Quelques calculs reliés à la correspondance de Langlands géométrique pour $\mathbb{P}^1$ (version provisoire)

Vincent Lafforgue

12 janvier 2009

Soit X une courbe projective lisse sur $\mathbb{C}$. Soit G un groupe réductif connexe sur $\mathbb{C}$ et ${}^LG$ son dual de Langlands. On note Bun_G le champ classifiant les G-torseurs sur X (localement triviaux pour la topologie étale), et $\mathrm{Loc}_{{}^LG}$ le champ classifiant les ${}^LG$-systèmes locaux sur X (c'est-à-dire les ${}^LG$-torseurs sur X munis d'une connexion). Beilinson et Drinfeld espèrent une équivalence entre certaines catégories dérivées de D-modules sur Bun_G et de $\mathcal{O}$-modules sur $\mathrm{Loc}_{{}^LG}$, qui soit compatible aux foncteurs de Hecke et à la normalisation de Whittaker.

Si $X = \mathbb{P}^1$ on doit considérer $\mathrm{Loc}_{{}^LG}$ comme un DG-champ (pour toute courbe $\mathrm{Loc}_{{}^LG}$ est singulier en le système local trivial mais pour $X = \mathbb{P}^1$ il n'y a pas d'autre point). On peut imaginer plusieurs équivalences entre des catégories triangulées plus ou moins grosses (sans parler de versions raffinées avec des DG-catégories). En nous appuyant sur des travaux de Ginzburg [Gin95, Gin98], et de Bezrukavnikov et Finkelberg [BF08] nous construisons une équivalence entre des catégories triangulées assez petites. Par construction cette équivalence est compatible aux foncteurs de Hecke. Cependant nous ne savons pas montrer, sauf pour G de rang 1, qu'elle est compatible avec la normalisation de Whittaker. Nous expliquons ce qui nous manque pour y arriver.

On peut espérer une équivalence entre des catégories plus grosses, mais cela n'est pas démontré. Une des difficultés est que le D-module constant sur Bun_G, que nous notons $\mathcal{O}$, devrait correspondre à un complexe de $\mathcal{O}$-modules sur $\mathrm{Loc}_{{}^LG}$ infini des deux côtés et quasi-isomorphe à 0.

Les quatre premiers paragraphes sont rédigés dans le cadre ℓ-adique. Cela est possible car pour $X = \mathbb{P}^1$, $\mathrm{Loc}_{{}^LG}$ est un espace de déformation donc possède un analogue ℓ-adique (qui est aussi un DG-champ). En revanche nous omettons les twists à la Tate. L'avant-dernier paragraphe, qui contient quelques remarques dans la situation où X est une courbe quelconque, et le dernier paragraphe qui étudie la compatibilité (dans le cas où $X = \mathbb{P}^1$) entre notre construction et la construction de D-modules associés aux opers par la quantification de l'application de Hitchin [BD], sont rédigées dans le cadre des D-modules car ils n'auraient pas de sens dans le cadre ℓ-adique.

J'ai souvent parlé de ce travail avec Alain Genestier et de nombreuses idées (dont l'impulsion de départ) lui sont dues. Des discussions avec Roman Bezrukavnikov, Vladimir Drinfeld, Michael Finkelberg, Edward Frenkel, Dennis Gaitsgory et Bertrand Toen m'ont beaucoup apporté.

Indépendamment Ben-Zvi et Nadler ont établi dans [BZN07] la correspondance de Langlands sur $\mathbb{P}^1$ avec ramification modérée.

1 Position du problème

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Soit ℓ un nombre premier distinct de p. Dans tout ce paragraphe et les trois suivants, $X = \mathbb{P}^1$. Soit G un groupe réductif sur k et ${}^LG$ son dual de Langlands, défini sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Choisissons une fois pour toutes un point x dans X et notons $\mathrm{Loc}_{{}^LG}^{\mathrm{triv},x}$ le DG-schéma classifiant les ${}^LG$-systèmes locaux sur X trivialisés en x, de sorte que $\mathrm{Loc}_{{}^LG} = \mathrm{Loc}_{{}^LG}^{\mathrm{triv},x}/{}^LG$. Intuitivement le groupe fondamental de X en x a 0 générateur et une relation et donc $\mathrm{Loc}_{{}^LG}^{\mathrm{triv},x} = \mathrm{Spec}A$, où $A = \mathrm{Sym}({}^L\mathfrak{g}^*[1])$. On peut le justifier en choisissant y et z deux points distincts et distincts de x et alors $\mathrm{Loc}_{{}^LG}^{\mathrm{triv},x} = \mathrm{Loc}_{{}^LG,X}^{\mathrm{triv},x}$ est le produit fibré (au sens dérivé) de $\mathrm{Loc}_{{}^LG,X-\{y\}}^{\mathrm{triv},x}$ et $\mathrm{Loc}_{{}^LG,X-\{z\}}^{\mathrm{triv},x}$ au-dessus de $\mathrm{Loc}_{{}^LG,X-\{y,z\}}^{\mathrm{triv},x}$. Les deux premiers sont égaux à un point et le troisième s'identifie à ${}^LG$ par l'application de monodromie "le long d'un lacet partant de x". On a donc $\mathrm{Loc}_{{}^LG} = \mathrm{Spec}A/{}^LG$.

Le problème est le suivant :

- définir une catégorie triangulée $D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{{}^LG}))$ dont les objets seraient des classes d'homotopie de DG-modules ${}^LG$-équivariants sur le DG-anneau A,
- définir une catégorie triangulée de faisceaux ℓ-adiques $D^?(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$,
- établir une équivalence $\alpha : D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{{}^LG})) \to D^?(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

Cette équivalence doit être compatible aux foncteurs de Hecke et à la normalisation de Whittaker, comme nous allons le rappeler maintenant.

Compatibilité aux foncteurs de Hecke. Comme nous ne possédons pas l'équivalence de catégories en famille nous ne pouvons considérer que les foncteurs de Hecke en un point fixé de la courbe, qui sera x. L'équivalence en famille serait la donnée, pour tout schéma S sur k, d'une équivalence entre une catégorie dérivée de faisceaux ℓ-adiques sur $S \times \mathrm{Bun}_G$ et une catégorie triangulée associée à une DG-catégorie formée de complexes de faisceaux ℓ-adiques sur S munis d'une structure de DG-module sur A, et équivariants par rapport à ${}^LG$ (c'est-à-dire une catégorie triangulée de faisceaux ℓ-adiques sur S "à coefficients dans A", équivariants par rapport à ${}^LG$).

Pour toute représentation π de ${}^LG$ nous noterons donc $T_{x,\pi}$ le foncteur de Hecke en x de la catégorie triangulée $D^?(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ dans elle-même qui est associé à π.

Définition 1.1 *La condition de compatibilité de α aux foncteurs de Hecke est la donnée pour toute représentation π de ${}^LG$ d'un isomorphisme de foncteurs entre les foncteurs de $D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{{}^LG}))$ dans $D^?(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ définis par $M \mapsto T_{x,\pi}(\alpha(M))$ et $M \mapsto \alpha(M \otimes \pi)$, de façon compatible au produit tensoriel des représentations de ${}^LG$.*

En fait, en nous appuyant sur [BF08] nous allons renforcer la condition de compatibilité aux foncteurs de Hecke en x. Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des fonctions sur le disque formel D défini sur k qui est le complété de X en x. On désigne par $D^b_{c,G(\mathcal{O})}(Gr)$ la catégorie dérivée bornée des faisceaux constructibles à support de type fini et $G(\mathcal{O})$-équivariants sur la grassmannienne affine. On rappelle que la convolution munit $D^b_{c,G(\mathcal{O})}(Gr)$ d'une structure de catégorie triangulée monoïdale. On considère l'algèbre graduée ${}^LG$-équivariante $B = \mathrm{RHom}_A(\overline{\mathbb{Q}}_\ell, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = \mathrm{Sym}^L\mathfrak{g}[-2]$. On peut aussi voir B comme une DG-algèbre ${}^LG$-équivariante avec différentielle nulle. Soit $D^{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}B/{}^LG))$ la catégorie triangulée obtenue en localisant les quasi-isomorphismes à partir de la catégorie à homotopie près des DG-modules ${}^LG$ équivariants parfaits sur le DG-anneau B. On renvoie aux paragraphes 3.1 et 3.2 de [Kel06] pour ces notions. Le produit tensoriel sur B munit $D^{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}B/{}^LG))$ d'une structure de catégorie triangulée monoïdale. Bezrukavnikov et Finkelberg montrent dans le théorème 5 de [BF08] qu'il existe une équivalence canonique de catégories triangulées monoïdales $D^{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}B/{}^LG)) \to D^b_{c,G(\mathcal{O})}(Gr)$.

On note $D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}A/{}^LG))$ la catégorie triangulée obtenue en localisant les quasi-isomorphismes dans la catégorie à homotopie près des DG-modules ${}^LG$ équivariants sur le DG-anneau $A = \mathrm{Sym}({}^L\mathfrak{g}^*[1])$, qui sont bornés (inférieurement et supérieurement) et de type fini (donc de dimension finie). La convolution (associée à l'addition sur ${}^L\mathfrak{g}$) munit $D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}A/{}^LG))$ d'une structure de catégorie triangulée monoïdale.

La dualité de Koszul fournit une équivalence de catégories triangulées monoïdales de $D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}A/{}^LG))$ vers $D^{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}B/{}^LG))$, qui à $M \in D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}A/{}^LG))$ associe $\mathrm{RHom}_A(\overline{\mathbb{Q}}_\ell, M) \in D^{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}B/{}^LG))$. En particulier l'image du A-module trivial $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ (muni de l'action triviale de ${}^LG$) par la dualité de Koszul est B.

