

Soient $\mathcal{E} \xrightarrow{i} \mathcal{E}' \xleftarrow{j} {}^\tau\mathcal{E}$ des morphismes de fibrés sur $C \times X$ qui sont des isomorphismes aux points génériques. On note $Z(\det(i))$ le lieu des zéros de $\det(i)$.

Pour $x \in |X|$ tel que $Z(\det(i))$ n'a de composante irréductible commune avec $C \times \{x\}$, le facteur local de la fonction L de $(\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j)$ est défini comme suit. On note $i_x : \mathcal{E}_x \to \mathcal{E}'_x$ et $j_x : {}^\tau\mathcal{E}_x \to \mathcal{E}'_x$ les restrictions de i et j à $C \times \mathrm{Spec}\,(k(x)) = \mathrm{Spec}\,(A \otimes k(x))$, si bien que $i_x^{-1} j_x \tau$ est un endomorphisme $1 \otimes \mathrm{Fr}$-linéaire du $F \otimes k(x)$-module libre $\mathcal{E}_x \otimes_{A \otimes k(x)} F \otimes k(x)$. On pose alors

$$L(x, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j), T) = \det{}_F(1 - T i_x^{-1} j_x \tau)^{-1}$$

$$= \det{}_{F \otimes k(x)}(1 - T^{d_x}(i_x^{-1} j_x \tau)^{d_x})^{-1} \in 1 + T^{d_x} F[[T^{d_x}]].$$

Pour tout partie finie S de $|X|$, telle que pour tout $x \in |X| - S$, $Z(\det(i))$ n'a pas de composante irréductible commune avec $C \times \{x\}$, la fonction L tronquée de $(\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j)$ est

$$L_S(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j), T) = \prod_{x \in |X| - S} L(x, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j), T) \in 1 + TF[[T]].$$

Notons $H^0(X, \mathcal{E})$ et $H^1(X, \mathcal{E})$ les A-modules de type fini qui sont les images directes de $\mathcal{E}$ et de même pour $\mathcal{E}'$. On note $i : H^\bullet(X, \mathcal{E}) \to H^\bullet(X, \mathcal{E}')$ et $j : H^\bullet(X, {}^\tau\mathcal{E}) \to H^\bullet(X, \mathcal{E}')$ les applications induites par i et j et τ : $H^\bullet(X, \mathcal{E}) \to H^\bullet(X, {}^\tau\mathcal{E})$ l'image inverse par $\mathrm{Id} \times \mathrm{Fr}$.

Notons $H^\bullet(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j))$ les groupes d'extension de $(\mathcal{O}, \mathcal{O}, \mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ par $(\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j)$ dans la catégorie abélienne des quadruplets $(\mathcal{F}, \mathcal{F}', \tilde{i}, \tilde{j})$, où $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont des $\mathcal{O}$-modules sur $C \times X$, munis de morphismes $\mathcal{F} \xrightarrow{\tilde{i}} \mathcal{F}' \xleftarrow{\tilde{j}} {}^\tau\mathcal{F}$. Comme au début du paragraphe 4, on peut montrer que $H^\bullet(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j))$ est la cohomologie du complexe de A-modules $R\Gamma(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j))$ défini comme le cône (décalé de [-1]) du morphisme de complexes

$$R\Gamma(X, \mathcal{E}) \xrightarrow{i - j\tau} R\Gamma(X, \mathcal{E}').$$

Ce triangle distingué fournit un isomorphisme

$$\det(R\Gamma(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j)))^{-1} \simeq \det(R\Gamma(X, \mathcal{E}))^{-1} \otimes \det(R\Gamma(X, \mathcal{E}')).$$

Or la suite exacte de $\mathcal{O}$-modules $0 \to \mathcal{E} \xrightarrow{i} \mathcal{E}' \to \operatorname{Coker} i \to 0$ fournit un isomorphisme

$$\det(R\Gamma(X, \mathcal{E}))^{-1} \otimes \det(R\Gamma(X, \mathcal{E}')) \simeq \det(R\Gamma(X, \operatorname{Coker} i)).$$

En composant des ceux isomorphismes, on obtient une identification

$$\det(R\Gamma(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j)))^{-1} \simeq \det(R\Gamma(X, \operatorname{Coker} i)).$$

