Clay Mathematics Proceedings
Volume 12, 2010

Propriété (T) renforcée et conjecture de Baum-Connes

Vincent Lafforgue

Cet article est dédié à Alain Connes
pour son soixantième anniversaire

2010 Mathematics subject classification : Primary 19K35, Secondary 19K56, 46L80

Nous cherchons à comprendre pourquoi la propriété (T) de Kazhdan [**Kaz67, HV89, BHV08**], et plus particulièrement une forme renforcée de celle-ci introduite dans [**Laf08**], sont un obstacle à une démonstration de la surjectivité de l'application de Baum-Connes à coefficients arbitraires pour des groupes ayant un élément γ de Kasparov, à l'aide des méthodes connues.

Nous passons d'abord en revue trois méthodes pour montrer la surjectivité de l'application de Baum-Connes à coefficients pour des groupes ayant un élément γ de Kasparov (pour lesquels l'injectivité de l'application de Baum-Connes à coefficients est connue). La première méthode (due à Kasparov [**Kas88**]) consiste à montrer que $\gamma = 1$ dans $KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. C'est la méthode qui a donné le plus de résultats positifs mais nous ne la mentionnons que brièvement car elle échoue pour les groupes non compacts ayant la propriété (T) pour des raisons évidentes alors que l'obstacle de la propriété (T) renforcée est plus subtil pour les autres méthodes. La deuxième méthode (d'abord proposée par Julg [**Jul97**]) consiste à construire une homotopie de 1 à γ en utilisant des représentations dans des espaces de Hilbert qui ne sont pas unitaires mais dont la croissance est contrôlée par une exponentielle arbitrairement petite. Nous justifions en détail, en nous appuyant sur des idées de Higson, le fait que, pour un groupe localement compact agissant de façon continue, isométrique et propre sur un espace de dimension asymptotique finie avec contrôle linéaire (et donc en particulier pour un groupe hyperbolique), l'existence d'une telle homotopie implique la surjectivité de l'application de Baum-Connes à coefficients arbitraires. La troisième méthode est la méthode banachique [**Laf02a**], qui fait intervenir des complétions inconditionnelles et dont le résultat dépend beaucoup des coefficients : elle ne montre la conjecture de Baum-Connes à coefficients arbitraires pour aucun groupe !

Nous proposons ensuite un cadre général (assez évident) englobant ces trois méthodes et nous en tirons une condition nécessaire pour qu'une méthode inscrite dans ce cadre général, c'est-à-dire utilisant la KK-théorie banachique et des arguments élémentaires de stabilité par calcul fonctionnel holomorphe, puisse montrer la surjectivité de l'application de Baum-Connes à coefficients arbitraires.

Nous expliquons ensuite pourquoi la propriété (T) renforcée [**Laf08**] est un obstacle à une démonstration de la surjectivité de l'application de Baum-Connes à coefficients arbitraires par une méthode de ce type.

Nous montrons enfin que $SL_3(\mathbb{Q}_p)$ a la propriété (T) renforcée (cela a été démontré dans [**Laf08**] mais comme nous donnons ici une définition différente de la propriété (T) renforcée, adaptée à la conjecture de Baum-Connes, nous devons reprendre la démonstration). En fait tout groupe algébrique presque simple sur un corps local non-archimédien ou archimédien, dont l'algèbre de Lie contient $\mathfrak{sl}_3$, possède la propriété (T) renforcée au sens de cet article (en modifiant un peu la définition dans le cas archimédien en raison de l'absence de sous-groupe compact ouvert) mais nous ne le montrons pas ici.

Bien sûr cela ne donne aucune indication qu'il puisse exister un contre-exemple à la conjecture de Baum-Connes à coefficients pour un tel groupe. Au contraire les idées de Jean-Benoît Bost sur le principe d'Oka [**Bos90**] restent intactes et font espérer que la conjecture de Baum-Connes à coefficients soit vraie pour tous les groupes de Lie réels ou p-adiques.

Quand Paul Baum et Alain Connes ont formulé leur conjecture la propriété (T) est apparue très vite comme un obstacle pour montrer la surjectivité de l'application de Baum-Connes. Bien que cet obstacle ait été contourné dans quelques cas, l'obstacle de la propriété (T) renforcée reste infranchissable actuellement.

C'est avec un très grand plaisir que je dédie cet article à Alain Connes, qui a inspiré tant de mathématiciens.

1. Rappels

Nous renvoyons à [**BCH94**] pour l'énoncé de la conjecture de Baum-Connes à coefficients, à [**Kas88, Laf02a**] pour la KK-théorie et la KK-théorie banachique, et à [**Ska99, Laf01, Laf02b**] pour des introductions bien adaptées à la suite.

Soit G un groupe localement compact et dg une mesure de Haar à gauche sur G. Soit A une C^*-algèbre munie d'une action continue de G. On note $C_c(G,A)$ l'algèbre des fonctions continues à support compact sur G à valeurs dans A munie du produit de convolution

$$(f_1.f_2)(g) = \int_{g_1 \in G} f_1(g_1) g_1(f_2(g_1^{-1}g)) dg_1$$

(cette formule est naturelle si on écrit les éléments de $C_c(G,A)$ sous la forme $\int_{g \in G} f(g) e_g dg$). On définit $L^1(G,A)$ comme la complétion de $C_c(G,A)$ pour la norme $\int ||f(g)||_A dg$ et $C^*_{\mathrm{red}}(G,A)$ comme la complétion pour la norme d'opérateur de la convolution à gauche sur le A-module hilbertien $L^2(G,A)$. On rappelle que $L^2(G,A)$ est le complété du A-module pré-hilbertien $C_c(G,A)$, dont la structure de A-module à droite est donnée par

$$(\int e_g a(g) dg) b = \int e_g a(g) b dg$$

et dont le produit hermitien est donné par

$$\langle \int e_g a(g) dg, \int e_g b(g) dg \rangle = \int a(g)^* b(g) dg.$$

Si on écrit les éléments du A-module pré-hilbertien $C_c(G,A)$ sous la forme $\int a(g)e_g dg$ les formules sont un peu plus compliquées.

On note $\underline{E}G$ un G-espace propre qui est final dans la catégorie dont les objets sont les G-espaces propres et dont les morphismes sont les G-morphismes à homotopie près. Pour toute G-C^*-algèbre A et pour $j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ on pose

$$K_j^{\mathrm{top}}(G,A) = \varinjlim KK_G^j(C_0(Y),A)$$

où la limite est prise suivant les parties G-invariantes et G-compactes Y de $\underline{E}G$. On a un morphisme de groupes abéliens, dit morphisme d'assemblage ou application de Baum-Connes,

$$\mu_{\mathrm{red}}^{G,A} : K_j^{\mathrm{top}}(G,A) \to K_j(C^*_{\mathrm{red}}(G,A)).$$

La conjecture de Baum-Connes à coefficients [**BCH94**] affirme que $\mu_{\mathrm{red}}^{G,A}$ est un isomorphisme de groupes abéliens. Higson, Skandalis et moi-même [**HLS02**] avons trouvé des contre-exemples à la surjectivité de l'application de Baum-Connes à coefficients pour certains groupes discrets construits par Gromov (pour lesquels on ne sait pas construire un élément γ au sens suivant).

On supposera toujours que G possède un élément γ de Kasparov. Dans [**Tu99a**], Jean-Louis Tu a axiomatisé les propriétés d'un élément γ, essentiellement sous la forme suivante. On appelle élément γ un élément de $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ tel que $\gamma = \eta \otimes_B d$ avec B une G-C^*-algèbre propre, $\eta \in KK_G(\mathbb{C},B)$ et $d \in KK_G(B,\mathbb{C})$, et que pour toute partie G-compacte Y de $\underline{E}G$, $q^*(\gamma) = 1$ dans $KK_{G\ltimes Y}(C_0(Y),C_0(Y))$ où q est la projection de Y vers le point (on renvoie à [**Gal99**] pour la notation $KK_{G\ltimes Y}$). Ces conditions impliquent que $\gamma^2 = \gamma$ dans $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$.

Sous cette hypothèse, pour toute G-C^*-algèbre A, $\mu_{\mathrm{red}}^{G,A}$ est injective et son image est égale à celle de l'action sur $K_*(C^*_{\mathrm{red}}(G,A))$ de l'idempotent $j^G_{\mathrm{red}} \circ \sigma_A(\gamma)$. On rappelle que les morphismes d'anneaux

$$\sigma_A : KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C}) \to KK_G(A,A)$$

$$\text{et} \qquad j^G_{\mathrm{red}} : KK_G(A,A) \to KK(C^*_{\mathrm{red}}(G,A), C^*_{\mathrm{red}}(G,A))$$

ont été construits par Kasparov [**Kas88**]. Donc la surjectivité de $\mu_{\mathrm{red}}^{G,A}$ équivaut au fait que $j^G_{\mathrm{red}} \circ \sigma_A(\gamma)$ agit par l'identité sur $K_*(C^*_{\mathrm{red}}(G,A))$.

D'après [**Kas88, KS91, KS94, KS03**] les groupes de Lie réels ou p-adiques et les groupes "boliques" (donc en particulier les groupes hyperboliques) possèdent un élément γ.

2. Quelques méthodes pour montrer la surjectivité de l'application de Baum-Connes à coefficients

Nous indiquons les principales méthodes pour montrer la surjectivité de $\mu_{\mathrm{red}}^{G,A}$ pour un groupe localement compact G possédant un élément γ de Kasparov. Elles s'appuient toutes sur la construction d'une certaine homotopie de 1 à γ.

2.1. Homotopie par des représentations unitaires. La première méthode pour montrer la conjecture de Baum-Connes à coefficients arbitraires pour G est due à Kasparov et consiste à montrer $\gamma = 1$ dans $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ (voir [**Jul98**] pour un séminaire Bourbaki sur ce sujet). Cela a été fait pour $SO(n,1)$ [**Kas84**], les groupes agissant proprement sur des arbres [**JV84**] (voir aussi [**Pim86**]), $SU(n,1)$ [**JK95**], et enfin dans le cas des groupes de Haagerup qui contient tous les cas précédents [**HK01**]. Un groupe est dit de Haagerup ou encore a-T-menable s'il possède une action isométrique affine continue et propre sur un espace de Hilbert. Tous les groupes moyennables ont la propriété de Haagerup. Cependant on sait que $\gamma \neq 1$ dans $KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ si G a la propriété (T) de Kazhdan et n'est pas compact. Nous ne donnons pas plus de détails sur ces importants travaux car l'objet de cet article est l'obstacle de la propriété (T).

2.2. Homotopie par des représentations non unitaires dans des espaces de Hilbert. La rédaction de ce paragraphe a été très influencée par des discussions avec Guoliang Yu, qui m'a indiqué les références [**Mat07, Roe05**] et que je remercie.

Dans [**Jul97**], Julg a proposé d'utiliser des représentations bornées non unitaires dans des Hilbert pour montrer la conjecture de Baum-Connes à coefficients pour $Sp(n, 1)$. En 1999, Higson, Julg et moi-même avons discuté de la possibilité d'utiliser des représentations à croissance exponentielle arbitrairement petite. Cette méthode permet de montrer la conjecture de Baum-Connes à coefficients pour $Sp(n, 1)$ [**Jul02**] et pour les groupes hyperboliques [**Laf09**]. Cette méthode est explicitée dans le corollaire 2.12, qui résulte du théorème 2.3 et de la proposition 2.10.

Le théorème 2.3, dont l'idée est due à Nigel Higson, affirme que si un groupe localement compact G possède un élément γ de Kasparov et agit de façon continue, isométrique et propre sur un espace de dimension asymptotique finie avec contrôle linéaire, l'existence d'homotopies de 1 à γ, utilisant des représentations dans des espaces de Hilbert dont la croissance est contrôlée par une exponentielle arbitrairement petite, implique la surjectivité de l'application de Baum-Connes à coefficients. La notion de dimension asymptotique est due à Gromov [**Gro93**]. D'autre part la proposition 2.10 rappelle, d'après Gromov [**Gro93**] et Roe [**Roe05**], que tout espace métrique faiblement géodésique, hyperbolique et à géométrie grossière bornée est de dimension asymptotique finie avec contrôle linéaire.

Définition 2.1. *Soit $N \in \mathbb{N}$ et $(\mu_0, \mu_1) \in \mathbb{R}_+^2$. Un espace métrique (X, d) est de dimension asymptotique $\leq N$ avec contrôle linéaire (μ_0, μ_1) si pour tout $d \in \mathbb{R}_+$ il existe une partition $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ et une application "couleur" $c : I \to \{0, 1, \ldots, N\}$ telles que*

- *pour tout $i \in I$, X_i est mesurable et $\operatorname{diam}(X_i) \leq \mu_0 d + \mu_1$,*
- *pour $i, j \in I$ vérifiant $c(i) = c(j)$ et $i \neq j$ on a $d(X_i, X_j) > d$, où l'on note $d(X_i, X_j) = \inf_{y \in X_i, z \in X_j} d(y, z)$.*

Remarque. La propriété de dimension asymptotique finie avec contrôle linéaire est invariante par quasi-isométrie.