On obtient ainsi une équivalence de catégories triangulées monoïdales $D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}A/{}^LG)) \to D^b_{c,G(\mathcal{O})}(Gr)$ en composant la dualité de Koszul et l'équivalence

$$D^{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}B/{}^LG)) \to D^b_{c,G(\mathcal{O})}(Gr)$$

du théorème 5 de [BF08]. On a vu précédemment que $\mathrm{Spec}A/{}^LG$ était le DG-champ classifiant les ${}^LG$-systèmes locaux sur $X = \mathbb{P}^1$. C'est aussi le DG-champ $\mathrm{Loc}_{{}^LG, D\coprod_{D^*} D}$ classifiant les ${}^LG$-systèmes locaux sur la sphère formelle $D\coprod_{D^*} D$, où D^* est le disque formel épointé. En effet on *définit* $\mathrm{Loc}_{{}^LG,D\coprod_{D^*} D}$ comme le produit fibré (au sens dérivé) $\mathrm{Loc}_{{}^LG,D} \times_{\mathrm{Loc}_{{}^LG,D^*}} \mathrm{Loc}_{{}^LG,D}$ et par le même calcul que pour $\mathrm{Loc}_{{}^LG}$ on obtient un isomorphisme $\mathrm{Loc}_{{}^LG,D\coprod_{D^*} D} = \mathrm{Spec}A/{}^LG$. Pour $1 \leq i < j \leq 3$ soit $\iota_{i,j} : D\coprod_{D^*} D \to D\coprod_{D^*} D\coprod_{D^*} D$ l'inclusion relative à i et j, et $\tilde{\iota}_{i,j} : \mathrm{Loc}_{D\coprod_{D^*} D\coprod_{D^*} D} \to \mathrm{Loc}_{D\coprod_{D^*} D}$ l'image inverse par $\iota_{i,j}$ pour les systèmes locaux.

Alors le bifoncteur qui à $M, N \in D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{D\coprod_{D^*} D}))$ associe

$$\tilde{\iota}_{1,3,*}(\tilde{\iota}^*_{1,2}(M) \otimes \tilde{\iota}^*_{2,3}(N))$$

est la structure monoïdale décrite précédemment sur

$$D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{D\coprod_{D^*} D})) = D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}A/{}^LG)).$$

L'action des foncteurs en Hecke en x munit $D^b_c(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ d'une structure de module sur $D^b_{c,G(\mathcal{O})}(Gr)$. D'autre part on a sur $D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{{}^LG}))$ une structure de module sur $D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{D\coprod_{D^*} D}))$, qui d'un point de vue naïf vient des égalités $\mathrm{Loc}_{{}^LG} = \mathrm{Spec}A/{}^LG = \mathrm{Loc}_{D\coprod_{D^*} D}$ et de la structure de catégorie triangulée monoïdale sur $D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}A/{}^LG))$ décrite précédemment. De façon plus conceptuelle, cette structure de module est définie comme suit. On note $\hat{X}_x = X\coprod_{D^*} D$ le produit amalgamé de la courbe X et d'une sphère formelle ajoutée au point x. On a deux applications $i_1, i_2 : X \to \hat{X}_x$ et une inclusion $j : D\coprod_{D^*} D \to \hat{X}_x$. On note $\mathrm{Loc}_{{}^LG,\hat{X}_x}$ le DG-champ classifiant les ${}^LG$-systèmes locaux sur $\hat{X}_x$. On a les applications images inverses

$$\tilde{i}_1, \tilde{i}_2 : \mathrm{Loc}_{{}^LG,\hat{X}_x} \to \mathrm{Loc}_{{}^LG} \quad \text{et} \quad \tilde{j} : \mathrm{Loc}_{{}^LG,\hat{X}_x} \to \mathrm{Loc}_{D\coprod_{D^*} D}.$$

Alors le bifoncteur qui à $M \in \mathrm{Loc}_{D\coprod_{D^*} D}$ et $N \in \mathrm{Loc}_{{}^LG}$ associe $\tilde{i}_{2,*}(\tilde{j}^*(M) \otimes \tilde{i}^*_1(N))$ donne la structure de module de $D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{{}^LG}))$ sur $D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{D\coprod_{D^*} D}))$.

Voici maintenant la condition de compatibilité aux foncteurs de Hecke qui renforce la condition de la définition 1.1.

Définition 1.2 *Un foncteur* $\alpha : D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG})) \to D^?(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ *est dit compatible aux foncteurs de Hecke en* x *au sens dérivé s'il respecte les structures de modules sur les catégories triangulées monoïdales*

$$D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{D\coprod_{D^*}D})) \simeq D^b_{c,G(\mathcal{O})}(Gr)$$

décrites ci-dessus.

La même définition vaut bien sûr pour un foncteur $\beta : D^?(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG}))$.
Compatibilité à la normalisation de Whittaker. On note

$$R\Gamma : D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG})) \to D(\mathrm{Vect})$$

le foncteur des sections globales sur $\mathrm{Loc}_{^LG}$, qui consiste simplement à oublier la structure de A-module et à prendre les invariants par ^LG. Ici Vect désigne simplement la catégorie des espaces vectoriels sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Dans [Lys02], il y a une définition précise de la normalisation de Whittaker. On fixe un caractère non trivial $\psi : \mathrm{F}_p \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$ et on note $\mathcal{L}_\psi$ le faisceau d'Artin-Schreier sur $\mathbb{A}^1$ associé à ψ. Soient $T \subset B \subset G$ un tore maximal et un Borel dans G. On choisit un T-torseur $\mathcal{F}_T$ muni, pour chaque racine simple $\check{\alpha}$ de G, d'un isomorphisme $\mathcal{F}_T^{\check{\alpha}} \simeq \Omega$ (en notant $\mathcal{F}_T^{\check{\alpha}}$ le fibré en droites extension des scalaires de $\mathcal{F}_T$ par $T \xrightarrow{\check{\alpha}} \mathbb{G}_m$). Comme dans [FGV01, Lys02] on note $\mathrm{Bun}_N^{\mathcal{F}_T}$ le champ classifiant les B-torseurs $\mathcal{F}_B$ sur X muni d'un isomorphisme $\mathcal{F}_B \times_B T \simeq \mathcal{F}_T$. On a $\pi^0 : \mathrm{Bun}_N^{\mathcal{F}_T} \to \mathrm{Bun}_G$ (qui à $\mathcal{F}_B$ associe $\mathcal{F}_B \times_B G$) et $\epsilon : \mathrm{Bun}_N^{\mathcal{F}_T} \to \mathbb{A}^1$ (qui à $\mathcal{F}_B$ associe la somme sur les racines simples de l'extension de $\mathcal{O}$ par Ω associée à $\mathcal{F}_B$, grâce à l'isomorphisme $\mathcal{F}_T^{\check{\alpha}} \simeq \Omega$). Soit d_N la dimension de $\mathrm{Bun}_N^{\mathcal{F}_T}$ et d_G la dimension de Bun_G. En suivant [Lys02] on note $P^0_\psi = \epsilon^*(\mathcal{L}_\psi)[d_N]$ où d_N est la dimension de $\mathrm{Bun}_N^{\mathcal{F}_T}$ (dans [FGV01] ce faisceau, à un décalage près, est noté $\Psi_0^{\emptyset,0}$). Le foncteur de Whittaker

$$\mathrm{Whit}_G : D^?(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to D(\mathrm{Spec} k, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = D(\mathrm{Vect})$$

est défini de la façon suivante : pour $\mathcal{K} \in D(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$,

$$\mathrm{Whit}_G(\mathcal{K}) = \mathrm{R}\Gamma_c(\mathrm{Bun}_N^{\mathcal{F}_T}, P^0_\psi \otimes \pi^{0,*}(\mathcal{K}))[-d_G].$$

La définition 2 de la section 2.7 de [Lys02] indique (à un décalage près) que la condition de compatibilité de α à la normalisation de Whittaker est la suivante.

Définition 1.3 *La compatibilité de* α *à la normalisation de Whittaker est la donnée d'un isomorphisme de foncteurs de* $D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG}))$ *vers* $D(\mathrm{Vect})$ *entre* $\mathrm{R}\Gamma$ *et* $\mathrm{Whit}_G \circ \alpha$.

En revanche nous n'imposons pas de condition relative à la dualité de Verdier. En notant $D : D^?(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to D^?(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ la dualité de Verdier, et $\beta : D^?(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG}))$ une équivalence inverse de α, cela reviendrait à imposer que $\beta \circ D \circ \alpha : D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG})) \to D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG}))$ soit égal à une certaine auto-équivalence de $D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG}))$, à savoir le composé de la dualité de Grothendieck $RHom(., \Omega_{\mathrm{Loc}_{^LG}})$ et de l'image inverse par l'involution de $\mathrm{Loc}_{^LG}$ qui à un système local associe son "contragrédient", c'est-à-dire son image par un automorphisme (éventuellement extérieur) de ^LG qui préserve un tore maximal ^LT et agit sur celui-ci par $t \mapsto t^{-1}$. Cependant cette condition n'est pas satisfaite par l'équivalence de catégories α que nous allons construire au paragraphe suivant. En plus elle n'est peut-être pas compatible à la condition de normalisation de Whittaker.

2 Construction d'une équivalence de catégories

Ce qui suit a été obtenu aussi par Bezrukavnikov, Braverman, Gaitsgory... Je ne l'écris que pour fixer les idées.