Si $Z(\det(i))$ n'a de composante irréductible commune avec aucun des $\{c\} \times X$ pour $c \in |C|$, la première projection $Z(\det(i)) \to C$ est finie, donc $R\Gamma(X, \operatorname{Coker} i) = \operatorname{Coker} i$. En enlevant un nombre fini de points à C nous pourrions nous ramener à cette situation. Mais nous nous contentons de remarquer que, si v est une place de C telle que $Z(\det(i))$ n'a pas de composante irréductible commune avec $\{v\} \times X$, en notant A_v le complété de A en v, on a $R\Gamma(X, \operatorname{Coker} i) \otimes_A A_v = \operatorname{Coker} i \otimes_A A_v$, d'où une identification

$$\det(R\Gamma(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j)))^{-1} \otimes_A A_v \simeq \det((\operatorname{Coker} i) \otimes_A A_v). \tag{13}$$

Les groupes $H^i(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j))$ sont nuls sauf pour $i=0,1,2$, et le triangle distingué ci-dessus fournit une suite exacte longue de A-modules

$$0 \to H^0(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j)) \xrightarrow{\alpha} H^0(X,\mathcal{E}) \xrightarrow{i-j\tau} H^0(X,\mathcal{E}') \xrightarrow{\beta} H^1(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j))$$

$$\xrightarrow{\alpha} H^1(X,\mathcal{E}) \xrightarrow{i-j\tau} H^1(X,\mathcal{E}') \xrightarrow{\beta} H^2(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j)) \to 0.$$

Le morphisme $i : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ fournit un endomorphisme de degré 1 et de carré nul du complexe total du morphisme de complexes

$$R\Gamma(X,\mathcal{E}) \xrightarrow{i-j\tau} R\Gamma(X,\mathcal{E}')$$

(qui envoie $R\Gamma(X,\mathcal{E})$ sur $R\Gamma(X,\mathcal{E}')$ par i et $R\Gamma(X,\mathcal{E}')$ sur 0). On a donc un endomorphisme de degré 1 et de carré nul de $R\Gamma(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j))$, qui détermine, comme dans les paragraphes 1 et 2, un complexe

$$0 \to H^0(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j)) \xrightarrow{\beta\circ\alpha} H^1(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j)) \xrightarrow{\beta\circ\alpha} H^2(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j)) \to 0.$$

Cependant nous ne servirons pas de ce complexe : sous l'hypothèse simplificatrice que $Z(\det(i)) \to C$ est finie, si $\operatorname{Coker} i$ est non nul il ne peut être exact car sa caractéristique d'Euler-Poincaré (après tensorisation par F) est l'opposé du rang de $\operatorname{Coker} i$ sur A.

Soit maintenant v une place de C telle que $Z(\det(i))$ n'ait pas de composante irréductible commune avec $\{v\} \times X$. Soit S une partie finie de X telle que $\{v\} \times S$ contienne $Z(\det(i)) \cap (\{v\} \times X)$. Notons A_v le complété de A en la place v et F_v le corps des fractions de A_v (qui est le complété de F en la place v).

Il résulte du paragraphe 3 que l'image de $L_S(Y,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j),T)$ dans $1+TF_v[[T]]$ appartient à $1+TA_v\langle\langle T\rangle\rangle$, où $A_v\langle\langle T\rangle\rangle$ désigne l'anneau de Tate. En effet soit Y l'ouvert de X tel que $|Y| = |X| - S$ et R l'anneau des fonctions sur Y. Alors $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ fournissent des $A_v\widehat{\otimes}R$-modules localement libres, que nous notons $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$, et i est un isomorphisme de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{M}'$, donc on peut appliquer la proposition 3.2, avec A_v au lieu de A, $u = i^{-1}j : {}^\tau\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ et en prenant pour $\mathcal{E}$ la restriction de $\mathcal{E}$ à $\operatorname{Spf} A_v\hat{\times}X$ (qui est le complété de $C \times X$ le long de $\{v\} \times X$).

Par conséquent l'ordre d'annulation et la valeur spéciale en $T=1$ de $L_S(Y,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j),T)$ à la place v sont bien définis et la valeur spéciale est notée $L^*_{S,v}(Y,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j),1) \in A_v$.

Pour tout $w \in |S|$ on note K_w le complété en w du corps des fonctions de X, et $\mathcal{O}_{K_w}$ son anneau d'entiers et on choisit une uniformisante π_{K_w} de $\mathcal{O}_{K_w}$. On note $\mathcal{M}_w$ (resp. $\mathcal{M}'_w$) le $A_v\widehat{\otimes}\mathcal{O}_{K_w}$-module libre déterminé par $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}'$).