Définition 2.2. *Soit G un groupe localement compact. On appelle longueur sur G une fonction continue $\ell : G \to \mathbb{R}_+$ vérifiant $\ell(g^{-1}) = \ell(g)$ et $\ell(g_1 g_2) \leq \ell(g_1) + \ell(g_2)$ pour tous $g, g_1, g_2 \in G$.*

Soit G un groupe localement compact et ℓ une longueur sur G. Pour toutes G-C^*-algèbres A et B on définit $E_{G,\ell}(A, B)$ comme l'ensemble des classes d'isomorphisme de (E, π, T) où E est un (A, B)-bimodule hilbertien $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué muni d'une action continue de G vérifiant $\|\pi(g)\| \leq e^{\ell(g)}$ pour tout $g \in G$, et d'un opérateur T borné impair tel que pour tout $a \in A$ les opérateurs $[a, T]$ et $a(T^2 - 1)$ soient compacts et que l'application $g \mapsto a(g(T) - T)$ soit une application normiquement continue de G dans $\mathcal{K}_B(E)$. On définit ensuite $KK_{G,\ell}(A, B)$ comme l'ensemble des classes d'homotopie dans $E_{G,\ell}(A, B)$: deux éléments sont homotopes si ils sont les évaluations en 0 et 1 d'un élément de $E_{G,\ell}(A, B[0,1])$. On rappelle que $B[0,1] = C([0,1], B)$ muni de la norme du supremum. On peut montrer que la somme directe munit $KK_{G,\ell}(A,B)$ d'une structure de groupe abélien.

En particulier $E_{G,\ell}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme de (H,π,T) où H est un espace de Hilbert $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué muni d'une action continue de G vérifiant $\|\pi(g)\| \leq e^{\ell(g)}$ pour tout $g \in G$, et d'un opérateur T borné impair tel que (T^2-1) soit compact et que l'application $g \mapsto g(T) - T$ soit une application normiquement continue de G dans $\mathcal{K}(H)$.

Le théorème suivant repose sur des idées de Nigel Higson.

Théorème 2.3. *Soit G un groupe localement compact agissant de façon isométrique et continue sur un espace métrique (X,d) de dimension asymptotique finie avec contrôle linéaire. Soit x_0 un point de X et ℓ la longueur sur G définie par $\ell(g) = d(x_0, gx_0)$. Soit $\gamma \in KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ tel que pour tout $s>0$, il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que l'image de $1-\gamma$ dans $KK_{G,s\ell+C}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ soit nulle. Alors pour toute G-C^*-algèbre A, $j^G_{\mathrm{red}} \circ \sigma_A(\gamma)$ agit par l'identité sur $K_*(C^*_{\mathrm{red}}(G,A))$.*

Le théorème résultera de la conjonction des propositions 2.5 et 2.6.

Pour toute longueur ℓ sur G on note $\mathcal{E}_{G,\ell}$ la classe des représentations (H,π) de G dans un espace de Hilbert H telles que $\|\pi(g)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq e^{\ell(g)}$ pour tout $g \in G$ et on définit l'algèbre de Banach $\mathcal{C}_\ell(G,A)$ comme la complétion de $C_c(G,A)$ pour la norme

$$\|f\|_{\mathcal{C}_\ell(G,A)} = \sup_{(H,\pi)\in\mathcal{E}_{G,\ell}} \|\alpha(f)\|_{\mathcal{L}_A(H\otimes L^2(G,A))}$$

où le morphisme $\alpha : C_c(G,A) \to \mathcal{L}_A(H \otimes L^2(G,A))$ est donné par la formule

$$\alpha(\int_G a(g)e_g dg)(h \otimes (\int_G b(g)e_g dg)) = \int_{G\times G} \pi(g_1)h \otimes a(g_1)g_1(b(g_2))e_{g_1g_2}dg_1dg_2.$$

Si ℓ et ℓ' sont deux longueurs avec $\ell'(g) \leq \ell(g)$ pour tout $g \in G$, on a un morphisme d'algèbres de Banach de $\mathcal{C}_\ell(G,A)$ dans $\mathcal{C}_{\ell'}(G,A)$.

On note que $\mathcal{E}_{G,0}$ est la classe des représentations unitaires de G. Le lemme suivant est un des ingrédients de la construction de la descente de Kasparov [**Kas88**] dans le cas particulier qui nous intéresse, c'est-à-dire

$$j^G_{\mathrm{red}} \circ \sigma_A : KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C}) \to KK(C^*_{\mathrm{red}}(G,A), C^*_{\mathrm{red}}(G,A)).$$

Lemme 2.4. *On a $\mathcal{C}_0(G,A) = C^*_{\mathrm{red}}(G,A)$.*

Démonstration. Bien que ce lemme soit très connu, nous en rappelons la démonstration, car la démonstration du lemme 2.7 ci-dessous repose sur la même idée. Soit (H,π) une représentation unitaire de G. On doit montrer que α se prolonge en un morphisme de C^*-algèbres $\alpha : C^*_{\mathrm{red}}(G,A) \to \mathcal{L}_A(H \otimes L^2(G,A))$. Soit $g_0 \in G$. Notons θ_{g_0} l'opérateur unitaire sur le A-module hilbertien $H \otimes L^2(G,A)$ défini par

$$\theta_{g_0}(h \otimes \int_G a(g)e_g dg) = \int_G \pi(g_0 g^{-1})h \otimes a(g)e_g dg.$$

D'autre part notons $\beta : C^*_{\mathrm{red}}(G,A) \to \mathcal{L}_A(H \otimes L^2(G,A))$ le morphisme défini par

$$\beta(\int_G a(g)e_g dg)(h \otimes (\int_G b(g)e_g dg)) = h \otimes \int_{G\times G} a(g_1)g_1(b(g_2))e_{g_1g_2}dg_1dg_2.$$

On a alors $\alpha(a)=\theta_{g_0}^{-1}\circ\beta(a)\circ\theta_{g_0}$ pour tout $a\in C_c(G,A)$, donc α se prolonge par continuité à $C^*_{\mathrm{red}}(G,A)$. Ceci achève la démonstration du lemme 2.4. $\square$

Proposition 2.5. *Pour toute longueur ℓ sur G on a un morphisme de descente*

$$j_{\mathrm{red}}^{G,\ell,A}: KK_{G,\ell}(\mathbb{C},\mathbb{C})\to KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{C}_\ell(G,A),C^*_{\mathrm{red}}(G,A))$$

qui coïncide avec $j^G_{\mathrm{red}}\circ\sigma_A$ si $\ell=0$ et tel que si ℓ et ℓ' sont deux longueurs avec $\ell'(g)\leq\ell(g)$ pour tout $g\in G$, le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} KK_{G,\ell'}(\mathbb{C},\mathbb{C}) & \xrightarrow{j_{\mathrm{red}}^{G,\ell',A}} & KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{C}_{\ell'}(G,A),C^*_{\mathrm{red}}(G,A)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ KK_{G,\ell}(\mathbb{C},\mathbb{C}) & \xrightarrow{j_{\mathrm{red}}^{G,\ell,A}} & KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{C}_{\ell}(G,A),C^*_{\mathrm{red}}(G,A)) \end{array}$$

Remarque. Nous utiliserons le diagramme commutatif ci-dessus avec $\ell'=0$.
Remarque. On pourrait aussi construire pour deux G-C^*-algèbres A et B un morphisme de descente

$$KK_{G,\ell}(A,B)\to KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{C}_{\ell,B}(G,A),C^*_{\mathrm{red}}(G,B))$$

en définissant $\mathcal{C}_{\ell,B}(G,A)$ comme le complété de $C_c(G,A)$ pour la norme d'opérateur sur les $C^*_{\mathrm{red}}(G,B)$-modules hilbertiens $C^*_{\mathrm{red}}(G,E)$ avec E un (A,B)-bimodule hilbertien muni d'une action continue de G vérifiant $\|\pi(g)\|\leq e^{\ell(g)}$ pour tout $g\in G$. Nous n'en aurons pas besoin.
Démonstration de la proposition 2.5. En suivant **[Kas88]**, si $(H,\pi,T)\in E_{G,\ell}(\mathbb{C},\mathbb{C})$, on construit

$$j_{\mathrm{red}}^{G,\ell,A}(H,\pi,T)\in E^{\mathrm{ban}}(\mathcal{C}_\ell(G,A),C^*_{\mathrm{red}}(G,A))$$

de la manière suivante. On considère le $C^*_{\mathrm{red}}(G,A)$-module hilbertien

$$E=H\otimes C^*_{\mathrm{red}}(G,A)$$

et on définit un morphisme $\alpha':C_c(G,A)\to\mathcal{L}_{C^*_{\mathrm{red}}(G,A)}(E)$ par la formule évidente

$$\alpha'(\int_G a(g)e_g dg)(h\otimes(\int_G b(g)e_g dg))=\int_{G\times G}\pi(g_1)h\otimes a(g_1)g_1(b(g_2))e_{g_1g_2}dg_1dg_2.$$

Comme $\mathcal{L}_{C^*_{\mathrm{red}}(G,A)}(E)$ s'injecte isométriquement dans $\mathcal{L}_A(H\otimes L^2(G,A))$, et que la composée de α' et de cette injection est

$$\alpha:C_c(G,A)\to\mathcal{L}_A(H\otimes L^2(G,A))$$

considéré précédemment, et par la définition même de $\mathcal{C}_\ell(G,A)$, α se prolonge par continuité en un morphisme $\mathcal{C}_\ell(G,A)\to\mathcal{L}_{C^*_{\mathrm{red}}(G,A)}(E)$. On définit d'autre part $\tilde{T}=T\otimes 1\in\mathcal{L}_{C^*_{\mathrm{red}}(G,A)}(E)$ et on pose $j_{\mathrm{red}}^{G,\ell,A}(H,\pi,T)=(E,\tilde{T})$. $\square$

Proposition 2.6. *Soient $N\in\mathbb{N}$ et $(\mu_0,\mu_1)\in\mathbb{R}_+^2$. Soit G un groupe localement compact agissant de façon isométrique et continue sur un espace métrique (X,d) de dimension asymptotique finie $\leq N$ avec contrôle linéaire (μ_0,μ_1). Soit x_0 un point de X et ℓ la longueur sur G définie par $\ell(g)=d(x_0,gx_0)$. Soit A une G-C^*-algèbre. Pour tout $r\in\mathbb{R}_+$ on note B_r l'ensemble des éléments de G qui vérifient $\ell(g)\leq r$. Pour $f\in C_c(G,A)$ on note* $\mathrm{supp}(f)$ *l'adhérence dans G du sous-ensemble des g tels que $f(g)\neq 0$.*

Alors pour tous $s > 0$, $C \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in C_c(G, A)$ avec $\mathrm{supp}(f) \subset B_r$, *on a*

$$\|f\|_{\mathcal{C}_{s\ell+C}(G,A)} \leq (N+1)e^{(4\mu_0+1)sr+(2\mu_1 s+2C)}\|f\|_{C^*_{\mathrm{red}}(G,A)}.$$

Démonstration du théorème 2.3 en admettant la proposition 2.6. On désigne par ρ le rayon spectral. Il résulte immédiatement de la proposition 2.6 que pour tous $s \in \mathbb{R}_+^*$, $C \in \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{R}_+$ et pour toute fonction $f \in C_c(G, A)$ telle que $\mathrm{supp}(f) \subset B_r$ on a

$$\rho_{\mathcal{C}_{s\ell+C}(G,A)}(f) \leq e^{(4\mu_0+1)sr}\rho_{C^*_{\mathrm{red}}(G,A)}(f). \tag{1}$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ soit $C_i \in \mathbb{R}_+$ tel que l'image de $1-\gamma$ dans $KK_{G,\frac{1}{i}\ell+C_i}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ soit nulle. Par la proposition 2.5, $j^G_{\mathrm{red}} \circ \sigma_A(\gamma)$ agit par l'identité sur l'image de $K_*(\mathcal{C}_{\frac{1}{i}\ell+C_i}(G,A))$ dans $K_*(C^*_{\mathrm{red}}(G,A))$. Il résulte alors de l'inégalité (1), appliquée à $A \otimes M_k(\mathbb{C})$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, et aux longueurs $\frac{1}{i}\ell + C_i$, que la suite d'algèbres de Banach $(\mathcal{C}_{\frac{1}{i}\ell+C_i}(G,A))_{i\in\mathbb{N}^*}$ vérifie les hypothèses du lemme 1.7.2 de [**Laf02a**]. Par conséquent $K_*(C^*_{\mathrm{red}}(G,A))$ est égal à la réunion des images de $K_*(\mathcal{C}_{\frac{1}{i}\ell+C_i}(G,A))$ et on a montré le théorème 2.3 en admettant la proposition 2.6. $\square$

Voici maintenant la démonstration de la proposition 2.6, dont l'idée est due à Nigel Higson.