On note $D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG}))$ la catégorie triangulée obtenue en localisant les quasi-isomorphismes dans la catégorie à homotopie près des DG-modules ^LG équivariants sur le DG-anneau A, qui sont bornés (inférieurement et supérieurement) et de type fini (donc de dimension finie). On renvoie aux paragraphes 3.1 et 3.2 de [Kel06] pour ces notions. On note $D_c^{b,0}(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ la sous-catégorie pleine de $D_c^b(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ qui est la réunion des images des foncteurs d'extension par 0 : $D_c^b(U, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to D_c^b(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ pour U ouvert de type fini de Bun_G, où $D_c^b(U, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est la catégorie des complexes bornés de faisceaux ℓ-adiques constructibles sur U.

On note $j : BG \to \mathrm{Bun}_G$ l'inclusion de l'ouvert de Bun_G qui correspond au G-torseur trivial. On peut remarquer que $j_!(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[d_G]$ est un faisceau pervers sur Bun_G car l'inclusion j est affine (voir [Fal03]). On note que $d_G = \dim \mathrm{Bun}_G$ est égal à $-\dim G$ pour $X = \mathbb{P}^1$.

Proposition 2.1 *On a deux équivalences de catégories, inverses l'une de l'autre,*

$$D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG})) \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} D_c^{b,0}(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

compatibles aux foncteurs de Hecke en x au sens dérivé (comme dans la définition 1.2) et telles que $\alpha(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) = j_!(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[d_G]$, où $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \in D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG}))$ désigne le DG-module ^LG-équivariant sur A supporté en degré 0 et égal à $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ muni de l'action triviale de A et de ^LG, et où $j_!(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \in D_c^{b,0}(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est l'extension par 0 de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ de BG à Bun_G.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie triangulée monoïdale et $\mathcal{C}'$ est une catégorie triangulée munie d'une structure de module sur $\mathcal{C}$, on dira que $\mathcal{C}'$ est libre de rang 1 sur $\mathcal{C}$ avec pour générateur $M_0 \in \mathcal{C}'$ si le foncteur $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ qui à M associe $M \star M_0$ est une équivalence de catégories.

Nous allons montrer que les catégories triangulées

$$D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG})) \quad \text{et} \quad D_c^{b,0}(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

sont libres de rang 1 sur les catégories triangulées monoïdales

$$D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{D \coprod_{D^*} D})) \simeq D^b_{c,G(\mathcal{O})}(Gr)$$

et que $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \in D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG}))$ et $j_!(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[d_G] \in D_c^{b,0}(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ sont des générateurs. La proposition 2.1 en résulte immédiatement et on voit que α et β sont déterminés de manière unique.

D'abord il est clair que $D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG}))$ est libre de rang 1, avce le générateur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, puisque les deux sont isomorphes à $D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec} A/^LG))$ et que $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est une unité pour la structure de catégorie monoïdale de $D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec} A/^LG))$.

Il nous reste donc à montrer que $D_c^{b,0}(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est libre de rang 1 sur la catégorie triangulée monoïdale $D^b_{c,G(\mathcal{O})}(Gr)$ avec pour générateur $j_!(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[d_G] \in D_c^{b,0}(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

L'action de $D^b_{c,G(\mathcal{O})}(Gr)$ par les foncteurs de Hecke en x sur l'objet $j_!(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[d_G]$ fournit un foncteur $\gamma : D^b_{c,G(\mathcal{O})}(Gr) \to D_c^{b,0}(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ et nous devons montrer que γ est une équivalence de catégories. Notons R l'anneau des fonctions polynômiales sur $\mathbb{P}^1 \backslash \{x\}$. D'après [BL95] (voir aussi le paragraphe 2.3 de [BD]) on a $\mathrm{Bun}_G = G(R)\backslash Gr$. Alors $\gamma(M) = q_! r^*(M)[d_G]$, où $r : G\backslash Gr \to G(\mathcal{O})\backslash Gr$ et $q : G\backslash Gr \to G(R)\backslash Gr$ sont les projections évidentes. L'image par γ de δ_1 (le faisceau gratte-ciel en $1 \in Gr$, qui est une unité pour la structure de catégorie monoïdale de $D_c^{b,0}(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$) est $j_!(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[d_G]$.

Soit U l'ouvert de Gr image inverse de BG par le morphisme $Gr \to \mathrm{Bun}_G$. Alors $G\backslash U$ est l'image inverse par $q : G\backslash Gr \to \mathrm{Bun}_G$ de l'ouvert BG de Bun_G et la restriction à $G\backslash U$ de q est simplement la projection de $G\backslash U$ vers BG. Soit $M \in D^b_{c,G(\mathcal{O})}(Gr)$. On a $\mathrm{RHom}_{D^b_{c,G(\mathcal{O})}(Gr)}(\delta_1, M) = H^*_{G(\mathcal{O})}(i^!(M))$, où i est l'inclusion de $BG(\mathcal{O})$ dans $G(\mathcal{O})\backslash Gr$ (correspondant à l'inclusion du point 1 dans Gr). Comme la cohomologie $G(\mathcal{O})$-équivariante est égale à la cohomologie G-équivariante, on a $H^*_{G(\mathcal{O})}(i^!(M)) = H^*_G(i'^!(M))$ où i' est l'inclusion de BG dans $G\backslash Gr$ (correspondant à l'inclusion du point 1 dans Gr). D'autre part

$$\begin{aligned} &\mathrm{RHom}_{D_c^{b,0}(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)}(\gamma(\delta_1), \gamma(M)) \\ &= \mathrm{RHom}_{D_c^{b,0}(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)}(j_!(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[d_G], \gamma(M)) = H^*_G(q_!(r^*(M) \mid_{G\backslash U})), \end{aligned}$$

où q est ici la projection de $G\backslash U$ vers BG.

L'ouvert U, qui est isomorphe à $G\backslash G(R)$ est muni d'une action de $\mathbb{G}_m$ (par n'importe quelle action de $\mathbb{G}_m$ par automorphismes de $\mathbb{P}^1$ ayant x comme point attracteur) et cette action contracte U sur le point 1 de Gr, et le complexe de faisceaux M est équivariant relativement à cette action. Le lemme 2.2 ci-dessous implique l'égalité $q_!(r^*(M) \mid_{G\backslash U}) = i'^!(M)$ dans $D^b_{c,G}(\text{point})$ (où i' désigne ici de BG dans U/G). En effet le morphisme d'adjonction $i'_! i'^! \to \mathrm{Id}$ fournit un morphisme $i'^!(M) = q_! i'_! i'^!(M) \to q_! M$ dans $D^b_{c,G}(\text{point})$ (en notant par abus M au lieu de $r^*(M) \mid_{G\backslash U}$) et il s'agit de montrer que c'est un isomorphisme. Cela est équivalent au fait que ce morphisme donne un isomorphisme dans la catégorie $D(\mathrm{Vect})$ (c'est-à-dire en oubliant l'équivariance par G), ce qui résulte du lemme 2.2 ci-dessous, avec Y un point, $Z = Gr$, i l'inclusion du point dans Gr dont l'image est l'origine de Gr et p la projection de Gr sur le point.

Donc

$$\mathrm{RHom}_{D^b_{c,G(\mathcal{O})}(Gr)}(\delta_1, M) = \mathrm{RHom}_{D^{b,0}_c(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)}(\gamma(\delta_1), \gamma(M)).$$

D'autre part $D^b_{c,G(\mathcal{O})}(Gr)$ est une catégorie triangulée monoïdale (pour la convolution) et elle est munie d'une adjonction. On en déduit que γ est une équivalence de catégories. On a donc démontré la proposition 2.1, en utilisant le lemme suivant.

Lemme 2.2 *Soit Y et Z des schémas sur k et $p : Z \to Y$ et $i : Y \to Z$ des morphismes tels que $p \circ i = \mathrm{Id}$. Soit V l'ouvert de Z qui est le complémentaire de l'image de i et soit $j : V \to Z$ l'inclusion de V dans Z. On suppose Z muni d'une action de $\mathbb{G}_m$ qui fixe Y et qui contracte Z sur Y, c'est-à-dire que le morphisme $\mathbb{G}_m \times Z \to Z$ qui donne l'action de $\mathbb{G}_m$ s'étend en une application régulière $\mathbb{A}^1 \times Z \to Z$ telle que la composition $0 \times Z \to \mathbb{A}^1 \times Z \to Z$ coïncide avec $i \circ p : Z \to Y \to Z$. Soit $\mathcal{F}$ un complexe de faisceaux $\mathbb{G}_m$-équivariant sur Z. Alors les morphismes*

$$i^!(\mathcal{F}) = p_! i_! i^!(\mathcal{F}) \to p_!(\mathcal{F}) \quad \textit{et} \quad p_*(\mathcal{F}) \to p_* i_* i^*(\mathcal{F}) = i^*(\mathcal{F})$$

associés aux morphismes d'adjonction $i_! i^! \to \mathrm{Id}$ et $\mathrm{Id} \to i_* i^*$ sont des isomorphismes dans $D^b_c(Y, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

Ce lemme est exactement le lemme 5.3 de [BFGM02]. Pour la commodité du lecteur nous reproduisons ici la démonstration que nous a indiquée par Finkelberg (cette démonstration est très proche de la preuve du lemme 6 dans [Bra03]).