On rappelle que dans le paragraphe 4 on a introduit un complexe de A_v-modules

$$R\Gamma(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{K_w},(\mathcal{M}_w,\mathcal{M}'_w,i,j))=(\mathcal{M}_w\stackrel{i-j\tau}{\to}\mathcal{M}'_w)$$

qui calcule les groupes d'extension de

$$(A_v\widehat{\otimes}\mathcal{O}_{K_w},A_v\widehat{\otimes}\mathcal{O}_{K_w},\mathrm{Id},\mathrm{Id})\quad\text{par}\quad(\mathcal{M}_w,\mathcal{M}'_w,i,j)$$

dans la catégorie abélienne A_v-linéaire des quadruplets $(\mathcal{N},\mathcal{N}',\tilde{i},\tilde{j})$, où $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ sont des $A_v\widehat{\otimes}\mathcal{O}_{K_w}$-modules et $\tilde{i}:\mathcal{N}\to\mathcal{N}'$ et $\tilde{j}:{}^{\tau}\mathcal{N}\to\mathcal{N}'$ des morphismes, et qu'on a d'après la définition 4.4 une identification de A_v-modules inversibles

$$\det(R\Gamma(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{K_w},(\mathcal{M}_w,\mathcal{M}'_w,i,j)))^{-1}\simeq\det((\operatorname{Coker}i)\otimes_{A\otimes X}A_v\widehat{\otimes}\mathcal{O}_{K_w})\quad(14)$$

qui, sous l'hypothèse supplémentaire que $Z(\det(j))$ n'a pas de composante irréductible commune avec $C\times\{w\}$ et que $Z(\det(i))$ n'a de composante irréductible commune (contenant un des points de $\{v\}\times\{w\}$) avec aucune de ses images inverses par $\mathrm{Id}\times\mathrm{Fr}$, résulte aussi, après tensorisation par F_v, de la suite exacte de la proposition 4.7 (en vertu de la proposition 4.11).

Comme $\{v\}\times S$ contient $Z(\det(i))\cap(\{v\}\times X)$, on a

$$(\operatorname{Coker}i)\otimes_A A_v\simeq\bigoplus_{w\in S}(\operatorname{Coker}i)\otimes_{A\otimes X}A_v\widehat{\otimes}\mathcal{O}_{K_w}$$

et (14) fournit un isomorphisme

$$\det(\bigoplus_w R\Gamma(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{K_w},(\mathcal{M}_w,\mathcal{M}'_w,i,j)))^{-1}\simeq\det((\operatorname{Coker}i)\otimes_A A_v).\quad(15)$$

Il résulte des identifications (13) et (15) que le cône (décalé de [-1]) $R\Gamma_{S,v}(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j))$ du morphisme de complexes de A_v-modules

$$R\Gamma(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j))\otimes_A A_v\to\bigoplus_{w\in S}R\Gamma(\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{K_w},(\mathcal{M}_w,\mathcal{M}'_w,i,j))$$

(où le morphisme est la restriction naturelle d'un groupe d'extension sur X vers un groupe d'extensions sur $\bigcup\operatorname{Spec}O_{K_w}$) est muni d'une trivialisation de l'inverse de son déterminant

$$\det(R\Gamma_{S,v}(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j)))^{-1}\simeq A_v.$$

On note $z_{S,v}(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j))$ le générateur de $\det(R\Gamma_{S,v}(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j)))^{-1}$ qui est l'image réciproque de 1 par cette trivialisation.

Les groupes de cohomologie $H^i_{S,v}(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j))$ de $R\Gamma_{S,v}(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j))$ sont des A_v-modules de type fini, nuls pour $i \neq 1,2$. On peut considérer qu'ils calculent des groupes d'extension à support compact sur $X-S$ de $(\mathcal{O},\mathcal{O},\mathrm{Id},\mathrm{Id})$ par $(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j)$ sur $\mathrm{Spf}\, A_v\hat{\times}X$ (qui est le complété de $C\times X$ le long de $\{v\}\times X$).

On note que i détermine un endomorphisme du complexe de A_v-modules

$$R\Gamma(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{K_w},(\mathcal{M}_w,\mathcal{M}'_w,i,j)) = (\mathcal{M}_w \overset{i-j\tau}{\to} \mathcal{M}'_w)$$

qui envoie $\mathcal{M}_w$ sur $\mathcal{M}'_w$ par i et $\mathcal{M}'_w$ sur 0, et qui est donc de degré 1 et de carré nul. D'autre part on a construit précédemment un endomorphisme de degré 1 et de carré nul de $R\Gamma(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j))$. Ces endomorphismes déterminent un endomorphisme de degré 1 et de carré nul du cône (décalé de [-1])

$$R\Gamma_{S,v}(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j))$$

et donc un morphisme de A_v-modules

$$\theta : H^1_{S,v}(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j)) \to H^2_{S,v}(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j)).$$