On plonge G dans X par $\kappa : g \mapsto g^{-1}x_0$. On munit G de la distance invariante à droite d définie par $d(g,g') = d(\kappa(g),\kappa(g')) = \ell(g'g^{-1})$.

Soient $s > 0$, $C \in \mathbb{R}_+$ et (H,π) dans $\mathcal{E}_{G,s\ell+C}$.

Lemme 2.7. *Soit $m, r \in \mathbb{R}_+$, $f \in C_c(G,A)$ avec* $\mathrm{supp}(f) \subset B_r$, *et $w \in H \otimes L^2(G,A)$ tel que* $\mathrm{supp}(w)$ *a un diamètre inférieur ou égal à m pour la distance ci-dessus (c'est-à-dire de façon équivalente* $\kappa(\mathrm{supp}(w))$ *a un diamètre inférieur ou égal à m). Alors*

$$\|\alpha(f)w\|_{H\otimes L^2(G,A)} \leq e^{s(2m+r)+2C}\|f\|_{C^*_{\mathrm{red}}(G,A)}\|w\|_{H\otimes L^2(G,A)}.$$

Démonstration. Soit $g_0 \in \mathrm{supp}(w)$. On a $\alpha(f)w = \theta_{g_0}^{-1}(\beta(f)\theta_{g_0}(w))$. Pour $w' \in H \otimes L^2(G,A)$ tel que $\mathrm{supp}(w')$ est inclus dans la boule fermée de centre g_0 et de rayon R, on a $\|\theta_{g_0}(w')\|_{H\otimes L^2(G,A)} \leq e^{sR+C}\|w'\|_{H\otimes L^2(G,A)}$ et de même pour $\theta_{g_0}^{-1}$, ce qui démontre le lemme, car $\mathrm{supp}(w)$ est inclus dans la boule fermée de centre g_0 et de rayon m et $\mathrm{supp}(\beta(f)\theta_{g_0}(w))$ est inclus dans la boule fermée de centre g_0 et de rayon $m + r$. $\square$

Démonstration de la proposition 2.6. Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in C_c(G,A)$ avec $\mathrm{supp}(f) \subset B_r$. Soit $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ une partition et $c : I \to \{0,1,\ldots,N\}$ une application couleur, satisfaisant les conditions de la définition 2.1 avec $d = 2r$. Pour tout $i \in I$, on note p_i le projecteur orthogonal de $H \otimes L^2(G,A)$ sur $H \otimes L^2(\kappa^{-1}(X_i),A)$. Pour tout $j \in \{0,1,\ldots,N\}$ on note q_j le projecteur orthogonal de $H \otimes L^2(G,A)$ sur $H \otimes L^2(\kappa^{-1}(\bigcup_{i\in I, c(i)=j} X_i),A)$. On a $\alpha(f) = \sum_{j=0}^N \alpha(f)q_j$ donc il suffit de montrer, pour tout $j \in \{0,1,\ldots,N\}$,

$$\|\alpha(f)q_j\|_{\mathcal{L}(H\otimes L^2(G,A))} \leq e^{(4\mu_0+1)sr+(2\mu_1 s+2C)}\|f\|_{C^*_{\mathrm{red}}(G,A)}.$$

Pour $i \in I$ et $w \in H \otimes L^2(\kappa^{-1}(X_i),A)$, $\alpha(f)w$ est supporté par

$$\kappa^{-1}(\{x \in X, d(x,X_i) \leq r\}).$$

Soit $j \in \{0, 1, \ldots, N\}$. Par hypothèse les parties $\{x \in X, d(x, X_i) \leq r\}$ de X, pour i vérifiant $c(i) = j$, sont deux à deux disjointes. Donc

$$\|\alpha(f)q_j\|_{\mathcal{L}(H\otimes L^2(G,A))} = \sup_{i\in I, c(i)=j} \|\alpha(f)p_i\|_{\mathcal{L}(H\otimes L^2(G,A))}.$$

Enfin pour tout $i \in I$ et $w \in H \otimes L^2(G, A)$ on a

$$\|\alpha(f)p_i w\|_{H\otimes L^2(G,A)} \leq e^{(4\mu_0+1)sr+(2\mu_1 s+2C)} \|f\|_{C^*_{\mathrm{red}}(G,A)} \|w\|_{H\otimes L^2(G,A)}$$

grâce au lemme 2.7 puisque $p_i w$ est supporté sur $\kappa^{-1}(X_i)$ dont le diamètre est inférieur ou égal à $2\mu_0 r + \mu_1$. $\square$

Définition 2.8. *Soit $\delta \geq 0$ et (X, d) un espace métrique. On dit que (X, d) est δ-hyperbolique si pour tout quadruplet (x, y, z, t) de points de X on a*

$$d(x, z) + d(y, t) \leq \max\big(d(x, t) + d(y, z), d(x, y) + d(z, t)\big) + \delta.$$

On dit que (X, d) est faiblement δ-géodésique si pour tous $x, y \in X$ et pour tout $s \in [0, d(x, y) + \delta]$ il existe $z \in X$ tel que $d(x, z) \leq s$ et $d(z, y) \leq d(x, y) - s + \delta$.

Un espace métrique (X, d) est dit hyperbolique (resp. faiblement géodésique) s'il existe $\delta \geq 0$ tel que (X, d) soit δ-hyperbolique (resp. faiblement δ-géodésique).

Définition 2.9. *Un espace métrique (X, d) est dit à géométrie grossière bornée s'il existe $\Delta > 0$ tel que pour tout $R > 0$ il existe un entier N tel que dans toute boule fermée de rayon R le nombre maximal de points dont les distances mutuelles sont supérieures ou égales à Δ est inférieur ou égal à N.*

C'est la définition 3.1 de [**KS03**].

La proposition suivante est due à Gromov ([**Gro93**] page 31) et Roe [**Roe05**]. Nous rappelons la démonstration parce que nos hypothèses sont légèrement différentes de celles de [**Roe05**].

Proposition 2.10. *Tout espace métrique faiblement géodésique, hyperbolique et à géométrie grossière bornée est de dimension asymptotique finie avec contrôle linéaire.*

Plus précisément soit (X, d) un espace métrique, $\delta, \Delta \in \mathbb{R}_+^*$ et $M \in \mathbb{N}^*$ tels que (X, d) soit faiblement δ-géodésique et δ-hyperbolique et que toute boule fermée de rayon $4\delta + 2\Delta$ dans X contienne au plus M points dont les distances mutuelles sont supérieures ou égales à Δ. Alors (X, d) est de dimension asymptotique $\leq 2M - 1$ avec contrôle linéaire $(3, 5\delta + 2\Delta)$.

Lemme 2.11. *Soit $\delta, \epsilon > 0$ et (X, d) un espace métrique δ-hyperbolique. Soient $x_0, x, x', y, y' \in X$ tels que*

$$d(x_0, x') + d(x', x) \leq d(x_0, x) + \epsilon \quad \textit{et} \quad d(x_0, y') + d(y', y) \leq d(x_0, y) + \epsilon. \tag{2}$$

Alors

$$d(x', y') \leq \max(|d(x_0, x') - d(x_0, y')| + \epsilon + 2\delta, d(x, y) - d(x, x') - d(y, y') + 2\epsilon + 2\delta).$$

Démonstration. La propriété d'hyperbolicité pour x, x_0, y', y donne

$$d(x, y') \leq \max(d(x, y) + d(x_0, y') - d(x_0, y), d(x, x_0) + d(y, y') - d(x_0, y)) + \delta$$

d'où l'on déduit grâce à la deuxième partie de (2),

$$d(x, y') \leq \max(d(x, y) - d(y, y'), d(x, x_0) - d(x_0, y')) + \epsilon + \delta. \tag{3}$$

La propriété d'hyperbolicité pour y', x_0, x', x donne

$$d(y',x') \leq \max(d(y',x)+d(x_0,x')-d(x_0,x), d(y',x_0)+d(x,x')-d(x_0,x))+\delta.$$

Grâce à (3), on a

$$d(y',x)+d(x_0,x')-d(x_0,x)$$
$$\leq \max(d(x,y)-d(y,y')+d(x_0,x')-d(x_0,x), d(x_0,x')-d(x_0,y'))+\epsilon+\delta.$$

Par la première moitié de (2),

$$d(x,y)-d(y,y')+d(x_0,x')-d(x_0,x) \leq d(x,y)-d(y,y')-d(x,x')+\epsilon.$$

Enfin par la première moitié de (2),

$$d(y',x_0)+d(x,x')-d(x_0,x) \leq d(x_0,y')-d(x_0,x')+\epsilon.$$

□

Démonstration de la proposition 2.10. D'abord nous choisissons une partie $Y \subset X$ telle que pour tous $y, y' \in Y$ avec $y \neq y'$ on ait $d(y,y') \geq \Delta$, et que Y soit maximale pour cette propriété. Alors tout point de X est à distance $< \Delta$ de Y. On munit Y de la distance induite par X, si bien que toute boule fermée de rayon $4\delta + 2\Delta$ dans Y contient au plus M points. On fixe une application $c_Y : Y \to \{0,\dots,M-1\}$ telle que pour $y, y' \in Y$ vérifiant $c_Y(y) = c_Y(y')$ et $y \neq y'$ on ait $d(y,y') > 4\delta + 2\Delta$. Une telle application existe par le lemme de Zorn car si elle est définie sur $Z \subset Y$, pour tout $z \in Y \setminus Z$ on peut la prolonger à $Z \cup \{z\}$ grâce à la propriété précédente, et par maximalité elle peut donc étre définie sur Y.

Soit $d \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_k = \{x \in X, d(x_0,x) \in [k(d+\delta),(k+1)(d+\delta)[\}.$$

On va définir pour tout $k \in \mathbb{N}$ un ensemble fini I_k muni d'une application $c_k : I_k \to \{0,\dots,M-1\}$, et une partition $A_k = \bigcup_{i \in I_k} X_{k,i}$ avec $X_{k,i}$ mesurable et de diamètre $\leq 3d + 5\delta + 2\Delta$, de telle sorte que la partition $X = \bigcup_{(k,i)\in I} X_{k,i}$, paramétrée par la réunion disjointe $I = \{(k,i), k \in \mathbb{N}, i \in I_k\}$ munie de l'application couleur $c : I \to \{0,\dots,2M-1\}$ définie par $c(k,i) = c_k(i)$ pour $i \in I_k$ avec k pair et $c(k,i) = M + c_k(i)$ pour $i \in I_k$ avec k impair, vérifie les conditions de la définition 2.1.

D'abord on pose $I_0 = \{x_0\}$ et $X_{0,x_0} = A_0$ dont le diamètre est $\leq 2d + 2\delta$. On définit $c_0 : I_0 \to \{0,\dots,M-1\}$ en posant $c_0(x_0) = 0$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on choisit une application mesurable $\mu_k : A_k \to Y$ telle que pour tout $x \in A_k$ il existe $x' \in X$ vérifiant

$$d(x_0,x') \leq (k-\frac{1}{2})(d+\delta) \quad \text{et} \quad d(x',x) \leq d(x_0,x)-(k-\frac{1}{2})(d+\delta)+\delta \tag{4}$$

et tel que $d(x',\mu_k(x)) \leq \Delta$. Une telle application existe car pour tout $x \in X$ un tel x' existe puisque (X,d) est faiblement δ-géodésique, et $d(x',Y) < \Delta$ par construction de Y. On pose alors $I_k = \mu_k(A_k)$, on note

$$c_k : I_k \to \{0,\dots,M-1\}$$

la restriction de c_Y à I_k et pour $i \in I_k$ on note $X_{k,i} = \mu_k^{-1}(i)$. Pour tout $i \in I_k$, le diamètre de $X_{k,i}$ est $\leq 3d + 5\delta + 2\Delta$. En effet pour x, x' comme ci-dessus on a

$$d(x,x') \leq (k+1)(d+\delta)-(k-\frac{1}{2})(d+\delta)+\delta = \frac{3}{2}d+\frac{5}{2}\delta$$

et $d(x',\mu_k(x)) \leq \Delta$, donc pour tout $i \in I_k$, $X_{k,i}$ est inclus dans la boule fermée de centre i et de rayon $\frac{3}{2}d + \frac{5}{2}\delta + \Delta$. Montrons maintenant que pour (k,i) et (l,j)

des éléments distincts de I tels que $c(k,i) = c(l,j)$ on a $d(X_{k,i}, X_{l,j}) \geq d + \delta$. C'est clair si $k \neq l$ car l'hypothèse $c(k,i) = c(l,j)$ implique alors $|k - l| \geq 2$. Pour terminer il suffit donc de montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in A_k$ tels que $d(x,y) \leq d+\delta$, on a $d(\mu_k(x), \mu_k(y)) \leq 4\delta + 2\Delta$. Soient $x', y' \in X$ vérifiant (4) ainsi que la même condition pour y, y' et tels que $d(x', \mu_k(x)) \leq \Delta$ et $d(y', \mu_k(y)) \leq \Delta$. Alors $d(x_0, x')$ et $d(x_0, y')$ appartiennent à $[(k - \frac{1}{2})(d+\delta) - \delta, (k - \frac{1}{2})(d+\delta)]$, donc $|d(x_0, x') - d(x_0, y')| \leq \delta$. De plus $d(x, x') \geq d(x_0, x) - d(x_0, x') \geq \frac{d+\delta}{2}$ et de même $d(y, y') \geq \frac{d+\delta}{2}$. En appliquant le lemme 2.11 à x_0, x, x', y, y' avec $\epsilon = \delta$ on en déduit $d(x', y') \leq 4\delta$ et donc

$$d(\mu_k(x), \mu_k(y)) \leq 4\delta + 2\Delta.$$

$\square$

Corollaire 2.12. *Soit G un groupe localement compact agissant de façon isométrique, continue et propre sur un espace métrique (X,d) hyperbolique, faiblement géodésique et à géométrie grossière bornée. Soit x_0 un point de X et ℓ la longueur sur G définie par $\ell(g) = d(x_0, gx_0)$. Soit $\gamma \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ l'élément défini sous ces hypothèses par Kasparov et Skandalis* [**KS03**]. *Supposons que pour tout $s > 0$ il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que l'image de $1 - \gamma$ dans $KK_{G,s\ell+C}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ soit nulle. Alors G vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients, c'est-à-dire que pour toute G-C^*-algèbre A, $\mu_{\mathrm{red}}^{G,A} : K_*^{\mathrm{top}}(G,A) \to K_*(C^*_{\mathrm{red}}(G,A))$ est une bijection.*