Les deux isomorphismes sont équivalents car on passe de l'un à l'autre par dualité de Verdier. Nous montrons simplement le deuxième. Grâce au triangle distingué $j_!j^*\mathcal{F} \to \mathcal{F} \to i_*i^*\mathcal{F} \xrightarrow{+1}$ dans la catégorie dérivée des faisceaux ℓ-adiques sur Z, il suffit de montrer que pour tout faisceau $\mathbb{G}_m$-équivariant $\mathcal{F}$ sur V, on a $p_*j_!\mathcal{F} = 0$, ce que nous faisons maintenant. On note $m : \mathbb{A}^1 \times Z \to \mathbb{A}^1 \times Z$ l'application qui à (λ, z) associe $(\lambda, \lambda.z)$ (où $\lambda.z$ désigne l'action de $\lambda \in \mathbb{A}^1$ sur $z \in Z$). Par adjonction on a un morphisme de foncteurs $\mathrm{id} \to m_*m^*$. Soit $p_1 : \mathbb{A}^1 \times Z \to \mathbb{A}^1$ la projection sur le premier facteur. On a le diagramme commutatif suivant, où i_0 désigne l'inclusion de $\mathbb{G}_m$ dans $\mathbb{A}^1$,

$$\begin{array}{ccc}
p_{1,*}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \boxtimes \mathcal{F}) & \to & p_{1,*}m_*m^*(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \boxtimes \mathcal{F}) \\
\| & & \| \\
\overline{\mathbb{Q}}_\ell \boxtimes p_*\mathcal{F} & & p_{1,*}m^*(\overline{\mathbb{Q}}_\ell \boxtimes \mathcal{F}) \\
 & \searrow & \| \\
 & & i_{0,!}\overline{\mathbb{Q}}_\ell \boxtimes p_*\mathcal{F}
\end{array}$$

La flèche oblique en bas $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \boxtimes p_*\mathcal{F} \to i_{0,!}\overline{\mathbb{Q}}_\ell \boxtimes p_*\mathcal{F}$ est un morphisme dans $D(\mathbb{A}^1 \times Y, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ qui est un isomorphisme sur $\mathbb{G}_m \times Y$. Un tel morphisme ne peut exister que si $p_*\mathcal{F}$ est nul dans $D(Y, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, ce qui termine la démonstration du lemme 2.2.

On peut récapituler la construction de l'équivalence de catégories $\alpha : D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG})) \to D_c^{b,0}(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ de la proposition 2.1 en disant que c'est la composée des trois équivalences

- la dualité de Koszul $D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG})) \to D^{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}B/^LG))$
- l'équivalence de Satake géométrique pour les catégories dérivées (d'après le théorème 5 de [BF08])

$$\sigma : D^{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}B/^LG)) \to D^b_{c,G(\mathcal{O})}(Gr)$$

- $\gamma : D^b_{c,G(\mathcal{O})}(Gr) \to D_c^{b,0}(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ qui vient de l'action des foncteurs de Hecke en x sur $j_!(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[d_G]$.

Dans le paragraphe suivant nous considérerons aussi l'équivalence de catégories $\tilde{\alpha} = \gamma \circ \sigma : D^{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}B/^LG)) \to D_c^{b,0}(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

Comme nous l'avions annoncé à la fin du paragraphe précédent, cette équivalence de catégorie α n'est pas compatible avec la dualité de Verdier, car $RHom_A(\overline{\mathbb{Q}}_\ell, A) = \overline{\mathbb{Q}}_\ell[\dim G]$ si G est semi-simple alors que le dual de Verdier de $j_!(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est $j_*(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ à un décalage près. Dans la formule précédente comme dans toute la suite, $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et A désignent les A-DG-modules évidents avec l'action naturelle de ^LG.

Il reste à évoquer la question de la compatibilité avec la normalisation de Whittaker.

Conjecture 2.3 *L'équivalence de catégories α est compatible avec la normalisation de Whittaker, au sens de la définition 1.3.*

Nous verrons plus bas que la conjecture 2.3 est vraie pour $G = GL_2$. Pour un groupe général nous ne savons pas la montrer mais nous espérons que cela puisse se faire à l'aide des techniques de [FGV01]. D'abord le lemme suivant ramène la conjecture à un énoncé plus concret.

On rappelle que la condition de compatibilité à la normalisation de Whittaker est l'existence d'un isomorphisme entre un certain foncteur associé à α et le foncteur $\mathrm{R}\Gamma : D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{{}^LG})) \simeq D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}A/{}^LG)) \to D(\mathrm{Vect})$ qui consiste à oublier la structure de A-module et à prendre les invariants par ${}^LG$.

Pour toute représentation π de ${}^LG$, on note encore $\pi \in D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}A/{}^LG))$ le complexe concentré en degré 0, muni de l'action triviale de A.

Lemme 2.4 *Un foncteur $F : D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}A/{}^LG)) \to D(\mathrm{Vect})$ est isomorphe à* $\mathrm{R}\Gamma$ *si et seulement si $F(\pi) = \pi^{{}^LG}$ pour toute représentation π de ${}^LG$.*

En effet soit $\tilde{F} : D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}A)) \to D(\mathrm{Vect})$ le foncteur ${}^LG$-équivariant défini par $\tilde{F}(M) = \bigoplus_\pi F(M \otimes \pi) \otimes \pi^*$, où la somme directe est prise sur les classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de ${}^LG$ (inversement pour $M \in D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}A/{}^LG))$ on a $F(M) = (\tilde{F}(M))^{{}^LG}$). Soit $\tilde{G} : D^{\mathrm{parf}}(\mathrm{Spec}B) \to D(\mathrm{Vect})$ le foncteur ${}^LG$-équivariant déduit de $\tilde{F}$ par la dualité de Koszul. On a $\tilde{G}(B) = k$ et on doit montrer que $\tilde{G}$ est isomorphe au foncteur $\otimes_B k$. Cela se voit en représentant les objets de $D^{\mathrm{parf}}(\mathrm{Spec}B)$ par des complexes parfaits minimaux.

Grâce au lemme 2.4, la conjecture 2.3 est donc équivalente à l'égalité, pour toute représentation π de ${}^LG$,

$$\text{entre } \pi^{{}^LG} = R\Gamma(\pi) \quad \text{et} \quad R\Gamma_c(\mathrm{Bun}_N^{\mathcal{F}_T}, P_\psi^0 \otimes \pi^{0,*}(T_{x,\pi}(j_!(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)))).$$

Si π est la représentation triviale, ceci équivaut à $R\Gamma_c(V, P_\psi^0 \mid_V) = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, où V est l'ouvert de $\mathrm{Bun}_N^{\mathcal{F}_T}$, image inverse de BG par $\pi^0 : \mathrm{Bun}_N^{\mathcal{F}_T} \to \mathrm{Bun}_G$. Cela se démontre peut-être à l'aide de stratifications de Bun_G (si $G = SL_n$ on stratifie par la position relative des sections globales et de la filtration). Supposons maintenant que π n'est pas triviale. On a

$$R\Gamma_c(\mathrm{Bun}_N^{\mathcal{F}_T}, P_\psi^0 \otimes \pi^{0,*}(T_{x,\pi}(j_!(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)))) = R\Gamma_c(\mathrm{Bun}_G, \pi_!^0(P_\psi^0) \otimes T_{x,\pi}(j_!(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)))$$

$$= R\Gamma_c(\mathrm{Bun}_G, T_{x,\pi^*}(\pi_!^0(P_\psi^0)) \otimes j_!(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) = R\Gamma_c(BG, T_{x,\pi^*}(\pi_!^0(P_\psi^0))|_{BG}).$$

Notons ν le plus haut poids de la représentation π^* de ${}^LG$. Le théorème 4 de la section 5.4.1 de [FGV01], implique que $T_{x,\pi^*}(\pi^0_!(P^0_\psi)) = \pi^\nu_!(\Psi_1^{x,\nu})$, où $\pi^\nu : {}_{x,\nu}\mathrm{Bun}_N^{\mathcal{F}_T} \to \mathrm{Bun}_G$ est le morphisme naturel, ${}_{x,\nu}\mathrm{Bun}_N^{\mathcal{F}_T}$ et le faisceau $\Psi_1^{x,\nu}$ sur ${}_{x,\nu}\mathrm{Bun}_N^{\mathcal{F}_T}$ sont comme dans la section 4.2.1 de [FGV01]. On rappelle que ${}_{x,\nu}\mathrm{Bun}_N^{\mathcal{F}_T}$ classifie les B-torseurs dont le T-torseur associé est $\mathcal{F}_T(-\nu x)$. Pour toute racine simple $\check{\alpha}$ de G, on a un morphisme évident

$$\mathcal{F}_T(-\nu x)^{\check{\alpha}} = \Omega(-\langle \nu, \check{\alpha}\rangle x) \to \Omega,$$

d'où une application $ev : {}_{x,\nu}\mathrm{Bun}_N^{\mathcal{F}_T} \to \mathbb{A}^1$ et $\Psi_1^{x,\nu} = ev^*(\mathcal{L}_\psi)[\dim {}_{x,\nu}\mathrm{Bun}_N^{\mathcal{F}_T}]$. Soit U_ν l'image inverse de BG par l'application ${}_{x,\nu}\mathrm{Bun}_N^{\mathcal{F}_T} \to \mathrm{Bun}_G$. Donc l'égalité $R\Gamma_c(\mathrm{Bun}_N^{\mathcal{F}_T}, P^0_\psi \otimes \pi^{0,*}(T_{x,\pi}(j_!(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)))) = 0$ équivaut à $R\Gamma_c(U_\nu, \Psi_1^{x,\nu}|_{U_\nu}) = 0$. Le lemme suivant récapitule la discussion précédente.