Théorème 5.1 *Supposons comme précédemment que* $Z(\det(i))$ *n'a pas de composante irréductible commune avec* $\{v\}\times X$*.*

Supposons que

$$\theta\otimes 1 : H^1_{S,v}(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j))\otimes_{A_v} F_v \to H^2_{S,v}(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j))\otimes_{A_v} F_v$$

est un isomorphisme. Soit

$$\lambda : \det(R\Gamma_{S,v}(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j)))^{-1}\otimes_{A_v} F_v$$

$$= \det(H^\bullet_{S,v}(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j)))^{-1}\otimes_{A_v} F_v \xrightarrow{\sim} F_v$$

la trivialisation donnée par $\theta\otimes 1$*. Alors l'ordre d'annulation en* $T=1$ *de* $L_S(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j),T)$ *à la place* v *est*

$$\dim(H^1_{S,v}(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j))\otimes_{A_v} F_v) = \dim(H^2_{S,v}(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j))\otimes_{A_v} F_v)$$

$$\textit{et} \qquad \lambda(z_{S,v}(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j))) = L^*_{S,v}(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j),1).$$

Démonstration. Soit $\mathcal{V}$ le $A_v\widehat{\otimes}R$-module $\mathrm{Hom}_{A_v\widehat{\otimes}R}(\mathcal{M},A_v\widehat{\otimes}\Omega_R)$, où R est l'anneau des fonctions sur Y et Ω_R est le R-module inversible formé des sections de ω_Y. On définit aussi $\mathcal{V}'=\mathrm{Hom}_{A_v\widehat{\otimes}R}(\mathcal{M}',A_v\widehat{\otimes}\Omega_R)$ mais on identifie $\mathcal{V}'$ à $\mathcal{V}$ par ${}^t i$. Comme dans le paragraphe 3, $u=i^{-1}j\in\mathrm{Hom}_{A_v\widehat{\otimes}R}({}^\tau\mathcal{M},\mathcal{M})$ détermine un endomorphisme Cartier-linéaire $\kappa_{\mathcal{V}}:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$.

Les complexes de A_v-modules

$$\bigoplus_w \mathcal{M}_w \to \mathrm{Hom}_{A_v}(\mathcal{V}, A_v) \quad \text{et} \quad \bigoplus_w \mathcal{M}'_w \to \mathrm{Hom}_{A_v}(\mathcal{V}', A_v)$$

représentent $R\Gamma(X, \mathcal{E}) \otimes_A A_v$ et $R\Gamma(X, \mathcal{E}') \otimes_A A_v$ (la flèche du premier complexe vient de l'accouplement, qui à $(f_w) \in \bigoplus_w \mathcal{M}_w$ et $g \in \mathcal{V}$ associe la somme des résidus en w de $\langle g, f_w \rangle$ et il en va de même pour le second complexe).

On en déduit que $R\Gamma(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j)) \otimes_A A_v$ est quasi-isomorphe au complexe total associé au complexe double

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_w \mathcal{M}_w & \to & \mathrm{Hom}_{A_v}(\mathcal{V}, A_v) \\ \downarrow i - j\tau & & \downarrow 1 - {}^t\kappa_V \\ \bigoplus_w \mathcal{M}'_w & \to & \mathrm{Hom}_{A_v}(\mathcal{V}, A_v) \end{array} .$$

Dans ce diagramme la flèche verticale de droite est plus naturelle en écrivant $\mathrm{Hom}_{A_v}(\mathcal{V}, A_v)$ en bas à droite alors que la flèche horizontale du bas serait plus naturelle en écrivant $\mathrm{Hom}_{A_v}(\mathcal{V}', A_v)$. L'endomorphisme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i(a) & b \end{pmatrix}$ de ce complexe réalise l'endomorphisme de degré 1 et de carré nul de $R\Gamma(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j))$ introduit plus haut.

D'autre part $\bigoplus_{w \in S} R\Gamma(\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{K_w}, (\mathcal{M}_w, \mathcal{M}'_w, i, j))$ est représenté par la colonne de gauche du complexe double précédent. Donc le cône (décalé de [-1])

$$R\Gamma_{S,v}(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j))$$

est représenté par la colonne de droite et est muni de l'endomorphisme de degré 1 et de carré nul qui agit par $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ sur la colonne de droite. Pour montrer le théorème 5.1, on se ramène d'abord à un problème concernant la colonne de droite.