Démonstration. D'après [**KS03**] $\mu_{\mathrm{red}}^{G,A}$ est injective et son image est égale à l'image de l'idempotent de $\mathrm{End}(K_*(C^*_{\mathrm{red}}(G,A)))$ qui est associé à $j^G_{\mathrm{red}}(\sigma_A(\gamma))$. Il suffit donc de montrer que $j^G_{\mathrm{red}}(\sigma_A(\gamma))$ agit par l'identité sur $K_*(C^*_{\mathrm{red}}(G,A))$. Cela résulte de la conjonction du théorème 2.3 et de la proposition 2.10. $\square$

Remarque. Comme la propriété de dimension asymptotique finie avec contrôle linéaire passe aux produits, le corollaire 2.12 est encore vrai si (X,d) est un produit fini d'espaces métriques hyperboliques, faiblement géodésiques et à géométrie grossière bornée.

Remarque. D'après [**Mat07, BD06, CG04**] les espaces symétriques et les immeubles affines sont de dimension asymptotique finie. Par les mêmes arguments on vérifie facilement qu'ils sont de dimension asymptotique finie avec contrôle linéaire. Donnons l'idée, pour la commodité du lecteur. Comme la propriété de dimension asymptotique finie avec contrôle linéaire passe aux sous-espaces, il suffit de le montrer pour G/K, avec $G = SL_n(F)$, F un corps local, et K un sous-groupe compact maximal de G. Si B est le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures, on a $G/K = B/B \cap K$ et B est un produit semi-direct itéré de groupes abéliens. Or la propriété de dimension asymptotique finie avec contrôle linéaire passe aux produits semi-directs et est vraie pour ces groupes abéliens.

Donc par exemple pour montrer la conjecture de Baum-Connes à coefficient pour $SL_3(\mathbb{Q}_p)$ il suffirait de construire des homotopies reliant 1 à l'élément γ de [**KS91**], comme dans les hypothèses du théorème 2.3. Malheureusement nous verrons plus loin qu'à cause de la propriété (T) renforcée, quelle que soit la longueur ℓ sur $G = SL_3(\mathbb{Q}_p)$, il existe $s > 0$ tel que pour tout $C \in \mathbb{R}_+$, $\gamma \neq 1$ dans $KK_{G,s\ell+C}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. La propriété (T) renforcée est satisfaite par tous les groupes presque simples sur un corps local dont l'algèbre de Lie contient $\mathfrak{sl}_3$ et on s'attend à ce qu'elle soit satisfaite par tous les groupes presque simples sur un corps local dont le rang déployé est ≥ 2.

2.3. Méthode banachique. Une complétion $\mathcal{A}(G)$ de $C_c(G)$ est dite inconditionnelle si $\|f\|$ ne dépend que $g \mapsto |f(g)|$. Pour toute G-C^*-algèbre A on définit alors $\mathcal{A}(G,A)$ comme la complétion de $C_c(G,A)$ pour la norme $\left\|g \mapsto \|f(g)\|_A\right\|_{\mathcal{A}(G)}$. On construit dans [**Laf02a**] (juste avant la proposition 1.7.4) une application d'assemblage $\mu_{\mathcal{A}}^{G,A} : K_j^{\mathrm{top}}(G,A) \to K_j(\mathcal{A}(G,A))$. Si on a $\|f\|_{C^*_{\mathrm{red}}(G)} \leq \|f\|_{\mathcal{A}(G)} = \|f^*\|_{\mathcal{A}(G)}$ pour tout $f \in C_c(G)$, d'après les propositions 1.6.4 et 1.7.6 de [**Laf02a**], l'identité de $C_c(G,A)$ s'étend en un morphisme $i : \mathcal{A}(G,A) \to C^*_{\mathrm{red}}(G,A)$ et on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} K_j^{\mathrm{top}}(G,A) \arrow[r, "\mu_{\mathcal{A}}^{G,A}"] \arrow[dr, "\mu_{\mathrm{red}}^{G,A}"'] & K_j(\mathcal{A}(G,A)) \arrow[d, "i_*"] \\ & K_j(C^*_{\mathrm{red}}(G,A)) \end{tikzcd}$$

La conjecture de Bost (initialement formulée pour $\mathcal{A} = L^1$) affirme que $\mu_{\mathcal{A}}^{G,A}$ est un isomorphisme pour tout groupe G, toute complétion inconditionnelle $\mathcal{A}$ et toute G-C^*-algèbre A. On ne connait pas de contre-exemples à cette conjecture. Nous ne nous intéressons ici qu'à la surjectivité de $\mu_{\mathcal{A}}^{G,A}$ et $\mu_{\mathrm{red}}^{G,A}$. Dans [**Laf02a**] on a montré que si G a un élément γ et si

(C1) *il existe une longueur ℓ sur G telle que, pour tout $s > 0$, on ait $\gamma = 1$ dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C},\mathbb{C})$,*

alors pour toute complétion inconditionnelle $\mathcal{A}(G)$ et pour toute G-C^*-algèbre A, $\mu_{\mathcal{A}}^{G,A}$ est une surjection. En effet on note $\mathcal{A}_{s\ell}(G,A)$ le complété de $C_c(G,A)$ pour la norme $\|g \mapsto e^{s\ell(g)}\|f(g)\|_A\|_{\mathcal{A}(G)}$. On rappelle que l'on a introduit dans [**Laf02a**] une descente

$$KK^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}_{s\ell}(G,A), \mathcal{A}(G,A)).$$

Comme $\mathcal{A}(G,A)$ est la limite inductive des $\mathcal{A}_{s\ell}(G,A)$ quand s tend vers 0, $K_*(\mathcal{A}(G,A))$ est la réunion des images des $K_*(\mathcal{A}_{s\ell}(G,A))$. D'autre part (C1) est vrai pour tous les groupes de Lie réels ou p-adiques d'après [**Laf02a**] et pour les groupes hyperboliques d'après [**Laf02a, MY02**].

Remarque. Pour montrer la surjectivité de $\mu_{\mathcal{A}}^{G,A}$ pour toute complétion inconditionnelle $\mathcal{A}(G)$ et pour toute G-C^*-algèbre A, on voit grâce au lemme 1.7.2 de [**Laf02a**] qu'il suffit d'avoir la condition plus faible suivante

(C1′) *il existe une longueur ℓ sur G telle que pour tout $s > 0$, il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que l'on ait $\gamma = 1$ dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell+C}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.*

Cependant on ne connaît pas de cas où (C1′) soit réalisée et pas (C1).

Soit A une G-C^*-algèbre. Faisons l'hypothèse suivante.

(C2) *Il existe une complétion inconditionnelle $\mathcal{A}(G)$ telle que $\mathcal{A}(G,A)$ soit stable par calcul fonctionnel holomorphe dans $C^*_{\mathrm{red}}(G,A)$.*

On rappelle qu'un morphisme injectif d'algèbres de Banach dont l'image est dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe induit un isomorphisme en K-théorie (voir l'appendice de [**Bos90**]). Par conséquent si G a un élément γ et si (C1) et (C2) sont vraies, le diagramme commutatif ci-dessus montre la surjectivité de $\mu_{\mathrm{red}}^{G,A}$.

Malheureusement la condition (C2) n'est pratiquement jamais vraie pour A arbitraire et pour $A = \mathbb{C}$ elle n'est montrée que pour quelques groupes : les groupes de Lie semi-simples réels ou p-adiques [**Laf02a**], et les groupes discrets ayant la propriété (RD), en particulier les groupes hyperboliques et d'après [**RRS98, Laf00, Cha03**] les réseaux cocompacts dans des produits de $SL_3(F)$ avec F corps local, $SL_3(\mathbb{H})$ et $E_{6(-26)}$.

Remarque. Non seulement $SL_3(\mathbb{Z})$, qui est un réseau non cocompact de $SL_3(\mathbb{R})$, n'a pas la propriété (RD), mais la condition (C2) elle-même est fausse pour $G = SL_3(\mathbb{Z})$ avec $A = \mathbb{C}$. En effet soit

$$H = \mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}^2 \text{ où } \mathbb{Z} \text{ agit sur } \mathbb{Z}^2 \text{ par } n \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^n .$$

On sait que H s'identifie à un sous-groupe de G par le morphisme

$$(n, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) \mapsto \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^n & \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Soit $\mathcal{A}(G)$ une complétion inconditionnelle de $\mathbb{C}G$ incluse dans $C^*_{\mathrm{red}}(G)$. Soit $\mathcal{A}(H)$ la complétion de $\mathbb{C}H$ pour la norme de $\mathcal{A}(G)$ (c'est-à-dire l'intersection de $C^*_{\mathrm{red}}(H)$ avec $\mathcal{A}(G)$). Alors $\mathcal{A}(H)$ est une complétion inconditionnelle de $\mathbb{C}H$ incluse dans $C^*_{\mathrm{red}}(H)$. Comme H est moyennable, pour toute fonction positive à support fini f sur H on a $\|f\|_{C^*_{\mathrm{red}}(H)} = \|f\|_{\ell^1(H)}$, donc $\mathcal{A}(H)$ est incluse dans $\ell^1(H)$. Or $\ell^1(H)$ n'est pas stable par calcul fonctionnel holomorphe dans $C^*_{\mathrm{red}}(H)$. La preuve que nous allons donner est très proche de [**Jen68**]. Posons

$$x_i = (1, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}) \in H = \mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}^2 \text{ pour } i = 0, 1, 2.$$

Alors x_0, x_1, x_2 engendrent un semi-groupe libre dans H car, si on note

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

pour $n \in \mathbb{N}$ et $i_0, \ldots, i_{n-1} \in \{0, 1, 2\}^n$ on a

$$x_{i_0} \ldots x_{i_{n-1}} = (n, \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} i_k a_k \\ \sum_{k=0}^{n-1} i_k b_k \end{pmatrix})$$

et comme $a_{k+1} \geq 3a_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ la connaissance de $\sum_{k=0}^{n-1} i_k a_k$ détermine $i_0, \ldots, i_{n-1}$. Donc $e_{x_0} + e_{x_1} - e_{x_2}$ a pour rayon spectral 3 dans $\ell^1(H)$, alors que sa norme dans $C^*_{\mathrm{red}}(H)$ est $\sup_{z \in \mathbb{C}, |z|=1} |1 + z - z^2| < 3$.

Remarque. La conjecture de Baum-Connes à coefficients peut aussi être énoncée pour des groupoïdes [**Tu99a, Tu99b**] en utilisant [**Gal99**]. La notion de complétion inconditionnelle existe aussi dans ce cadre et a été utilisée dans [**Laf07**] pour montrer la conjecture de Baum-Connes sans coefficients pour certains "groupoïdes hyperboliques", en particulier les produits croisés de groupes hyperboliques par des espaces localement compacts. On montre ainsi dans [**Laf07**] la conjecture de Baum-Connes à coefficients commutatifs pour les groupes hyperboliques.