Lemme 2.5 *La conjecture 2.4 est équivalente à l'égalité* $R\Gamma_c(U_\nu, \Psi_1^{x,\nu}|_{U_\nu}) = \pi^{{}^LG}$ *pour toute représentation* π *de* ${}^LG$*, en notant* ν *le plus haut poids de* π^*.

La fin de ce paragraphe est consacrée au cas où G est égal à GL_2, PGL_2 ou SL_2.

Explicitons d'abord le cas où $G = GL_2$. Pour $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $\epsilon \in \{0,1\}$ congru à a modulo 2, l'image par α de l'objet de $D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}A/{}^LG))$ donné par le complexe supporté en degré 0 et égal à la représentation $\mathrm{Sym}^a \otimes \det^b$ de ${}^LG = GL_2$ (et muni de l'action triviale de A) est l'objet de $D_c^{b,0}(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ égal à l'extension par 0 de l'ouvert $\mathcal{O}(b+\frac{a+\epsilon}{2}) \oplus \mathcal{O}(b+\frac{a-\epsilon}{2}) \cup ... \cup \mathcal{O}(b) \oplus \mathcal{O}(a+b)$ à Bun_G de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[-a-(a+2b)-4]$ sur $\mathcal{O}(b+\frac{a+\epsilon}{2}) \oplus \mathcal{O}(b+\frac{a-\epsilon}{2}) \cup ... \cup \mathcal{O}(b) \oplus \mathcal{O}(a+b)$. Il n'y pas de formule si simple pour un groupe général. Cependant le support de l'objet de $D_c^{b,0}(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ associé à une représentation π de ${}^LG$ (avec l'action triviale de A) est inclus dans la réunion des points associés aux poids de π (on rappelle d'après [Gro57] que les points de Bun_G sont en bijection avec les copoids de G, modulo l'action du groupe de Weyl).

Vérifions la conjecture 2.3 pour GL_2. On a $\mathrm{Bun}_N^{\mathcal{F}_T} = \mathbb{A}^1$, $P^0_\psi = \mathcal{L}_\psi[1]$ et $\mathbb{G}_m \subset \mathbb{A}^1$ s'envoie dans la strate $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ de Bun_G, et $\{0\}$ dans la strate $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(-1)$. D'où

$$R\Gamma_c(\mathrm{Bun}_N^{\mathcal{F}_T}, P^0_\psi \otimes \pi^{0,*}(j_!(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))) = R\Gamma_c(\mathbb{G}_m, \mathcal{L}_\psi[1]) = \overline{\mathbb{Q}}_\ell,$$

et $R\Gamma_c(\mathrm{Bun}_N^{\mathcal{F}_T}, P^0_\psi \otimes \pi^{0,*}(T_{x,\pi}(j_!(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))))$ vaut 0 si la dimension de π est paire et $R\Gamma_c(\mathbb{A}^1, \mathcal{L}_\psi[1])[?] = 0$ si π est de dimension impaire et n'est pas triviale. D'après la discussion après la conjecture 2.3 et notamment le lemme 2.4, cela démontre la conjecture 2.3 pour GL_2.

Pour $G = PGL_2$, et $a \in \mathbb{N}$ et $\epsilon \in \{0,1\}$ congru à a modulo 2, on voit que l'image par α de la représentation Sym^a de ${}^LG = SL_2$ (avec l'action triviale de A) est l'extension par 0 de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[-a-3]$ sur l'ouvert $\mathcal{O}(\frac{a+\epsilon}{2}) \oplus \mathcal{O}(\frac{a-\epsilon}{2}) \cup ... \cup \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(a)$ de Bun_G.

Pour $G = SL_2$ et $a \in \mathbb{N}$, l'image par α de la représentation $\mathrm{Sym}^{2a} \otimes \det^{-a}$ de ${}^LG = PGL_2$ (avec l'action triviale de A) est l'extension par 0 de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[-2a-3]$ sur l'ouvert $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O} \cup ... \cup \mathcal{O}(-a) \oplus \mathcal{O}(a)$ de Bun_G.

Expliquons maintenant, pour $G = SL_2$, le lien entre l'équivalence de catégorie α et la construction des séries d'Eisentein géométriques renormalisées réalisée par Braverman et Gaitsgory dans le paragraphe 7 de [BG02] (qui coïncide avec la correspondance theta [Lys06, Lys08] pour les groupes déployés SO_2 et SL_2). On note Reg la représentation régulière gauche de ${}^LG$, placée en degré 0, avec l'action triviale de A : Reg n'appartient pas à $D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{{}^LG}))$ mais c'est une somme infinie d'objets de cette catégorie. Le tore ${}^LT$ des matrices diagonales de ${}^LG = PGL_2$ est identifié à $\mathbb{G}_m$ par $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto x$. Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, soit χ_n le caractère de ${}^LT$ donné par $x \mapsto x^n$. Soit $\mathrm{Reg}_{\chi_n} = \mathrm{Hom}_{{}^LG}(\chi_n, \mathrm{Reg})$ où Hom est pris pour la représentation régulière droite de ${}^LG$, et où ${}^LG$ opère sur Reg_{χ_n} par son action à gauche sur Reg. Bien sûr Reg_{χ_n} est une somme infinie d'objets de $D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{{}^LG}))$, et son image par α est une somme infinie d'objets de $D_c^{b,0}(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, donc appartient à la catégorie dérivée non bornée des faisceaux ℓ-adiques sur Bun_G, que l'on notera $D(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. On a $\mathrm{Reg}_{\chi_n} = \bigoplus_{a=|n|}^{+\infty} \mathrm{Sym}^{2a} \otimes \det^{-a}$. On en déduit que, pour $k \in \mathbb{N}$, la fibre en $\mathcal{O}(-k) \oplus \mathcal{O}(k)$ de l'élément de $D(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ associé à Reg_{χ_n} est $\bigoplus_{a=\max(|n|,k)}^{+\infty} \overline{\mathbb{Q}}_\ell[-2a-3]$. Par ailleurs la série d'Eisentein géométrique renormalisée associée à l'entier n (en fait à $n-1$ mais nous recentrons pour que l'équation fonctionnelle relie n et $-n$) est telle que sa fibre en $\mathcal{O}(-k) \oplus \mathcal{O}(k)$ est égale, à un décalage près par une constante indépendante de k et n, à $H_c^\bullet(\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-n+1), \mathcal{O}(-k) \oplus \mathcal{O}(k))/\mathbb{G}_m, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[2n]$. Or $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-n+1), \mathcal{O}(-k) \oplus \mathcal{O}(k))$ a pour dimension $\max(n+k, 0) + \max(n-k, 0) = n + \max(|n|, k)$, et donc

$$H_c^\bullet(\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-n+1), \mathcal{O}(-k) \oplus \mathcal{O}(k))/\mathbb{G}_m, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)[2n] = \bigoplus_{a=-\infty}^{\max(|n|,k)} \overline{\mathbb{Q}}_\ell[-2a].$$

Enfin on peut former un triangle distingué dont les trois sommets sont (à des décalages près) $\bigoplus_{a=\max(|n|,k)}^{+\infty} \overline{\mathbb{Q}}_\ell[-2a]$, $\bigoplus_{a=-\infty}^{\max(|n|,k)} \overline{\mathbb{Q}}_\ell[-2a]$ et $\bigoplus_{a=-\infty}^{+\infty} \overline{\mathbb{Q}}_\ell[-2a]$. Ce dernier objet n'est pas nul mais la fonction associée à $\bigoplus_{a=-\infty}^{+\infty} \overline{\mathbb{Q}}_\ell[-2a](-a)$ est formellement nulle (si on ajoute partout les twists à la Tate, on a encore un triangle distingué avec ce dernier objet, au moins à un twist près). Donc au niveau des fonctions, en mettant les sommes infinies sous forme de fractions rationnelles, l'équivalence de catégories α est compatible à la construction des séries d'Eisentein renormalisées de [BG02]. Nous ne comprenons pas d'où vient cette différence entre l'image par α de Reg (qui est une somme infinie d'objets de $D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG}))$) et la somme directe des séries d'Eisentein géométriques renormalisées associées aux entiers relatifs. Il est important de noter que le “défaut” n'est pas dû à α mais aux séries d'Eisentein géométriques renormalisées : en effet, comme Braverman et Gaitsgory l'ont observé, la somme directe des séries d'Eisentein géométriques renormalisées associées aux entiers relatifs n'est *pas* munie d'une action de ${}^LG = PGL_2$ mais seulement de son algèbre de Lie, alors que par construction même l'image par α de Reg est munie d'une action de ${}^LG = PGL_2$. En effet les deux sont munis d'une action de ${}^LT$ (qui vient simplement de la décomposition de Reg en les Reg_{χ_n} ou de l'indexation des séries d'Eisenstein géométriques renormalisées par les entiers relatifs) et quand on regarde les poids relativement à cette action sur la cohomologie en un degré donné de la fibre en un point donné de Bun_G,

- pour l'image par α de Reg on trouve un ensemble vide ou un segment (comme il se doit pour la restriction à ${}^LT$ d'une représentation de ${}^LG$)
- alors que pour la somme directe des séries d'Eisentein géométriques renormalisées associées aux entiers relatifs on trouve l'ensemble vide ou le complémentaire du même segment dans la droite à laquelle il appartient (d'où une représentation de l'algèbre de Lie de ${}^LG = PGL_2$ mais pas de représentation du groupe).