On note z une uniformisante de A_v.

Comme $R\Gamma_{S,v}(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j))$ est quasi-isomorphe au complexe

$$\mathrm{Hom}_{A_v}(\mathcal{V}, A_v) \overset{1-{}^t\kappa_V}{\to} \mathrm{Hom}_{A_v}(\mathcal{V}, A_v) \text{ (en degrés 1 et 2)}$$

on a une identification entre $\det(R\Gamma_{S,v}(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j)))^{-1}$ et le déterminant du complexe $\mathrm{Hom}_{A_v}(\mathcal{V}, A_v) \overset{1-{}^t\kappa_V}{\to} \mathrm{Hom}_{A_v}(\mathcal{V}, A_v)$ (en degrés 0 et 1).

Lemme 5.2 *Dans cette identification l'image de $z_{S,v}(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j))$ construit précédemment est l'élément $z(Y, (\mathcal{M}, u))$ de la définition 3.5.*

Démonstration. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrons l'égalité entre $z_{S,v}(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j))$ et $z(Y, (\mathcal{M}, u))$ modulo z^m. Avec les notations de la proposition 3.2 et des constructions qui la suivent, pour t assez grand, l'orthogonal $(\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t)^\perp$ de $\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t$ dans

$$\mathrm{Hom}_{A_v/z^m A_v}(\mathcal{V}/z^m\mathcal{V}, A_v/z^m A_v) = \mathrm{Hom}_{A_v}(\mathcal{V}, A_v/z^m A_v)$$

s'identifie à l'image de $\bigoplus_w \pi^t_{K_w}(\mathcal{M}_w/z^m\mathcal{M}_w)$ par l'application

$$\bigoplus_w (\mathcal{M}_w/z^m\mathcal{M}_w) \to \mathrm{Hom}_{A_v}(\mathcal{V}, A_v/z^m A_v).$$

En effet le complexe

$$\bigoplus_w \pi^t_{K_w}(\mathcal{M}_w/z^m\mathcal{M}_w) \to \mathrm{Hom}_{A_v}(\mathcal{V}, A_v/z^m A_v)$$

représente $R\Gamma(\mathrm{Spf}\,(A_v/z^m A_v)\hat{\times} X, \mathcal{E}(-t(\sum_{w\in S} w)))$ et pour t assez grand,

$$H^1(\mathrm{Spf}\,(A_v/z^m A_v)\hat{\times} X, \mathcal{E}(-t(\sum_{w\in S} w)))$$

$$\text{et} \quad \mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t = H^0(\mathrm{Spf}\,(A_v/z^m A_v)\hat{\times} X, \mathcal{E}^* \otimes \Omega_X(t(\sum_{w\in S} w)))$$

sont des $A_v/z^m A_v$-modules libres duaux l'un de l'autre.

L'image de $z(Y, (\mathcal{M}, u))$ dans

$$\det(R\Gamma_{S,v}(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j)))^{-1} \otimes_{A_v} (A_v/z^m A_v),$$

qui est le déterminant du complexe de $A_v/z^m A_v$-modules (placés en degrés 0 et 1)

$$\mathrm{Hom}_{A_v}(\mathcal{V}, A_v/z^m A_v) \overset{1-{}^t\kappa_V}{\to} \mathrm{Hom}_{A_v}(\mathcal{V}, A_v/z^m A_v)$$

s'obtient à l'aide du quasi-isomorphisme entre ce complexe et le complexe parfait

$$\mathrm{Hom}_{A_v/z^m A_v}(\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t, A_v/z^m A_v) \overset{1-{}^t\kappa_V}{\to} \mathrm{Hom}_{A_v/z^m A_v}(\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t, A_v/z^m A_v),$$

dont le déterminant est

$$\det\big(\mathrm{Hom}_{A_v/z^m A_v}(\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t, A_v/z^m A_v)\big)$$

$$\otimes \det\big(\mathrm{Hom}_{A_v/z^m A_v}(\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t, A_v/z^m A_v)\big)^{-1} = A_v/z^m A_v.$$

L'image de $z(Y,(\mathcal{M},u))$ à travers ces identifications est $1\in A_v/z^mA_v$.