Remarque. Dans tous les cas où une homotopie (E, π, T) de 1 à γ a été construite dans $E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(\mathbb{C}, \mathbb{C}[0,1])$ pour une certaine longueur ℓ, la $\mathbb{C}[0,1]$-paire E est à dualité isométrique au sens de la définition suivante.

Définition 2.13. *Soit B une algèbre de Banach. Une B-paire E est dite à dualité isométrique si les applications B-linéaires $E^> \to \mathcal{L}_B(E^<, B)$ et $E^< \to \mathcal{L}_B(E^>, B)$ sont des injections isométriques.*

Notons qu'à toute B-paire E on peut associer une B-paire $\hat{E}$ à dualité isométrique de la façon suivante : on note $\hat{E}^{>}$ le B-module de Banach complété de $E^{>}$ pour la norme

$$\|x\|_{\hat{E}^{>}} = \sup_{\xi \in E^{<}, \|\xi\|_{E^{<}} \leq 1} \|\langle \xi, x \rangle\|_B.$$

On définit alors $\hat{E}^{<}$ comme le B-module de Banach complété de $E^{<}$ pour la norme

$$\|\xi\|_{\hat{E}^{<}} = \sup_{x \in \hat{E}^{>}, \|x\|_{\hat{E}^{>}} \leq 1} \|\langle \xi, x \rangle\|_B.$$

On vérifie que $\hat{E}$ est une B-paire à dualité isométrique. Le prolongement par continuité donne un morphisme $\mathcal{L}_B(E) \to \mathcal{L}_B(\hat{E})$ qui envoie $\mathcal{K}_B(E)$ dans $\mathcal{K}_B(\hat{E})$ et que l'on note $T \mapsto \hat{T}$. En particulier si G est un groupe localement compact, ℓ une longueur sur G et A et B des G-algèbres de Banach, et si (E, π, T) appartient à $E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A, B)$, $(\hat{E}, \hat{\pi}, \hat{T})$ appartient aussi à $E^{\mathrm{ban}}_{G,\ell}(A, B)$ et en construisant un cône on montre que les deux sont homotopes. Plus bas, dans la condition (D4), nous demanderons que E soit à dualité isométrique, car nous ne savons pas montrer le lemme 4.4 sans cette hypothèse.

3. Un cadre général englobant ces méthodes

Soit G un groupe localement compact possédant un élément γ, et ℓ une longueur sur G. Soit A une G-C^*-algèbre. Toutes les méthodes présentées dans le paragraphe précédent pour montrer la surjectivité de

$$\mu^{G,A}_{\mathrm{red}} : K^{\mathrm{top}}_*(G, A) \to K_*(C^*_{\mathrm{red}}(G, A))$$

(sauf [**Laf07**] mentionné dans l'avant-dernière remarque) obéissent au schéma suivant :

(D) *Pour tout $s > 0$ trouver $C \in \mathbb{R}_+$, et une sous-algèbre de Banach $\mathcal{B}$ de $C^*_{\mathrm{red}}(G, A)$ contenant $C_c(G, A)$, telle que*

- **(D1)** *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*

$$\sup_{f \in C_c(G,A) \text{ supporté dans la boule fermée de rayon } n} \frac{\|f\|_{\mathcal{B}}}{\|f\|_{C^*_{\mathrm{red}}(G,A)}} \leq Ce^{sn}.$$

- **(D2)** *on possède une homotopie (E, π, T) de 1 à γ dans $E^{\mathrm{ban}}_{G,?}(\mathbb{C}, \mathbb{C}[0, 1])$ (où ? indique que la longueur n'est pas précisée, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de condition de norme sur l'action de G) qui fournit par descente un élément $(\tilde{E}, \tilde{\pi}, \tilde{T})$ de $E^{\mathrm{ban}}(\mathcal{B}, C^*_{\mathrm{red}}(G, A)[0, 1])$, tel que $(\tilde{E}^{<}, \tilde{E}^{>})$ soit une complétion de $(C_c(G, A \otimes^{\mathrm{alg}} E^{<}), C_c(G, A \otimes^{\mathrm{alg}} E^{>}))$ pour certaines normes.*

Précisions. On rappelle que pour toute algèbre de Banach B, on note $B[0, 1] = C([0, 1], B)$ muni de la norme du supremum. On ne s'attend pas à avoir en général un morphisme de descente

$$KK^{\mathrm{ban}}_{G,?}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{B}, C^*_{\mathrm{red}}(G, A))$$

(on n'a pas supposé $\mathcal{B}$ de la forme $\mathcal{A}(G, A)$ où $\mathcal{A}(G)$ est une complétion inconditionnelle car avec cette restriction la condition (D1) serait impossible à réaliser dans la plupart des cas). C'est seulement pour l'homotopie particulière (E, π, T) de (D2) que l'on demande une descente, c'est-à-dire l'existence de $(\tilde{E}, \tilde{\pi}, \tilde{T})$ comme ci-dessus, afin de montrer l'égalité entre les images de γ et 1 dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{B}, C^*_{\mathrm{red}}(G, A))$.

Montrons que (D) implique la surjectivité de $\mu_{\mathrm{red}}^{G,A}$. On note $\mathcal{B}_m$ associée à $s = 1/m$. La condition (D1) implique que pour $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in C_c(G,A)$ supportée dans la boule fermée de rayon n on a $\rho_{\mathcal{B}_m}(f) \leq e^{\frac{n}{m}} \rho_{C^*_{\mathrm{red}}(G,A)}(f)$ (et la même condition en remplaçant A par $M_k(A)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$) et donc le lemme 1.7.2 de [**Laf02a**] montre que $K_*(C^*_{\mathrm{red}}(G,A))$ est la réunion des images des $K_*(\mathcal{B}_m)$. Or par la condition (D2), $j^G_{\mathrm{red}} \circ \sigma_A(\gamma)$ agit par l'identité sur l'image de $K_*(\mathcal{B}_m)$ dans $K_*(C^*_{\mathrm{red}}(G,A))$, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

Montrons maintenant que (D) englobe les méthodes du paragraphe précédent. D'abord si $\gamma = 1$ dans $KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, on prend $\mathcal{B} = C^*_{\mathrm{red}}(G,A)$ et la condition (D2) résulte de la descente de Kasparov

$$j^G_{\mathrm{red}} \circ \sigma_A : E_G(\mathbb{C}, \mathbb{C}[0,1]) \to E(C^*_{\mathrm{red}}(G,A), C^*_{\mathrm{red}}(G,A)[0,1]).$$

Pour la méthode du sous-paragraphe 2.2, avec $s > 0$ et $C \in \mathbb{R}_+$ comme dans le théorème 2.3, on prend $\mathcal{B} = \mathcal{C}_{s\ell+C}(G,A)$ et les conditions (D1) et (D2) sont assurées par les propositions 2.6 et 2.5. Enfin pour la méthode banachique décrite dans le sous-paragraphe 2.3, où l'on a $A = \mathbb{C}$, on prend, pour $s > 0$ et $\mathcal{A}(G)$ comme dans les conditions (C1) et (C2), $\mathcal{B} = \mathcal{A}_{s\ell}(G)$.

Remarque. La preuve de la conjecture de Baum-Connes à coefficients commutatifs pour les groupes hyperboliques donnée dans [**Laf07**] et mentionnée à la fin du paragraphe précédent rentre pratiquement dans le cadre de (D) en prenant $A = C_0(Y)$, où Y est un espace localement compact muni d'une action d'un groupe hyperbolique Γ et $\mathcal{B}$ est une certaine complétion inconditionnelle de $C_c(\mathcal{G})$ en notant $\mathcal{G}$ le groupoïde produit croisé de Y par Γ. La condition (D2) est assurée par la descente en KK-théorie banachique pour les groupoïdes (introduite dans [**Laf07**]) mais la condition (D1) n'est pas vérifiée par $\mathcal{B}$ car la stabilité par calcul fonctionnel holomorphe de $\mathcal{B}$ dans $C^*_{\mathrm{red}}(\mathcal{G}) = C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma, C_0(Y))$ est démontrée par une méthode ad hoc. Cette méthode ne se généralise pas à d'autres cas (par exemple dans [**Laf07**] on ne montre pas la conjecture de Baum-Connes à coefficients commutatifs pour un produit de deux groupes hyperboliques).

4. Un obstacle à $(\widetilde{D})$ pour certains groupes

Dans ce paragraphe on se donne un sous-groupe compact ouvert $K \subset G$. On suppose $\int_K dg = 1$ et on note $e_K = \int_K e_g dg \in C_c(G)$. Nous étudierons dans le paragraphe suivant le cas où $G = SL_3(\mathbb{Q}_p)$ et $K = SL_3(\mathbb{Z}_p)$.

On note $(\widetilde{D})$ la réunion de $(D) = (D1) + (D2)$ et de deux conditions techniques (D3) et (D4) que nous expliciterons plus loin. Nous allons définir une propriété (T) renforcée pour G (relativement à K) qui empêche que $(\widetilde{D})$ soit vraie pour toute G-C^*-algèbre A (ou même pour toute G-C^*-algèbre commutative A). Nous noterons ($\mathrm{T}_{\mathrm{Schur}}$) cette propriété car sa définition, qui est adaptée à la conjecture de Baum-Connes, fait intervenir des produits de Schur (voir la remarque après le lemme 4.3). On renvoie à [**CH85, Haa86, CH89, Dor93, CDSW05**] pour des travaux sur l'approximation de la fonction constante égale à 1 par des éléments de l'algèbre de Fourier dont les normes de Schur sont bornées (ce problème est lié à l'étude des représentations uniformément bornées, alors que nous sommes intéressés dans cet article par les représentations dont la croissance est contrôlée par une exponentielle assez petite). Dans le paragraphe suivant nous montrerons que $SL_3(\mathbb{Q}_p)$ possède ($\mathrm{T}_{\mathrm{Schur}}$) relativement à $SL_3(\mathbb{Z}_p)$. Dans la définition suivante, la C^*-algèbre $C_0(G)$ est munie de l'action de G par translations à droite.

Définition 4.1. *On dit que G a la propriété* ($\mathrm{T}_{\mathrm{Schur}}$) *relativement à K si pour toute longueur ℓ sur G invariante à gauche et à droite par K, il existe $s>0$ et une fonction $\phi : G \to \mathbb{R}_+$ invariante à gauche et à droite par K et tendant vers 0 à l'infini tels que la propriété suivante soit vraie :*

si $c : G \to \mathbb{C}$ est une fonction K-invariante à gauche et à droite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $f \in e_K C_c(G, C_0(G))e_K$ supporté dans $\{g \in G, \ell(g) \leq n\}$ on ait

$$\|g \mapsto c(g)f(g)\|_{C^*_{\mathrm{red}}(G,C_0(G))} \leq e^{sn}\|f\|_{C^*_{\mathrm{red}}(G,C_0(G))}$$

alors c admet une limite à l'infini $c_\infty \in \mathbb{C}$ et on a $|c(g) - c_\infty| \leq \phi(g)$ pour tout $g \in G$.

Remarque. La propriété ($\mathrm{T}_{\mathrm{Schur}}$) que nous venons de définir diffère un peu de la propriété (T) renforcée de la définition 0.1 de [**Laf08**]. Expliquons le rapport logique entre les deux, en nous restreignant au cas où $G = SL_3(\mathbb{Q}_p)$ et $K = SL_3(\mathbb{Z}_p)$ pour pouvoir citer [**Laf08**] (mais ce qui suit reste vrai quels que soient G et K). Le théorème 3.2 de [**Laf08**] montre la propriété (T) renforcée (au sens de la définition 0.1 de [**Laf08**], en oubliant ici la généralisation à certains espaces de Banach) pour $SL_3(\mathbb{Q}_p)$ à l'aide des propositions 3.3 et 3.4 de [**Laf08**] qui donnent des renseignements sur les coefficients de matrice entre vecteurs $SL_3(\mathbb{Z}_p)$-invariants (resp. d'un autre type sous l'action de $SL_3(\mathbb{Z}_p)$). Le rapport logique entre ($\mathrm{T}_{\mathrm{Schur}}$) et (T) renforcé est le suivant : la propriété ($\mathrm{T}_{\mathrm{Schur}}$) pour $G = SL_3(\mathbb{Q}_p)$ relativement à $K = SL_3(\mathbb{Z}_p)$ implique facilement l'énoncé de la proposition 3.3 de [**Laf08**] mais pas celui de la proposition 3.4 de [**Laf08**]. Néanmoins pour tout groupe localement compact G et tout sous-groupe compact ouvert K, si G a la propriété ($\mathrm{T}_{\mathrm{Schur}}$) relativement à K, G a la propriété (T) de Kazhdan (adapter le lemme 3.5 de [**Laf08**] et l'argument qui le précède, qui montrent que la proposition 3.3 de [**Laf08**] implique la propriété (T) de Kazhdan pour $SL_3(\mathbb{Q}_p)$).