3 Extension à des catégories plus grosses et faisceau constant sur Bun_G

On espère étendre l'équivalence de catégories de la proposition 2.1 en une équivalence de catégories $D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG})) \underset{\beta^?}{\overset{\alpha^?}{\rightleftarrows}} D^?(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, où les catégories $D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG}))$ et $D^?(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ ne sont pas précisées, mais on voudrait que $D^?(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ contienne le faisceau constant $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ sur Bun_G. On aurait alors nécessairement, pour tout $M \in D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG}))$, et pour tout $K \in D^?(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$,

$$\mathrm{RHom}_{D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG}))}(M, \beta^?(K)) = \mathrm{RHom}_{D^?(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)}(\alpha^?(M), K).$$

Le problème est que si prend pour K le faisceau constant $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ sur Bun_G, on trouve pour $\beta^?(K)$ un DG-module ${}^LG$-équivariant sur A infini des deux côtés et quasi-isomorphe à 0. Au contraire l'image de $\beta^?(K)$ par la dualité de Koszul est un DG-module ${}^LG$-équivariant sur B que l'on peut calculer et qui n'est pas quasi-isomorphe à 0.

Donc on cherche plutôt une équivalence de catégories

$$\tilde{\alpha}^? : D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}B/{}^LG)) \to D^?(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

(où les catégories ne sont pas précisées) d'inverse $\tilde{\beta}^?$, étendant $\tilde{\alpha} = \gamma \circ \sigma$: $D^{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}B/{}^LG)) \to D_c^{b,0}(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. On aurait donc en particulier, pour tout $M \in D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{{}^LG}))$, et pour tout $K \in D^?(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$,

$$\mathrm{RHom}_{D(\mathcal{O}^?(\mathrm{Spec}B/{}^LG))}(M, \tilde{\beta}^?(K)) = \mathrm{RHom}_{D^?(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)}(\tilde{\alpha}^?(M), K).$$

Nous nous contentons ici de décrire l'image par $\tilde{\beta}^?$ du faisceau constant $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ sur Bun_G. Soit $M \in D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}B/{}^LG))$. On veut calculer

$$\mathrm{RHom}_{D^?(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)}(\tilde{\alpha}(M), \overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

Soit D la dualité de Verdier sur $D^?(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ et $D' = D[-2\dim G]$ de telle sorte que $D'(K) = \mathrm{RHom}(K, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ pour $K \in D^?(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Soit d'autre part $D'' : D^b_{c,G(\mathcal{O})}(Gr) \to D^b_{c,G(\mathcal{O})}(Gr)$ la dualité de Verdier sur $G(\mathcal{O})\backslash Gr$ normalisée par $D''(\delta_1) = \delta_1$ (où δ_1 est le faisceau gratte-ciel en 1). On note aussi D''' la dualité de Verdier sur $G\backslash Gr$, normalisée par $D''(\delta_1) = \delta_1$. On a bien sûr $D''' \circ r^* = r^* \circ D''$. Alors on a pour $K \in D^b_{c,G(\mathcal{O})}(Gr)$,

$$D'(\gamma(K)) = D'(q_! r^* K) = q_*(D'''(r^*K)) = q_* r^*(D''(K)).$$

On en déduit, pour tout $K \in D^b_{c,G(\mathcal{O})}(Gr)$,

$$\mathrm{RHom}_{D(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)}(\gamma(K), \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = H^*_{G(\mathcal{O})}(D''(K)),$$

où $H^*_{G(\mathcal{O})}(.)$ est la cohomologie totale $G(\mathcal{O})$-équivariante sur Gr. D'après le lemme 14 de [BF08] (avec $\hbar = 0$),

$$\text{pour tout } M \in D^{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}B/{}^LG)), \quad D''(\sigma(M)) = \sigma(\tau(\mathrm{RHom}_B(M, B)))$$

où $\tau : D^{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}B/{}^LG)) \to D^{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}B/{}^LG))$ vient de l'action de l'automorphisme (éventuellement extérieur) de ${}^LG$ (et donc de ${}^L\mathfrak{g}$) qui préserve un tore maximal ${}^LT$ et agit sur celui-ci par $t \mapsto t^{-1}$.

On note $\mathfrak{c}_{{}^LG} = \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}{}^L\mathfrak{g})^{{}^LG}$ l'espace de Chevalley, quotient grossier de ${}^L\mathfrak{g}^*$ par l'action coadjointe de ${}^LG$. On munit $\mathfrak{c}_{{}^LG}$ de l'action de $\mathbb{G}_m$ qui provient de l'action de $\mathbb{G}_m$ sur ${}^L\mathfrak{g}^*$ par $\lambda \mapsto \lambda^2\mathrm{Id}$. Une section de Kostant est une application régulière $s : \mathfrak{c}_{{}^LG} \to {}^L\mathfrak{g}^*$ qui est une section de l'application quotient ${}^L\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{c}_{{}^LG}$, et qui vérifie $\lambda^2 s(x) = \mathrm{ad}^*(\lambda^{-2\rho})s(\lambda.x)$ pour $\lambda \in \mathbb{G}_m$ et $x \in \mathfrak{c}_{{}^LG}$, où ad^* désigne la représentation coadjointe et $(\lambda \mapsto \lambda^{2\rho}) : \mathbb{G}_m \to {}^LG$ est le copoids dominant de ${}^LG$ associé à la somme des racines positives de G.

On choisit une telle section de Kostant s, mais le paragraphe 2.6 de [BF08] et la remarque suivante montrent que les constructions qui suivent ne dépendent pas de ce choix.

On peut traduire ce qui précède en termes de l'algèbre graduée $B = \mathrm{Sym}^L\mathfrak{g}[-2]$. La section de Kostant s fournit un morphisme d'algèbres $B^{^LG} \to B$ mais ce n'est pas un morphisme d'algèbres graduées. On note $\widetilde{\mathrm{Reg}}$ l'algèbre des fonctions sur ${}^LG$, muni de la représentation régulière droite de ${}^LG$, et graduée par l'action à gauche du sous-groupe $\mathbb{G}_m$ des matrices diagonales d'un SL_2 principal (c'est-à-dire que $\lambda \in \mathbb{G}_m$ agit par translations à gauche par $\lambda^{2\rho}$). L'application $(x, g) \mapsto ad^*(g^{-1})s(x)$ de $\mathfrak{c}_{^LG} \times {}^LG$ dans ${}^L\mathfrak{g}^*$ fournit un morphisme d'algèbres graduées ${}^LG$-équivariantes de B dans $B^{^LG} \otimes \widetilde{\mathrm{Reg}}$. On retient pour la suite que cela munit $B^{^LG} \otimes \widetilde{\mathrm{Reg}}$ d'une structure de B-module gradué ${}^LG$-équivariant.

Remarque. Soit ${}^LN$ le radical unipotent du Borel de ${}^LG$, et $\mu : {}^L\mathfrak{n} \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ un caractère non dégénéré de ${}^L\mathfrak{n}$. On suppose que la section de Kostant $s : \mathfrak{c}_{^LG} \to {}^L\mathfrak{g}^*$ qui a été choisie prend ses valeurs dans $\{\nu \in {}^L\mathfrak{g}^*, \nu|_{^L\mathfrak{n}} = \mu\}$. Le cotangent tordu

$$T^*_\mu({}^LG/{}^LN) = {}^LG \times_{^LN} \{\nu \in {}^L\mathfrak{g}^*, \nu|_{^L\mathfrak{n}} = \mu\}$$

est muni de l'action de $\mathbb{G}_m \ni \lambda$ par $(g, \nu) \mapsto (g\lambda^{-2\rho}, \lambda^2 Ad^*(\lambda^{2\rho})(\nu))$, et de l'action évidente de $G \ni h$ par $(g, \nu) \mapsto (hg, \nu)$. D'autre part on a l'application moment $T^*_\mu({}^LG/{}^LN) \to {}^L\mathfrak{g}^*$ qui à (g, ν) associe $Ad^*(g)\nu$, ce qui fait que l'algèbre des fonctions régulières sur $T^*_\mu({}^LG/{}^LN)$ est une B-algèbre graduée ${}^LG$-équivariante. L'application $(x, g) \mapsto (g^{-1}, s(x))$ de $\mathfrak{c}_{^LG} \times {}^LG$ dans $T^*_\mu({}^LG/{}^LN)$ induit un isomorphisme de B-algèbres graduées ${}^LG$-équivariantes de $B^{^LG} \otimes \widetilde{\mathrm{Reg}}$ dans l'algèbre des fonctions régulières sur $T^*_\mu({}^LG/{}^LN)$.

D'après le théorème 4 de [BF08], pour tout $M \in D^{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}B/{}^LG))$, $H^*_{G(\mathcal{O})}(\sigma(M))$ est la restriction de M à la section de Kostant : en regardant M comme DG-module sur B, et en oubliant les graduations c'est $M \otimes_B B^{^LG}$, où $B^{^LG}$ est un B-module (non gradué) grâce au morphisme d'algèbres $B \to B^{^LG}$ associé à la section de Kostant s. La formule précise, prenant en compte les graduations, est la suivante : $H^*_{G(\mathcal{O})}(\sigma(M)) = (M \otimes_B (B^{^LG} \otimes \widetilde{\mathrm{Reg}}))^{^LG}$. On vérifie facilement que l'on a aussi $H^*_{G(\mathcal{O})}(\sigma(\tau(M))) = (M \otimes_B (B^{^LG} \otimes \widetilde{\mathrm{Reg}}))^{^LG}$.