De plus, pour t assez grand, on est dans la situation du lemme 4.3, et en particulier les endomorphismes i et $i-j\tau$ de $\bigoplus_w \pi^t_{K_w}(\mathcal{M}_w/z^m\mathcal{M}_w)$ ont la même image. Pour t assez grand on est aussi dans la situation de b) de la proposition 3.2 et de la construction avant le lemme 3.4. Donc le complexe double

$$\begin{array}{ccc}\bigoplus_w(\mathcal{M}_w/z^m\mathcal{M}_w) & \to & \mathrm{Hom}_{A_v}(\mathcal{V},A_v/z^mA_v)\\ \downarrow i-j\tau & & \downarrow 1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}}\\ \bigoplus_w(\mathcal{M}'_w/z^m\mathcal{M}'_w) & \to & \mathrm{Hom}_{A_v}(\mathcal{V},A_v/z^mA_v)\end{array}$$

est quasi-isomorphe, globalement, ligne par ligne et colonne par colonne, au complexe

$$\begin{array}{cc}\bigoplus_w(\mathcal{M}_w/z^m\mathcal{M}_w)/\pi^t_{K_w}(\mathcal{M}_w/z^m\mathcal{M}_w) & \to \mathrm{Hom}_{A_v/z^mA_v}(\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t,A_v/z^mA_v)\\ \downarrow i-j\tau & \downarrow 1-{}^t\kappa_{\mathcal{V}}\\ \bigoplus_w(\mathcal{M}'_w/z^m\mathcal{M}'_w)/i(\pi^t_{K_w}(\mathcal{M}_w/z^m\mathcal{M}_w)) & \to \mathrm{Hom}_{A_v/z^mA_v}(\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t,A_v/z^mA_v)\end{array} \tag{16}$$

dont tous les termes sont des A_v/z^mA_v-modules libres de type fini.

En remplaçant dans (16) les flèches verticales par i et 1 on obtient un nouveau complexe double

$$\begin{array}{cc}\bigoplus_w(\mathcal{M}_w/z^m\mathcal{M}_w)/\pi^t_{K_w}(\mathcal{M}_w/z^m\mathcal{M}_w) & \to \mathrm{Hom}_{A_v/z^mA_v}(\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t,A_v/z^mA_v)\\ \downarrow i & \downarrow 1\\ \bigoplus_w(\mathcal{M}'_w/z^m\mathcal{M}'_w)/i(\pi^t_{K_w}(\mathcal{M}_w/z^m\mathcal{M}_w)) & \to \mathrm{Hom}_{A_v/z^mA_v}(\mathcal{V}_t/z^m\mathcal{V}_t,A_v/z^mA_v)\end{array} \tag{17}$$

Comme les complexes totaux de (16) et (17) font intervenir les mêmes A_v/z^mA_v-modules libres de type fini (avec seulement des flèches différentes), leurs déterminants sont identifiés. Or le complexe total de (16) est quasi-isomorphe à

$$R\Gamma(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j))\otimes_A A_v/z^mA_v$$

et le complexe total de (17) a pour cohomologie $\mathrm{Coker}\, i\otimes_A A_v/z^mA_v$ placé en degré 1. L'identification des déterminants des complexes totaux de (16) et (17) fournit donc un isomorphisme

$$\det\bigl(R\Gamma(X,(\mathcal{E},\mathcal{E}',i,j))\otimes_A A_v/z^mA_v\bigr)^{-1}\simeq \det(\mathrm{Coker}\, i)\otimes_A A_v/z^mA_v.$$

Nous affirmons que cet isomorphisme est la réduction modulo z^m de (13). En effet les deux lignes de (16) représentent

$$R\Gamma(X,\mathcal{E})\otimes_A A_v/z^mA_v \quad \text{et} \quad R\Gamma(X,\mathcal{E}')\otimes_A A_v/z^mA_v$$

et les flèches verticales i et 1 constituent un morphisme de complexes

$$R\Gamma(X,\mathcal{E})\otimes_A A_v/z^mA_v \to R\Gamma(X,\mathcal{E}')\otimes_A A_v/z^mA_v$$

qui est exactement le morphisme induit par $i : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$. D'autre part l'identification entre le cône (décalé de [-1]) de ce morphisme de complexes et $\operatorname{Coker} i \otimes_A A_v/z^m A_v$ placé en degré 1, qui vient de la suite exacte $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}' \to \operatorname{Coker} i \to 0$ (et a été utilisé dans (13)), coïncide avec l'identification provenant du fait que la cohomologie du complexe total de (17) est $\operatorname{Coker} i \otimes_A A_v/z^m A_v$ placé en degré 1.