Si un groupe localement compact G a la propriété (T) renforcée au sens de la définition 0.1 de [**Laf08**], c'est-à-dire si la représentation triviale est isolée parmi les représentations dans des espaces de Hilbert à croissance exponentielle suffisamment petite, il est clair que la méthode proposée au paragraphe 2.2 ne peut s'appliquer à G. Néanmoins on pourrait imaginer qu'une méthode hybride comme (D) permette de montrer la conjecture de Baum-Connes à coefficients pour G. La proposition 4.2 montre que si G possède la propriété ($\mathrm{T}_{\mathrm{Schur}}$) relativement à un sous-groupe ouvert compact K, la méthode (D) échoue elle aussi pour des coefficients arbitraires. Cependant pour montrer la proposition 4.2 nous devons ajouter à (D) les deux conditions techniques suivantes, qui complètent (D2).

- **(D3)** *La $\mathbb{C}[0,1]$-paire E est à dualité isométrique.*
- **(D4)** *La C^*-algèbre A est unifère, l'action de K sur E est isométrique et le $\mathcal{B}$-$C^*_{\mathrm{red}}(G,A)[0,1]$-bimodule $(\tilde{E}^<, \tilde{E}^>)$ qui est une complétion de*

$$(C_c(G, A \otimes^{\mathrm{alg}} E^<), C_c(G, A \otimes^{\mathrm{alg}} E^>))$$

  vérifie l'estimée suivante. On note χ_K la fonction caractéristique de K. Pour $x \in E^>$ et $\xi \in E^<$ des éléments K-invariants, on note

$$e_K \otimes 1_A \otimes x \in C_c(G, A \otimes^{\mathrm{alg}} E^>) \text{ la fonction } g \mapsto \chi_K(g)1_A \otimes x$$

$$\text{et } e_K \otimes 1_A \otimes \xi \in C_c(G, A \otimes^{\mathrm{alg}} E^<) \text{ la fonction } g \mapsto \chi_K(g)1_A \otimes \xi.$$

Alors on demande

$$\|e_K \otimes 1_A \otimes x\|_{\tilde{E}^>} \leq \|x\|_{E^>} \text{ et } \|e_K \otimes 1_A \otimes \xi\|_{\tilde{E}^<} \leq \|\xi\|_{E^<}.$$

Proposition 4.2. *Si G n'est pas compact et a la propriété $(\mathrm{T}_{\mathrm{Schur}})$ relativement à K, la condition $(\widetilde{D}) = (D1) + (D2) + (D3) + (D4)$ n'est satisfaite pour aucune G-C^*-algèbre commutative unifère A contenant $C_0(G)$ comme sous-G-C^*-algèbre.*

La proposition 4.2 résultera des lemmes 4.3 et 4.4.

Le lemme 4.3 donne des estimées sur les produits de Schur par les coefficients de matrice des représentations intervenant dans une homotopie de 1 à γ, qui sont nécessaires pour que les conditions (D1), (D2) et (D4) soient satisfaites.

Lemme 4.3. *Soit A une G-C^*-algèbre commutative unifère, $s > 0$, $C \in \mathbb{R}_+$. Soit $(E, \pi, T) \in E^{\mathrm{ban}}_{G,?}(\mathbb{C}, \mathbb{C}[0,1])$ une homotopie de 1 à γ telle que, pour une certaine sous-algèbre de Banach $\mathcal{B}$ de $C^*_{\mathrm{red}}(G, A)$ contenant $C_c(G, A)$ les conditions $(D1)$, $(D2)$ et $(D4)$ soient satisfaites.*

Alors pour tout $t \in [0,1]$, pour $x \in E^>_t$ et $\xi \in E^<_t$ des éléments K-invariants, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $f \in e_K C_c(G, A) e_K$ supporté dans $\{g \in G, \ell(g) \leq n\}$ on a, en notant $c(g) = \langle \xi, \pi_t(g) x\rangle$,

$$\|g \mapsto c(g) f(g)\|_{C^*_{\mathrm{red}}(G,A)} \leq C e^{sn} \|f\|_{C^*_{\mathrm{red}}(G,A)} \|x\|_{E^>_t} \|\xi\|_{E^<_t}.$$

Précisons que dans ce lemme, pour $t \in [0,1]$, E_t désigne la $\mathbb{C}$-paire image directe de E par le morphisme $\mathbb{C}[0,1] \to \mathbb{C}$ d'évaluation en t. En particulier $E^>_t = E^> \otimes^\pi_{\mathbb{C}[0,1]} \mathbb{C}$ et $E^<_t = \mathbb{C} \otimes^\pi_{\mathbb{C}[0,1]} E^<$.

Démonstration du lemme 4.3. Soit $t \in [0,1]$, et $x \in E^>_t$ et $\xi \in E^<_t$ des éléments K-invariants. On note

$$e_K \otimes 1_A \otimes x \in C_c(G, A \otimes^{\mathrm{alg}} E^>_t) \text{ la fonction } g \mapsto \chi_K(g) 1_A \otimes x$$

où χ_K désigne la fonction caractéristique de K. De même on note

$$e_K \otimes 1_A \otimes \xi \in C_c(G, A \otimes^{\mathrm{alg}} E^<_t) \text{ la fonction } g \mapsto \chi_K(g) 1_A \otimes \xi.$$

Dans la condition (D) apparaît un $\mathcal{B}$-$C^*_{\mathrm{red}}(G, A)[0,1]$-bimodule $(\tilde{E}^<, \tilde{E}^>)$ qui est une complétion de

$$(C_c(G, A \otimes^{\mathrm{alg}} E^<), C_c(G, A \otimes^{\mathrm{alg}} E^>)).$$

Donc pour tout $t \in [0,1]$, le $\mathcal{B}$-$C^*_{\mathrm{red}}(G, A)$-bimodule $(\tilde{E}^<_t, \tilde{E}^>_t)$ est une complétion de

$$(C_c(G, A \otimes^{\mathrm{alg}} E^<_t), C_c(G, A \otimes^{\mathrm{alg}} E^>_t)).$$

Grâce à la condition (D4), pour tous t, x, ξ comme ci-dessus on a

$$\|e_K \otimes 1_A \otimes x\|_{\tilde{E}^>_t} \leq \|x\|_{E^>_t} \text{ et } \|e_K \otimes 1_A \otimes \xi\|_{\tilde{E}^<_t} \leq \|\xi\|_{E^<_t}.$$

Voici maintenant le calcul fondamental. On pose $c(g) = \langle \xi, \pi_t(g) x\rangle$. Pour tout $f \in e_K C_c(G, A) e_K$ on a

$$\langle e_K \otimes 1_A \otimes \xi, f(e_K \otimes 1_A \otimes x)\rangle = (g \mapsto c(g) f(g)) \in C_c(G, A).$$

Or comme $\tilde{E}_t$ doit être un $\mathcal{B}$-$C^*_{\mathrm{red}}(G, A)$-bimodule, pour $X \in \tilde{E}^>_t$, $\Xi \in \tilde{E}^<_t$ et $f \in C_c(G, A)$ on doit avoir

$$\|\langle \Xi, f X\rangle\|_{C^*_{\mathrm{red}}(G,A)} \leq \|\Xi\|_{\tilde{E}^<_t} \|X\|_{\tilde{E}^>_t} \|f\|_{\mathcal{B}}.$$

On en déduit que pour tout $f \in e_K C_c(G,A)e_K$ on doit avoir

$$\|g \mapsto c(g)f(g)\|_{C^*_{\mathrm{red}}(G,A)} \leq \|\xi\|_{E_t^<}\|x\|_{E_t^>}\|f\|_{\mathcal{B}}. \tag{5}$$

Grâce à la condition (D1) le lemme 4.3 est alors démontré. □

Remarque. Pour toute fonction $c : K\backslash G/K \to \mathbb{C}$, on peut noter

$$\mathrm{Schur}_c : e_K C_c(G,A)e_K \to e_K C_c(G,A)e_K$$

le produit de Schur, qui à $g \mapsto f(g)$ associe $g \mapsto c(g)f(g)$. Alors on peut réexprimer (5) en disant que Schur_c s'étend en une application continue de $e_K\mathcal{B}e_K$ dans $e_K C^*_{\mathrm{red}}(G,A)e_K$ et que

$$\big\|\mathrm{Schur}_c\big\|_{\mathcal{L}(e_K\mathcal{B}e_K, e_K C^*_{\mathrm{red}}(G,A)e_K)} \leq \|\xi\|_{E_t^<}\|x\|_{E_t^>}.$$

LEMME 4.4. *On suppose que G n'est pas compact. Soit $\psi : G \to \mathbb{R}_+$ invariante à gauche et à droite par K et tendant vers 0 à l'infini. Il n'existe pas d'homotopie (E,π,T) de 1 à γ dans $E^{\mathrm{ban}}_{G,?}(\mathbb{C},\mathbb{C}[0,1])$ (où ? indique que la longueur n'est pas précisée), telle que K agisse isométriquement sur E, que E soit à dualité isométrique, et que pour tout $t \in [0,1]$, pour $x \in E_t^>$ et $\xi \in E_t^<$ des éléments K-invariants de norme 1, le coefficient de matrice $c : K\backslash G/K \to \mathbb{C}, g \mapsto \langle \xi, \pi_t(g)x\rangle$, admette une limite à l'infini c_∞ et vérifie $|c(g) - c_\infty| \leq \psi(g)$ pour tout $g \in G$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'une telle homotopie (E,π,T) existe. Pour $g \in G$, on pose $P^g = e_K e_g e_K \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}[0,1]}(E)$. Grâce à l'hypothèse que E est à dualité isométrique, pour $g, g' \in G$ on a $\|P^g - P^{g'}\| \leq \psi(g) + \psi(g')$. Donc P^g est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}_{\mathbb{C}[0,1]}(E)$ (quand g tend vers l'infini) et admet une limite $P \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}[0,1]}(E)$. Comme $P^gP^{g'} = \int_K P^{gkg'}dk$ on montre facilement que P est un idempotent dans $\mathcal{L}_{\mathbb{C}[0,1]}(E)$. De plus pour $t = 0, 1$, P_t est le projecteur orthogonal sur les vecteurs G-invariants (E_0 et E_1 sont des espaces de Hilbert munis de représentations unitaires de G).

Pour tout $g \in G$, $[P^g, T] \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}[0,1]}(E)$, d'où en passant à la limite $[P,T] \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}[0,1]}(E)$. On note $\mathrm{Im}\, P$ la $\mathbb{C}[0,1]$-paire formée des images de $P^>$ et $P^<$ dans $E^>$ et $E^<$. Alors $PTP \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}[0,1]}(\mathrm{Im}\, P)$ et $(PTP)^2 - 1 \in \mathcal{K}_{\mathbb{C}[0,1]}(\mathrm{Im}\, P)$ donc $(\mathrm{Im}\, P, PTP) \in E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},\mathbb{C}[0,1])$. Or $(PTP)_t$ est d'indice 1 pour $t = 0$ et d'indice 0 pour $t = 1$ (en effet E_0 représente 1 dans $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ et comme G n'est pas compact, E_1, qui représente γ, fait intervenir des représentations unitaires de G dans des espaces de Hilbert qui n'admettent pas de vecteurs G-invariants). Cette contradiction achève la démonstration du lemme 4.4. □

Démonstration de la proposition 4.2. On raisonne par l'absurde. On suppose que G n'est pas compact et vérifie ($\mathrm{T}_{\mathrm{Schur}}$) relativement à K. Soit ℓ la longueur fixée avant l'énoncé de (D). Soit A une G-C^*-algèbre commutative unifère contenant $C_0(G)$ comme sous-G-C^*-algèbre, telle que G vérifie la condition ($\widetilde{D}$) pour A. On fixe s et ϕ comme dans ($\mathrm{T}_{\mathrm{Schur}}$). Soit C associé à s dans (D). On applique le lemme 4.3 à A, s et C, puis ($\mathrm{T}_{\mathrm{Schur}}$), puis le lemme 4.4 avec $\psi = C\phi$, et on arrive à une contradiction. □

5. Démonstration de la propriété (T) renforcée pour $SL_3(\mathbb{Q}_p)$

Le but de ce paragraphe est de montrer le théorème suivant.

THÉORÈME 5.1. *Pour tout nombre premier p, $SL_3(\mathbb{Q}_p)$ a la propriété* ($\mathrm{T}_{\mathrm{Schur}}$) *relativement à $SL_3(\mathbb{Z}_p)$, au sens de la définition 4.1.*

On note $G = SL_3(\mathbb{Q}_p)$ et $K = SL_3(\mathbb{Z}_p)$. On rappelle que $C_0(G)$ est muni de l'action de G par translations à droite. On a

$$C^*_{\mathrm{red}}(G, C_0(G)) = \mathcal{K}(L^2(G)).$$

La sous-algèbre $e_K C^*_{\mathrm{red}}(G, C_0(G))e_K$ de $C^*_{\mathrm{red}}(G, C_0(G))$ s'identifie à $\mathcal{K}(\ell^2(G/K))$.