Il résulte de tout ceci que pour tout $M \in D^{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}B/{}^LG))$,

$$\mathrm{RHom}_{D(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)}(\tilde{\alpha}(M), \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = (\mathrm{RHom}_B(M, B) \otimes_B (B^{^LG} \otimes \widetilde{\mathrm{Reg}}))^{^LG}$$

$$= \mathrm{RHom}_{D^{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}B/{}^LG))}(M, B^{^LG} \otimes \widetilde{\mathrm{Reg}}).$$

On s'attend donc à ce que $\beta^?(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) = B^{^LG} \otimes \widetilde{\mathrm{Reg}}$ dans $D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}B/{}^LG))$ Comme la section de Kostant $s : \mathfrak{c}_{^LG} \to {}^L\mathfrak{g}^*$ est partout non nulle, l'objet

$\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\dim G] \otimes_B (B^{^LG} \otimes \widetilde{\mathrm{Reg}})$ de $D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG}))$ associé à $B^{^LG} \otimes \widetilde{\mathrm{Reg}}$ par la dualité de Koszul est quasi-isomorphe à 0. En fait il est infini des deux côtés, ce qui explique qu'il puisse être quasi-isomorphe à 0 sans être homotope à 0.
Remarque. On peut peut-être définir la catégorie $D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG}))$ comme la catégorie triangulée dont les objets sont les DG-modules ^LG-équivariants (éventuellement infinis des deux côtés) et les flèches sont les morphismes à équivalence d'homotopie près. De cette façon un objet pourrait être quasi-isomorphe à 0 sans être nul.
Remarque. Il serait intéressant de vérifier

$$\mathrm{RHom}_{D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Spec} B/^LG))}(B^{^LG} \otimes \widetilde{\mathrm{Reg}}, B^{^LG} \otimes \widetilde{\mathrm{Reg}})$$

$$= \mathrm{RHom}_{D^?(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = H^*(\mathrm{Bun}_G).$$

Sur une courbe quelconque (sur un corps fini), $H^*(\mathrm{Bun}_G)$ a été calculé par Heinloth et Schmitt [HS07] (et auparavant par Neumann et Stuhler [NS05] pour $G = SL_n$), mais sur $\mathbb{P}^1$, le diagramme $G(\mathcal{O})\backslash Gr \leftarrow G\backslash Gr \rightarrow G(R)\backslash Gr$ montre que $H^*(\mathrm{Bun}_G) = H^*_{G(\mathcal{O})}(Gr)$, et $H^*_{G(\mathcal{O})}(Gr)$ a été calculé par Ginzburg. De plus Ginzburg décrit l'action de $H^*_{G(\mathcal{O})}(Gr)$ sur le foncteur $H^*_{G(\mathcal{O})}(.)$ sur $D^b_{c,G(\mathcal{O})}(Gr)$, ce qui permet de définir une flèche

$$H^*_{G(\mathcal{O})}(Gr) \rightarrow \mathrm{RHom}_{D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Spec} B/^LG))}(B^{^LG} \otimes \widetilde{\mathrm{Reg}}, B^{^LG} \otimes \widetilde{\mathrm{Reg}})$$

et il s'agit de vérifier que c'est un isomorphisme. C'est vrai si G est un tore.

4 Automorphismes de $\mathbb{P}^1$

Pour pouvoir poser le problème, nous commençons par des considérations générales qui n'ont de sens que dans le cadre des D-modules. Soit S une variété lisse sur un corps k de caractéristique 0 et X une courbe projective lisse au-dessus de S. Soit G un groupe réductif déployé sur k. Alors $\mathrm{Bun}_{G,X/S}$ et $\mathrm{Loc}_{^LG,X/S}$ sont des champs au-dessus de S. En fait $\mathrm{Loc}_{^LG,X/S}$ doit être muni d'une connexion horizontale plate au-dessus de S mais je ne connais pas la définition d'un D_S-champ. En revanche la définition d'un D_S-schéma figure dans le chapitre 2 de [BD04] : un D_S-schéma est un schéma au-dessus de S muni d'une connexion horizontale plate.

Si on connaissait la définition d'un D_S-champ on pourrait espérer une équivalence de catégories dérivées entre D-modules sur l'espace total de $\mathrm{Bun}_{G,X/S}$ (qui est un champ au-dessus de S) et les $(D, \mathcal{O})$-modules sur $\mathrm{Loc}_{^LG,X/S}$ (i.e. D-modules dans la base et $\mathcal{O}$-modules dans la fibre, ce qui a un sens grâce à la connexion horizontale plate). Pour contourner cette difficulté donnons-nous une section $x : S \to X$. Notons $\mathrm{Loc}^{\mathrm{triv},x}_{{}^LG,X/S}$ le schéma au-dessus de S qui classifie les systèmes ${}^LG$-systèmes locaux sur X trivialisés en x. C'est un D_S-schéma muni d'une action de ${}^LG$ compatible avec la connexion horizontale et $\mathrm{Loc}_{{}^LG,X/S}$ s'identifie au quotient de $\mathrm{Loc}^{\mathrm{triv},x}_{{}^LG,X/S}$ par ${}^LG$. On conjecture alors l'existence d'une équivalence de catégories dérivées entre D-modules sur l'espace total de $\mathrm{Bun}_{G,X/S}$ et $(D,\mathcal{O})$-modules ${}^LG$-équivariants sur $\mathrm{Loc}^{\mathrm{triv},x}_{{}^LG,X/S}$.

Revenons au cas de $\mathbb{P}^1$, dans un cadre ℓ-adique avec k de caractéristique $p > 0$. La base universelle sur laquelle $\mathbb{P}^1$ est défini est $S = BPGL_2$. Cependant dans ce cas l'application quotient de $X = \mathbb{P}^1/BPGL_2$ vers $S = BPGL_2$ n'admet pas de section et en plus nous ne savons pas décrire $\mathrm{Loc}_{{}^LG,X/S}$, qui doit sans doute être un "DG-champ dans la catégorie des faisceaux ℓ-adiques sur $BPGL_2$". Nous nous limiterons donc à étudier la situation où $X = \mathbb{P}^1/\mathbb{G}_m$ est au-dessus de $S = B\mathbb{G}_m$, où $\mathbb{G}_m$ est le tore des matrices diagonales de PGL_2. Autrement dit $\mathbb{G}_m$ agit sur $\mathbb{P}^1$ en laissant fixes les deux points $0, \infty$ et on possède la section $x : S \to X$ correspondant au point 0.

On peut alors considérer l'espace de modules $\mathrm{Loc}^{\mathrm{triv},x}_{{}^LG,X/S}$ des ${}^LG$-systèmes locaux sur X trivialisés en x : c'est un DG-schéma dans la catégorie des faisceaux ℓ-adiques au-dessus de $S = B\mathbb{G}_m$, et $\mathrm{Loc}_{{}^LG,X/S} = \mathrm{Loc}^{\mathrm{triv},x}_{{}^LG,X/S}/{}^LG$. On a $\mathrm{Loc}^{\mathrm{triv},x}_{{}^LG,X/S} = \mathrm{Spec}A$, où A est une DG-algèbre (ou une A_∞-algèbre ?) dans la catégorie des faisceaux ℓ-adiques sur $B\mathbb{G}_m$. En fait A doit être déterminée par une DG-algèbre de Lie (ou une A_∞-algèbre de Lie ?) qui est l'espace tangent dérivé (décalé de 1) en le système local trivial dans $\mathrm{Loc}^{\mathrm{triv},x}_{{}^LG,X/S}$. Si on identifie, par Bernstein et Lunts [BL94], les complexes de faisceaux ℓ-adiques sur $B\mathbb{G}_m$ et les DG-modules sur $H^*(B\mathbb{G}_m) = \overline{\mathbb{Q}}_\ell[\hbar]$ (en utilisant les notations de [BF08], avec $\hbar$ de degré 2) l'espace tangent dérivé (décalé de 1) en le système local trivial dans $\mathrm{Loc}^{\mathrm{triv},x}_{{}^LG,X/S}$ est $\mathrm{Ker}(H^*_{\mathbb{G}_m}(\mathbb{P}^1) \to H^*_{\mathbb{G}_m}(\{0\})) \otimes \mathfrak{g}$, le crochet de Lie combinant le cup produit en cohomologie équivariante et le crochet de Lie dans $\mathfrak{g}$. On a $H^*_{\mathbb{G}_m}(\mathbb{P}^1) = H^*(B\mathbb{G}_m) \otimes_{H^*(BPGL_2)} H^*_{PGL_2}(\mathbb{P}^1)$, or $H^*_{PGL_2}(\mathbb{P}^1) = H^*(BB)$ en notant B le groupe des matrices triangulaires supérieures dans PGL_2, mais $H^*(BB) = H^*(B\mathbb{G}_m)$. Donc

$$H^*_{\mathbb{G}_m}(\mathbb{P}^1) = H^*(B\mathbb{G}_m) \otimes_{H^*(BPGL_2)} H^*(B\mathbb{G}_m) = \overline{\mathbb{Q}}_\ell[\hbar] \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\hbar^2]} \overline{\mathbb{Q}}_\ell[\hbar].$$

De plus l'application $H^*_{\mathbb{G}_m}(\mathbb{P}^1) \to H^*_{\mathbb{G}_m}(\{0\})$ est simplement le produit

$$\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\hbar] \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\hbar^2]} \overline{\mathbb{Q}}_\ell[\hbar] \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell[\hbar].$$

Donc $\mathrm{Ker}(H^*_{\mathbb{G}_m}(\mathbb{P}^1) \to H^*_{\mathbb{G}_m}(\{0\})$ est le $H^*(B\mathbb{G}_m)$-module libre de rang 1 engendré par $\eta = \hbar \otimes 1 - 1 \otimes \hbar$. On calcule

$$(\hbar \otimes 1 - 1 \otimes \hbar)^2 = \hbar^2 \otimes 1 + 1 \otimes \hbar^2 - 2\hbar \otimes \hbar = 2\hbar(\hbar \otimes 1 - 1 \otimes \hbar),$$

autrement dit $\eta^2 = 2\hbar\eta$. Ceci suggère que si l'on considère A comme une DG-algèbre (ou une A_∞-algèbre) sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\hbar]$, $B = \mathrm{RHom}_A(\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\hbar], \overline{\mathbb{Q}}_\ell[\hbar])$ soit l'algèbre enveloppante asymptotique $U_\hbar$ introduite dans le paragraphe 2.2 de [BF08].