L'identification (réduction modulo z^m de (15)) entre

$$\det(\operatorname{Coker} i) \otimes_A A_v/z^m A_v$$

et l'inverse du déterminant du complexe

$$\bigoplus_{w \in S} R\Gamma(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K_w}, (\mathcal{M}_w, \mathcal{M}'_w, i, j)) \otimes_{A_v} A_v/z^m A_v$$

(qui est représenté par la colonne de gauche du complexe (16)) vient du fait que si on remplace la flèche verticale de gauche par i la cohomologie de la nouvelle colonne de gauche est $\operatorname{Coker} i \otimes_A A_v/z^m A_v$ placé en degré 1 (voir la remarque après la définition 4.4).

Donc la trivialisation (par $z_{S,v}(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j))$ modulo z^m) de l'inverse du déterminant de $R\Gamma_{S,v}(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j)) \otimes_{A_v} A_v/z^m A_v$ (qui est représenté par la colonne de droite du complexe (16), considérée comme un complexe en degrés 1 et 2) vient du fait que si on remplace la flèche verticale de droite par 1 la nouvelle colonne de droite est exacte. Donc $z_{S,v}(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j))$ et $z(Y, (\mathcal{M}, u))$ coïncident modulo z^m. Le lemme 5.2 est démontré. $\square$

Puisque $L(Y, (\mathcal{M}, u), T) = L_S(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j), T)$, le théorème 5.1 résulte de la proposition 3.6 et du lemme 5.2. $\square$

6 Remarques finales

Voici deux questions que nous ne traitons pas.

6.1 Rapport avec un article de Anderson et Thakur

Dans [AT90], Anderson et Thakur relient la valeur, dans le complété de $A = \mathbb{F}_q[z]$ en une place v, de la fonction zeta de Carlitz en un entier positif n au logarithme v-adique d'un point défini sur $\mathbb{F}_q(T)$ de $\mathcal{C}^{\otimes n}$, où $\mathcal{C}$ est le module de Carlitz. Le théorème 5.1 donne une autre interprétation de $\zeta_v(n)$ en termes d'extensions du chtouca trivial par le chtouca de rang 1 où le Frobenius agit par $(z - \pi)^{-n}$ (avec $C = \mathbb{A}^1$, $X = \mathbb{P}^1 \supset \mathbb{A}^1$ et z et π des coordonnées de $\mathbb{A}^1$). Pour relier ces résultats il faut certainement utiliser le théorème 1.2 de [PR03]. Il s'agit d'ailleurs de la direction de recherche indiquée par Papanikolas et Ramachandran à la fin de [PR03], comme projet commun avec Thakur.

6.2 Autres valeurs spéciales

Soit X une courbe projective lisse sur $\mathbb{F}_q$, $C = \mathrm{Spec} A$ une courbe affine lisse sur $\mathbb{F}_q$. On note $F = \mathbb{F}_q(C)$ le corps des fractions de A. Soient r un entier et $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ des fibrés vectoriels de rang r sur $C \times X$. Soient $\mathcal{E} \xrightarrow{i} \mathcal{E}' \xleftarrow{j} {}^\tau\mathcal{E}$ des morphismes de fibrés sur $C \times X$, qui sont des isomorphismes aux points génériques. Nous utilisons les notations du paragraphe 5.

Soit maintenant v une place de C. Contrairement au paragraphe 5 nous supposons maintenant que $Z(\det(i)) = Z \cup Z'$ avec $Z \subset \{v\} \times X$ et Z' une hypersurface de $C \times X$ ne contenant pas $\{v\} \times X$. Soit S une partie finie de $|X|$ telle que $\{v\} \times S$ contienne $Z' \cap (\{v\} \times X)$. Soit

$$L_S(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j), T) = \prod_{x \in |X| - S} L_x(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j), T) \in 1 + TF[[T]].$$

Notons A_v le complété de A en la place v et F_v le corps des fractions de A_v (qui est le complété de F en la place v).

Il résulte du corollaire 4.1 de [TW97] que l'image de $L_S(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j), T)$ dans $1 + TF_v[[T]]$ est une série convergente sur toute la droite. En effet soit R l'anneau des fonctions sur l'ouvert Y de X tel que $|Y| = |X| - S$. Alors $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ fournissent des $A_v \widehat{\otimes} R$-modules localement libres, que nous notons $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$, i est un isomorphisme de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{M}'$, et si on pose $u = i^{-1}j$: ${}^\tau\mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $(\mathcal{M}, u)$ est surconvergent au sens de Taguchi et Wan. Or sous cette hypothèse de surconvergence de u, d'après le théorème 4.1 de [TW97], $L(Y, (\mathcal{M}, u), T) = L_S(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j), T)$ se prolonge en une fonction entière sur la droite, et pas seulement sur la boule unité fermée.