Soit $\Lambda = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2, i - j = 0 \text{ modulo } 3\}$. L'application

$$(i,j) \mapsto K\Big(p^{\frac{i+2j}{3}} \begin{pmatrix} p^{-(i+j)} & 0 & 0 \\ 0 & p^{-j} & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\Big)K$$

est une bijection de Λ vers $K\backslash G/K$. On munit G de la longueur ℓ définie par

$$\ell\Big(k\Big(p^{\frac{i+2j}{3}} \begin{pmatrix} p^{-(i+j)} & 0 & 0 \\ 0 & p^{-j} & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\Big)k'\Big) = i + j$$

pour $k, k' \in K$ et $(i,j) \in \Lambda$.

On note B l'immeuble de G. On rappelle que les sommets de B sont identifiés aux réseaux de $\mathbb{Q}_p^3$, à homothétie près par $\mathbb{Q}_p^*$. Pour tout réseau M on note $[M]$ sa classe d'équivalence. Etant donnés $x, y \in B$ il existe un unique couple $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tel que dans une certaine base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{Q}_p^3$ on ait

$$x = [\mathbb{Z}_p v_1 + \mathbb{Z}_p v_2 + \mathbb{Z}_p v_3] \text{ et } y = [\mathbb{Z}_p p^{-i-j} v_1 + \mathbb{Z}_p p^{-j} v_2 + \mathbb{Z}_p v_3].$$

On écrit $\sigma(x,y) = (i,j)$. On a alors $\sigma(y,x) = (j,i)$. On munit B de la distance d définie par $d(x,y) = i+j$ si $\sigma(x,y) = (i,j)$. Le déterminant d'une classe d'équivalence de réseaux (pour la relation d'homothétie) est bien déterminé dans $\mathbb{Q}_p^*/\mathbb{Z}_p^* p^{3\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (où $p^{-1}\mathbb{Z}_p^* p^{3\mathbb{Z}}$ correspond à $1 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$) et on appelle type : $B \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ la fonction correspondante. On note B^0 l'ensemble des points de B de type 0 et on note $x_0 \in B^0$ la classe d'équivalence du réseau $\mathbb{Z}_p^3$. Comme $SL_3(\mathbb{Q}_p)$ agit transitivement sur B^0 et que le stabilisateur de x_0 est $SL_3(\mathbb{Z}_p)$, on a une bijection $G/K \to B^0$ qui à gK associe gx_0. Pour $x, y \in B^0$ on a $\sigma(x,y) \in \Lambda$. Pour $x, y, x', y' \in B^0$ on a $\sigma(x,y) = \sigma(x',y')$ si et seulement si il existe un élément de $SL_3(\mathbb{Q}_p)$ transportant x sur x' et y sur y'.

Démonstration du théorème 5.1 en admettant la proposition 5.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \in e_K C^*_{\mathrm{red}}(G, C_0(G))e_K$ est supporté sur $B_n = \{g \in G, \ell(g) \leq n\}$ si et seulement si l'opérateur $T \in \mathcal{K}(\ell^2(B^0))$ correspondant vérifie $T_{x,y} = 0$ lorsque $d(x,y) > n$. On voit donc que le théorème 5.1 résulte de la proposition suivante. $\square$

Proposition 5.2. *Soient $s \in [0, \frac{1}{4}[$ et $c : \Lambda \to \mathbb{C}$ une fonction telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\sup_T \frac{\|(T_{xy} c(\sigma(x,y)))_{x,y \in B^0}\|_{\mathcal{K}(\ell^2(B^0))}}{\|T\|_{\mathcal{K}(\ell^2(B^0))}} \leq p^{sn} \tag{6}$$

où le supremum est pris sur les matrices T indexées par B^0, ayant un nombre fini de coefficients non nuls, et vérifiant $T_{xy} = 0$ si $d(x,y) > n$. Alors c admet une limite c_∞ à l'infini, et

$$|c(i,j) - c_\infty| \leq \Big(\frac{2p^s}{p^{\frac{1}{2}+s} - 1} + \frac{2(p^s + p^{2s})}{1 - p^{\frac{4s-1}{2}}}\Big) p^{\frac{4s-1}{6}(i+j+\max(i,j))}$$

pour tout $(i,j) \in \Lambda$.

La fin de ce paragraphe est consacrée à la démonstration de la proposition 5.2.

Lemme 5.3. *Soit* $(m,m')\in\mathbb{N}^2$ *avec* $m\leq m'$. *Soit* (e_1,e_2,e_3) *une base de* $\mathbb{Q}_p^3$. *Soient* $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{Z}_p$ *tel que l'un d'entre eux appartienne à* $\mathbb{Z}_p^*$. *Soient* $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in\mathbb{Z}_p$ *tel que l'un d'entre eux appartienne à* $\mathbb{Z}_p^*$. *Soit*

$$M=\mathbb{Z}_p p^{-m}(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3)+\mathbb{Z}_pe_1+\mathbb{Z}_pe_2+\mathbb{Z}_pe_3 \quad \text{et}$$

$$N=\{u_1e_1+u_2e_2+u_3e_3\in\mathbb{Z}_pe_1+\mathbb{Z}_pe_2+\mathbb{Z}_pe_3,\xi_1u_1+\xi_2u_2+\xi_3u_3\in p^{m'}\mathbb{Z}_p\}.$$

Alors $\sigma([M],[N])=(i,m+m'-2i)$ *où* i *est le plus grand entier de* $\{0,...,m\}$ *tel que* $\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3\equiv 0$ *modulo* p^i.

Démonstration. Comme l'énoncé est invariant par l'action de $SL_3(\mathbb{Z}_p)$ sur le vecteur $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ et le covecteur (ξ_1,ξ_2,ξ_3) on peut supposer $\xi_2=\xi_3=0$, $\xi_1=1$ et $x_3=0$. Si $i<m$ la valuation p-adique de x_1 est égale à i et on a

$$M=\mathbb{Z}_p p^{-m}(x_1e_1+x_2e_2)+\mathbb{Z}_p p^{-i}e_2+\mathbb{Z}_pe_3$$

$$\text{et}\qquad N=\mathbb{Z}_p p^{m'-i}(x_1e_1+x_2e_2)+\mathbb{Z}_pe_2+\mathbb{Z}_pe_3.$$

Si $i=m$ on a $M=\mathbb{Z}_pe_1+\mathbb{Z}_pp^{-m}e_2+\mathbb{Z}_pe_3$ et $N=\mathbb{Z}_pp^{m'}e_1+\mathbb{Z}_pe_2+\mathbb{Z}_pe_3$. □

Remarque. On a toujours

$$\sigma([\mathbb{Z}_pe_1+\mathbb{Z}_pe_2+\mathbb{Z}_pe_3],[M])=(m,0) \text{ et } \sigma([\mathbb{Z}_pe_1+\mathbb{Z}_pe_2+\mathbb{Z}_pe_3],[N])=(0,m').$$

Début de la démonstration de la proposition 5.2. Fixons $(m,m')\in\mathbb{N}^2$ avec $m\leq m'$ et $m+m'\in 3\mathbb{N}$. Soit (e_1,e_2,e_3) une base de $\mathbb{Q}_p^3$ telle que le type de $[\mathbb{Z}_pe_1+\mathbb{Z}_pe_2+\mathbb{Z}_pe_3]$ soit m' modulo 3. Nous définissons deux applications injectives $\alpha:(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^2\to B^0$ et $\beta:(\mathbb{Z}/p^{m'}\mathbb{Z})^2\to B^0$ de la façon suivante. Pour $x=(x_2,x_3)\in(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^2$,

$$\alpha(x)=[\mathbb{Z}_pp^{-m}(e_1+x_2e_2+x_3e_3)+\mathbb{Z}_pe_2+\mathbb{Z}_pe_3],$$

et pour $y=(y_1,y_2)\in(\mathbb{Z}/p^{m'}\mathbb{Z})^2$,

$$\beta(y)=[\{u=u_1e_1+u_2e_2+u_3e_3\in\mathbb{Z}_pe_1+\mathbb{Z}_pe_2+\mathbb{Z}_pe_3,u_1y_1+u_2y_2+u_3\in p^{m'}\mathbb{Z}_p\}].$$

Par abus nous avons supposé dans les formules ci-dessus que x_2,x_3,y_1,y_2 étaient relevés en des éléments de $\mathbb{Z}_p$, mais $\alpha(x)$ et $\beta(y)$ ne dépendent pas des relèvements.

Lemme 5.4. *Soient* $x=(x_2,x_3)\in(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^2$ *et* $y=(y_1,y_2)$ *dans* $(\mathbb{Z}/p^{m'}\mathbb{Z})^2$. *Soit* i *le plus grand entier de* $\{0,...,m\}$ *tel que* $y_1+x_2y_2+x_3\equiv 0$ *modulo* p^i. *Alors* $\sigma(\alpha(x),\beta(y))=(i,m+m'-2i)$.

Démonstration. Ce lemme est une conséquence immédiate du lemme 5.3. □

Lemme 5.5. *Soient* k,k' *des entiers supérieurs ou égaux à 2 avec* k' *multiple de* k, l_1,l_2 *deux éléments distincts de* $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ *et* $a_1,a_2\in\mathbb{R}$. *Soit*

$$(T_{x,y})_{x\in(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^2,y\in(\mathbb{Z}/k'\mathbb{Z})^2}$$

la matrice définie par

$$\begin{aligned}T_{(x_2,x_3),(y_1,y_2)} &= a_1 \text{ si } y_1+x_2y_2+x_3=l_1 \text{ dans } \mathbb{Z}/k\mathbb{Z},\\ &= a_2 \text{ si } y_1+x_2y_2+x_3=l_2 \text{ dans } \mathbb{Z}/k\mathbb{Z},\\ &= 0 \text{ sinon.}\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\|T\|_{M_{k^2,k'^2}(\mathbb{C})} &= \frac{k'}{k}\sup_{q\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}\left|a_1e^{i2\pi ql_1/k}+a_2e^{i2\pi ql_2/k}\right|\ \left\|(e^{-i2\pi qx_2y_2/k})\right\|_{M_k(\mathbb{C})}\\ &= \frac{k'}{k}\sup_{q\in\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}\sqrt{k\times\mathrm{pgcd}(k,q)}\ \left|a_1e^{i2\pi ql_1/k}+a_2e^{i2\pi ql_2/k}\right|.\end{aligned}$$

Démonstration. Comme $T_{x,y}$ ne dépend que de l'image de y dans $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^2$, on se ramène facilement au cas où $k'=k$. Le lemme découle alors de la diagonalisation des matrices circulantes, car lorsqu'on fixe x_2 et y_2 la matrice $(T_{(x_2,x_3),(y_1,y_2)})_{x_3,y_1}$ est une matrice circulante, que l'on diagonalise par une transformation de Fourier en x_3 et y_1. □

Fin de la démonstration de la proposition 5.2. Pour $i\in\{0,...,m\}$ on note $((T_i)_{x,y})_{x\in(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^2,y\in(\mathbb{Z}/p^{m'}\mathbb{Z})^2}$ la matrice définie par

$$\begin{aligned}(T_i)_{(x_2,x_3),(y_1,y_2)} &= p^{-m'} \text{ si } y_1+x_2y_2+x_3=p^i \ \text{ dans } \ \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z},\\ &= 0 \text{ sinon}\end{aligned}$$

On note que T_i est normalisée pour être de norme 1 dans $M_{p^{2m},p^{2m'}}(\mathbb{C})$.

Soit $i\in\{1,...,m\}$. Alors

$$\|T_i-T_{i-1}\|\leq 2p^{-\frac{i}{2}}$$

En effet par le lemme 5.5 on a

$$\|T_i-T_{i-1}\|=\sup_{q\in\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}}p^{-\frac{m}{2}}\sqrt{\mathrm{pgcd}(p^m,q)}\ \left|1-e^{i2\pi qp^{i-1}(p-1)/p^m}\right|$$

et $1-e^{i2\pi qp^{i-1}(p-1)/p^m}$ s'annule si p^{m-i+1} divise q et

$$p^{-\frac{m}{2}}\sqrt{\mathrm{pgcd}(p^m,q)}\ \left|1-e^{i2\pi qp^{i-1}(p-1)/p^m}\right|\leq 2p^{-\frac{m}{2}}\sqrt{\mathrm{pgcd}(p^m,q)}\leq 2p^{-\frac{i}{2}}$$

si p^{m-i+1} ne divise pas q.

Comme le vecteur de norme 1 de $\mathbb{C}^{(\mathbb{Z}/p^{m'}\mathbb{Z})^2}$ dont toutes les coordonnées sont égales à $p^{-m'}$ a pour image par T_i et T_{i-1} le vecteur de norme 1 de $\mathbb{C}^{(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^2}$ dont toutes les coordonnées sont égales à p^{-m} , on a, pour $a,b\in\mathbb{C}$, $\|aT_i+bT_{i-1}\|\geq|a+b|$.

Soit $(m,m')\in\mathbb{N}^2$ avec $m\leq m'$. Pour tout $i\in\{0,\ldots,m\}$ on note $\tilde{T}_i\in\mathcal{K}(\ell^2(B^0))$ la matrice (qui a un nombre fini de coefficients non nuls) telle que

$$(\tilde{T}_i)_{x,y}=0 \text{ si } \ x\notin\mathrm{Im}(\alpha) \text{ ou } \ y\notin\mathrm{Im}(\beta)$$

$$\text{et } (\tilde{T}_i)_{\alpha(x),\beta(y)}=(T_i)_{x,y} \text{ pour } \ x\in(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^2 \text{ et } y\in(\mathbb{Z}/p^{m'}\mathbb{Z})^2.$$

Soit $i\in\{1,\ldots,m\}$. En appliquant (6) à $T=\tilde{T}_i-\tilde{T}_{i-1}$ et $n=m+m'-i+1$, on obtient

$$\begin{gathered}\Big|c(i,m+m'-2i)-c(i-1,m+m'-2i+2))\Big|\\ \leq\Big\|c(i,m+m'-2i)T_i-c(i-1,m+m'-2i+2)T_{i-1}\Big\|\\ \leq\|T_i-T_{i-1}\|p^{s(m+m'-i+1)}\leq 2p^{-\frac{i}{2}}p^{s(m+m'-i+1)}.\end{gathered}$$

En appliquant l'inégalité précédente avec $m'=m$ ou $m'=m+1$ (c'est-à-dire $m=i+[\frac{j}{2}]\geq i$) on trouve que pour tous $(i,j)\in\Lambda$ avec $i>0$,

$$|c(i,j)-c(i-1,j+2)|\leq 2p^{-\frac{i}{2}+s(i+j+1)}.$$

En faisant agir l'automorphisme

$$g \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^t g^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de G, qui stabilise K, et envoie

$$p^{\frac{i+2j}{3}} \begin{pmatrix} p^{-(i+j)} & 0 & 0 \\ 0 & p^{-j} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sur } p^{\frac{2i+j}{3}} \begin{pmatrix} p^{-(i+j)} & 0 & 0 \\ 0 & p^{-i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on obtient, pour $(i,j) \in \Lambda$ avec $j > 0$,

$$|c(i,j) - c(i+2, j-1)| \leq 2p^{-\frac{j}{2}+s(i+j+1)}.$$

Donc on a, pour $(i,j) \in \Lambda$, avec $i \geq j$,

$$\begin{aligned} &\Big| c(i,j) - c(\frac{2i+j}{3}, \frac{2i+j}{3}) \Big| \\ (7) \qquad &\leq 2\Big(\big(p^{-\frac{1}{2}-s}\big) + \big(p^{-\frac{1}{2}-s}\big)^2 + \cdots + \big(p^{-\frac{1}{2}-s}\big)^{\frac{i-j}{3}}\Big) p^{\frac{2i+j}{6}(4s-1)+s} \\ &\leq \frac{2p^s}{p^{\frac{1}{2}+s} - 1} p^{\frac{4s-1}{6}(2i+j)}, \end{aligned}$$

ainsi que la même inégalité en permutant i et j. Pour $i \geq 1$ on trouve

$$\begin{aligned} |c(i,i) - c(i+1,i+1)| &\leq |c(i,i) - c(i-1,i+2)| + |c(i-1,i+2) - c(i+1,i+1)| \\ &\leq 2\big(p^s + p^{2s-1}\big) p^{\frac{4s-1}{2} i}. \end{aligned}$$

En prenant $x_1 \in B^0$ tel que $\sigma(x_0, x_1) = (1,1)$, et en appliquant (6) à la matrice T indexée par B^0 telle que $T_{x,y} = 1$ pour $x, y \in \{x_0, x_1\}$ et 0 sinon, on obtient

$$|c(0,0) - c(1,1)| \leq \Big\| \begin{pmatrix} c(0,0) & c(1,1) \\ c(1,1) & c(0,0) \end{pmatrix} \Big\| \leq p^{2s} \Big\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Big\| = 2p^{2s}.$$

On a donc pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$|c(i,i) - c(i+1,i+1)| \leq 2\big(p^s + p^{2s}\big) p^{\frac{4s-1}{2} i}.$$

On en déduit que $c(i,i)$ admet une limite c_∞ à l'infini et que

$$\Big| c(i,i) - c_\infty \Big| \leq 2 \frac{p^s + p^{2s}}{1 - p^{\frac{4s-1}{2}}} p^{\frac{4s-1}{2} i}$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$. En utilisant (7) et l'inégalité obtenue en permutant i et j on a alors, pour $(i,j) \in \Lambda$,

$$\Big| c(i,j) - c_\infty \Big| \leq \Big(\frac{2p^s}{p^{\frac{1}{2}+s} - 1} + 2 \frac{p^s + p^{2s}}{1 - p^{\frac{4s-1}{2}}} \Big) p^{\frac{4s-1}{6}(i+j+\max(i,j))}.$$

La proposition 5.2 est démontrée. □

Références

[BC82] P. Baum and A. Connes. Geometric K-theory for Lie groups and foliations (preprint de 1982). *Enseign. Math. (2)*, 46 :3–42, 2000.

[BCH94] P. Baum and A. Connes and N. Higson. Classifying space for proper actions and K-theory of group C^*-algebras. *C^*-algebras : 1943–1993* (San Antonio, TX, 1993), Contemp. Math., **167**, Amer. Math. Soc. : 240–291, 1994.

[BHV08] B. Bekka, P. de la Harpe et A. Valette. Kazhdan's property (T). Cambridge University Press, 2008.

[BD06] G. Bell et A. Dranishnikov A Hurewicz-type theorem for asymptotic dimension and applications to geometric group theory. *Trans. Amer. Math. Soc.* 358(11) :4749–4764, 2006.

[Bos90] J.-B. Bost. Principe d'Oka, K-théorie et systèmes dynamiques non commutatifs. *Invent. Math.* 101 :261–333, 1990.

[CH85] J. De Cannière et U. Haagerup. Multipliers of the Fourier algebras of some simple Lie groups and their discrete subgroups. *Amer. J. Math.* 107(2) :455–500, 1985.

[CG04] G. Carlsson et B. Goldfarb. On homological coherence of discrete groups. *J. Algebra* 276(2) :502–514, 2004.

[Cha03] I. Chatterji. Property (RD) for cocompact lattices in a finite product of rank one Lie groups with some rank two Lie groups. *Geometriae Dedicata* 96 : 161–177, 2003.

[CDSW05] M. Cowling, B. Dorofaeff, A. Seeger et J. Wright. A family of singular oscillatory integral operators and failure of weak amenability. *Duke Math. J.* 127(3) : 429–486, 2005.

[CH89] M. Cowling et U. Haagerup. Completely bounded multipliers of the Fourier algebra of a simple Lie group of real rank one. *Invent. Math.* 96(3) :507–549, 1989.

[Dor93] B. Dorofaeff. The Fourier algebra of $\mathrm{S}L(2,\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, has no multiplier bounded approximate unit. *Math. Ann.* 297(4) : 707–724, 1993.

[Gal99] P.Y. Le Gall. Théorie de Kasparov équivariante et groupoïdes. I. *K-Theory*, 16(4) :361–390, 1999.

[Gro93] M. Gromov. Asymptotic invariants for infinite groups. Geometric Group Theory, LMS Lect. Notes 182, 1993.

[Haa86] U. Haagerup. Group C^*-algebras without the completely bounded approximation property, Preprint, 1986.

[HV89] P. de la Harpe and A. Valette. La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts. Astérisque 175, 1989.

[HK01] N. Higson and G. Kasparov. E-theory and KK-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space. *Invent. Math.* 144(1) : 23–74, 2001.

[HLS02] N. Higson, V. Lafforgue and G. Skandalis. Counterexamples to the Baum-Connes conjecture. *Geom. Funct. Anal.* 12(2) :330–354, 2002.

[Jen68] J. Jenkins. An amenable group with a nonsymmetric group algebra. *Bull. Amer. Math. Soc.* 75 :357–360, 1969.

[JV84] P. Julg and A. Valette. K-theoretic amenability for $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, and the action on the associated tree. *J. Funct. Anal.* 58 :194–215, 1984.

[JK95] P. Julg and G. Kasparov. Operator K-theory for the group $SU(n,1)$. *J. Reine Angew. Math.*, 463 :99–152, 1995.

[Jul97] P. Julg. Remarks on the Baum-Connes conjecture and Kazhdan's property T. Operator algebras and their applications, Waterloo (1994/1995), Fields Inst. Commun., Amer. Math. Soc. **13**, 145–153, 1997.

[Jul98] P. Julg. Travaux de N. Higson et G. Kasparov sur la conjecture de Baum-Connes. Séminaire Bourbaki, 40 (1997-1998), Exp. No. 841.

[Jul02] P. Julg. La conjecture de Baum-Connes à coefficients pour le groupe $Sp(n,1)$. *C. R. Acad. Sci.* 334(7) :533–538, 2002.

[Kas84] G. G. Kasparov. Lorentz groups : K-theory of unitary representations and crossed products. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 275(3) :541–545, 1984.

[Kas88] G.G. Kasparov. Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture. *Invent. Math.*, 91 :147–201, 1988.

[KS91] G.G. Kasparov and G. Skandalis. Groups acting on buildings, operator K-theory, and Novikov's conjecture. *K-Theory*, 4(4) :303–337, 1991.

[KS94] G. Kasparov and G. Skandalis. Groupes boliques et conjecture de Novikov. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 319(4) :815–820, 1994.

[KS03] G. Kasparov and G. Skandalis. Groups acting properly on "bolic" spaces and the Novikov conjecture. *Ann. of Math. (2)*, 158(1) :165–206, 2003.

[Kaz67] D. Kazhdan. Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups. *Funct. Anal. Appl.* 1 :63–65, 1967.

[Laf00] V. Lafforgue. *A proof of property* (RD) *for cocompact lattices of* $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ *and* $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$. *J. Lie Theory* 10(2) :255–267, 2000.

[Laf01] V. Lafforgue. Banach KK-theory and the Baum-Connes conjecture. European Congress of Mathematics, Vol. II, (Barcelone,2000), Progr. Math. 202 :31–46, Birkhäuser, 2001.

[Laf02a] V. Lafforgue. K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach et conjecture de Baum-Connes. *Invent. Math.*, 149(1) :1–95, 2002.

[Laf02b] V. Lafforgue. Banach KK-theory and the Baum-Connes conjecture. Proceedings of the ICM 2002 (Beijing), vol II, 795–812.

[Laf07] V. Lafforgue (avec un appendice de Hervé Oyono-Oyono). K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach, groupoïdes et conjecture de Baum-Connes. *J. Inst. Math. Jussieu* 6(3) : 415–451, 2007.

[Laf08] V. Lafforgue. Un renforcement de la propriété (T). *Duke Math. J.*, 143(3) :559–602, 2008.

[Laf09] V. Lafforgue. La conjecture de Baum-Connes à coefficients pour les groupes hyperboliques. Preprint 2009, disponible à l'adresse http ://people.math.jussieu.fr/∼vlafforg/

[Mat07] D. Matsnev. The Baum-Connes conjecture and proper group actions on affine buildings. arXiv :math/0703923

[MY02] I. Mineyev and G. Yu. The Baum-Connes conjecture for hyperbolic groups. *Invent. Math.*, 149(1) :97–122, 2002.

[Pim86] M. Pimsner. KK-groups of crossed products by groups acting on trees. *Invent. Math.* 86 : 603–634, 1986.

[RRS98] J. Ramagge, G. Robertson, T. Steger. A Haagerup inequality for $\widetilde{A}_1 \times \widetilde{A}_1$ and $\widetilde{A}_2$ buildings. *Geom. Funct. Anal.* 8 : 702–731, 1998.

[Roe05] J. Roe. Hyperbolic groups have finite asymptotic dimension. *Proc. Amer. Math. Soc.* 133(9) :2489–2490, 2005.

[Ska91] G. Skandalis. Kasparov's bivariant K-theory and applications. *Expositiones Math.* 9 : 193–250, 1991.

[Ska99] G. Skandalis. Progrès récents sur la conjecture de Baum-Connes, contribution de Vincent Lafforgue. Séminaire Bourbaki, No. 869 (novembre 1999).

[Tu99a] J.-L. Tu. La conjecture de Novikov pour les feuilletages hyperboliques. *K-Theory*, 16(2) :129–184, 1999.

[Tu99b] J.L. Tu. La conjecture de Novikov pour les feuilletages moyennables. *K-Theory* 17(3) : 215–264, 1999.

Institut de mathématiques de Jussieu, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris
E-mail address: `vlafforg@math.jussieu.fr`