La conclusion est que la valeur spéciale $L^*_{S,v}(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j), 1)$ a un sens dans F_v mais nous ne savons pas comment l'interpréter (sauf bien sûr si $Z(\det(i)) \subset \{v\} \times X$, auquel cas on peut appliquer la proposition 2.2 avec $C - \{v\}$ au lieu de C). Le problème est en particulier d'étendre les résultats du paragraphe 4 lorsque $Z(\det(i))$ contient l'hypersurface $z = 0$.

Références

[And86] G. Anderson. t-motives. *Duke Math. J.* 53 :457–502, 1986.

[And96] G. Anderson. Log-algebraicity of twisted A-harmonic series and special values of L-series in characteristic p. *J. Number Theory* 60 :165–209, 1996

[And00] G. Anderson. An elementary approach to L-functions mod p. *J. Number Theory* 80(2) :291–303, 2000.

[AT90] G. Anderson and D. Thakur. Tensor powers of the Carlitz module and zeta values. *Ann. of Math. (2)*, 132(1) :159–191, 1990.

[Bei87] A. Beilinson. Height pairing between algebraic cycles. *Current Trends in Arithmetical Algebraic Geometry, Contemp. Math.*, 67 :1–24, Amer. Math. Soc., 1987.

[BK90] S. Bloch and K. Kato. L-functions and Tamagawa numbers of motives. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. I*, volume 86 of *Progr. Math.*, pages 333–400. 1990.

[Boe02] G. Böckle. Global L-functions over function fields. *Math. Annalen* 323, 737–795, 2002.

[BP04] G. Böckle and R. Pink. Cohomological Theory of Crystals over Function Fields. *preprint*, 2004, disponible à l'adresse http ://www.uni-due.de/arith-geom/boeckle/Preprints/BP.pdf

[EK04] M. Emerton and M. Kisin. The Riemann-Hilbert correspondence for unit F-crystals. *Astérisque*, (293), 2004.

[Fon92] J.-M. Fontaine. Valeurs spéciales des fonctions L des motifs. *Astérisque*, (206) :Exp. No. 751, 1992. Séminaire Bourbaki, Vol. 1991/92.

[FPR91] J.-M. Fontaine and B. Perrin-Riou. Autour des conjectures de Bloch et Kato. I,II,III. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 313 :189–196,349–356,421–428, 1991.

[FPR94] J.-M. Fontaine and B. Perrin-Riou. Autour des conjectures de Bloch et Kato : cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L. In *Motives*, volume 55 of *PSPM*, pages 599–706. 1994.

[GL08] A. Genestier et V. Lafforgue. Théorie de Fontaine en égales caractéristiques. *preprint*, 2008, disponible à l'adresse http ://people.math.jussieu.fr/∼vlafforg/fontaine.pdf

[Kat93] K. Kato. Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via B_{dR}. I. In *Arithmetic algebraic geometry (Trento, 1991)*, volume 1553 of *Lecture Notes in Math.*, pages 50–163. 1993.

[KM76] F. Knudsen and D. Mumford. The projectivity of the moduli space of stable curves I. *Math. Scand*, 39(1) :19-55, 1976

[Mil86] J. Milne. Arithmetic Duality Theorems. Academic Press, 1986 ; second edition available at http ://www.jmilne.org

[Pin97] R. Pink. Hodge structures over function fields. *www.math.ethz.ch/~pink/ftp/HS.pdf*, 1997.

[PR03] M. Papanikolas and N. Ramachandran. A Weil-Barsotti formula for Drinfeld modules. *J. Number Theory*, 98(2) :407–431, 2003.

[SGA4et1/2] P. Deligne. Cohomologie étale. Lecture Notes in Math. 569, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA 4 et 1/2, Avec la collaboration de J. F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J. L. Verdier, 1977.

[Tat95] J. Tate. On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog. In *Séminaire Bourbaki, Vol. 9,Exp. No. 306*, pages 415–440. Soc. Math. France, 1995.

[TW96] Y. Taguchi and D. Wan. L-functions of ϕ-sheaves and Drinfeld modules. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(3) :755–781, 1996.

[TW97] Y. Taguchi and D. Wan. Entireness of L-Functions of ϕ-Sheaves on Affine Complete Intersections. *J. Number theory*, 63 :170–179, 1997.

[Tha04] D. Thakur Function Field Arithmetic. World Scientific 2004.

[Wan96] D. Wan. Meromorphic continuation of L-functions of p-adic representations. *Ann. of Math.*, 143(3) :469–498, 1996.