On prend donc pour B la DG-algèbre sur $H^*(B\mathbb{G}_m) = \overline{\mathbb{Q}}_\ell[\hbar]$ (avec $\hbar$ en degré 2) égale à l'algèbre enveloppante asymptotique $U_\hbar$ de [BF08], et qui est concentrée en degrés pairs, et munie d'une différentielle nulle. On rappelle que $U_\hbar$ est la $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\hbar]$-algèbre graduée engendrée par ${}^L\mathfrak{g}$ en degré 2, avec les relations $xy - yx = \hbar[x, y]$. On note $D^{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}B/{}^LG))$ la catégorie triangulée obtenue en localisant les quasi-isomorphismes à partir de la catégorie à homotopie près des DG-modules ${}^LG$ équivariants parfaits sur le DG-anneau B. On *définit* $D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{{}^LG,X/S}))$ comme la catégorie triangulée $D^{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}B/{}^LG))$. Comme précédemment on note $D^{b,0}_c(\mathrm{Bun}_{G,X/S}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) = D^{b,0}_{c,\mathbb{G}_m}(\mathrm{Bun}_{G,\mathbb{P}^1}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ la sous-catégorie pleine de $D^b_{c,\mathbb{G}_m}(\mathrm{Bun}_{G,\mathbb{P}^1}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ qui est la réunion des images des foncteurs d'extension par 0 : $D^b_{c,\mathbb{G}_m}(U, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to D^b_{c,\mathbb{G}_m}(\mathrm{Bun}_{G,\mathbb{P}^1}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ pour U ouvert de type fini de $\mathrm{Bun}_{G,\mathbb{P}^1}$ invariant par $\mathbb{G}_m$, où $D^b_{c,\mathbb{G}_m}(U, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est la catégorie des complexes bornés de faisceaux ℓ-adiques constructibles et équivariants par rapport à $\mathbb{G}_m$ sur U. Précisons que $\mathrm{Bun}_{G,\mathbb{P}^1}$ désigne ici ce qui était noté Bun_G dans les paragraphes précédents. On cherche alors une équivalence de catégories $\alpha : D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{{}^LG,X/S})) \to D^{b,0}_c(\mathrm{Bun}_{G,X/S}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

Notons $D^b_{c,G(\mathcal{O})\rtimes\mathbb{G}_m}(Gr)$ la catégorie dérivée bornée des faisceaux constructibles à support de type fini et $G(\mathcal{O}) \rtimes \mathbb{G}_m$-équivariants sur la grassmannienne affine. C'est une catégorie triangulée monoïdale et l'action des foncteurs de Hecke en x munit $D^{b,0}_c(\mathrm{Bun}_{G,X/S}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ d'une structure de module sur $D^b_{c,G(\mathcal{O})\rtimes\mathbb{G}_m}(Gr)$. Nous voulons montrer que $D^{b,0}_c(\mathrm{Bun}_{G,X/S}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est libre de rang 1 sur $D^b_{c,G(\mathcal{O})\rtimes\mathbb{G}_m}(Gr)$ avec $j_!(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[d_G]$ comme générateur. Il s'agit de montrer que le foncteur de $D^b_{c,G(\mathcal{O})\rtimes\mathbb{G}_m}(Gr)$ vers $D^b_{c,\mathbb{G}_m}(\mathrm{Bun}_{G,\mathbb{P}^1}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ donné par l'action des foncteurs de Hecke en x sur $j_!(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)[d_G]$ est une équivalence de catégories. On reprend simplement l'argument de la proposition 2.1, en appliquant le lemme 2.2 à $Y = B(G(\mathcal{O}) \ltimes \mathbb{G}_m)$. D'autre part Bezrukavnikov et Finkelberg montrent dans le théorème 5 de [BF08] qu'il existe une équivalence de catégories canonique entre $D^{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}B/{}^LG))$ et $D^b_{c,G(\mathcal{O})\rtimes\mathbb{G}_m}(Gr)$ (on rappelle que $B = U_\hbar$).

En composant les équivalences ci-dessus on obtient une équivalence de catégories $\alpha : D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{{}^LG,X/S})) \to D^{b,0}_c(\mathrm{Bun}_{G,X/S}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Nous espérons que c'est la correspondance de Langlands pour la courbe $\mathbb{P}^1$ au-dessus de $B\mathbb{G}_m$ et en particulier qu'elle est compatible avec la normalisation de Whittaker.

5 Remarques dans le cas d'une courbe de genre supérieur ou égal à 2

A partir de maintenant nous nous plaçons dans le cadre des D-modules. Soit X une courbe de genre $g \geq 2$ sur $\mathbb{C}$. Soit G un groupe semi-simple sur $\mathbb{C}$. Soit

$$D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG})) \underset{\beta^?}{\overset{\alpha^?}{\rightleftarrows}} D^?(\mathcal{D}\text{-mod}(\mathrm{Bun}_G))$$

des équivalences de catégories, inverses l'une de l'autre, entre des catégories non précisées, mais telles que $D^?(\mathcal{D}\text{-mod}(\mathrm{Bun}_G))$ contienne le D-module constant $\mathcal{O}$ sur Bun_G. On suppose que $\alpha^?$ et $\beta^?$ sont compatibles aux foncteurs de Hecke en x et à la normalisation de Whittaker au sens des définitions 1.1 et 1.3. Nous allons montrer, sous des hypothèses raisonnables, que $\beta^?(\mathcal{O})$ est nécessairement un complexe de $\mathcal{O}$-modules *acyclique* sur $\mathrm{Loc}_{^LG}$.

Soit x un point de X. Pour toute représentation π de ${}^LG$,

$$T_{x,\pi}(\mathcal{O}) = \mathcal{O} \otimes \pi^{gr},$$

où π^{gr} est π gradué par l'action d'un SL_2 principal : par exemple pour $G = GL_n$ et π la représentation standard de ${}^LG$, $T_{x,\pi}(\mathcal{O})$ est la cohomologie de de Rham relative de l'espace projectif sur Bun_G qui est associé à la restriction à $\mathrm{Bun}_G \times \{x\}$ du fibré vectoriel tautologique sur $\mathrm{Bun}_G \times X$. On doit pouvoir en déduire que $\beta^?(\mathcal{O})$ est supporté sur un voisinage formel du système local trivial dans $\mathrm{Loc}_{^LG}$, mais nous ne savons pas le justifier rigoureusement, parce que la catégorie $D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG}))$ n'a pas été précisée. Nous faisons donc l'hypothèse que $\beta^?(\mathcal{O})$ est supporté sur un voisinage formel du système local trivial dans $\mathrm{Loc}_{^LG}$.

Grâce à l'hypothèse que la courbe X est de genre ≥ 2 et que G est semi-simple et d'après la proposition 2.11.2 de [BD], $\mathrm{Loc}_{^LG}$ est localement intersection complète de dimension pure $(2g-2)\dim G$. En particulier le voisinage formel du système local trivial dans $\mathrm{Loc}_{^LG}$ est de la forme $\mathrm{Spec} A/{}^LG$ où A est un anneau local intersection complète. Donc $\beta^?(\mathcal{O})$ est représenté par un DG-module ${}^LG$-équivariant M sur A. Comme $R\Gamma_c(\mathrm{Bun}_N^{\mathcal{F}_T}, P^0_\psi) = 0$, et par l'hypothèse de compatibilité de $\beta^?$ à la normalisation de Whittaker au sens de la définition 1.3 l'image de $\beta^?(\mathcal{O})$ par le foncteur des sections globales $\mathrm{R}\Gamma : D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG})) \to D(\mathrm{Vect})$ est nulle. Cela signifie que la cohomologie du complexe M (dont on a oublié la structure de A-module) ne contient pas la représentation triviale de ${}^LG$, puisque que le foncteur des sections globales consiste pour un objet de $D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG}))$ supporté sur un voisinage formel du système local trivial à représenter cet objet par un DG-module ${}^LG$-équivariant sur A, à oublier la structure de A-module et à prendre les

invariants par ${}^LG$. Pour obtenir des renseignements sur les composantes isotypiques de la cohomologie de M relativement aux autres représentations de ${}^LG$ on applique les foncteurs de Hecke en x. Soit π une représentation de ${}^LG$. On a vu ci-dessus que $T_{x,\pi}(\mathcal{O}) = \mathcal{O} \otimes \pi^{gr}$ et donc la compatibilité de $\beta^?$ à la normalisation de Whittaker doit impliquer $\mathrm{R}\Gamma(\beta^?(T_{x,\pi}(\mathcal{O}))) = 0$. A cause de la compatibilité de $\beta^?$ aux foncteurs de Hecke en x, $\beta^?(T_{x,\pi}(\mathcal{O}))$ doit être représenté par le DG-module ${}^LG$-équivariant M sur A égal à $M \otimes \pi^{gr}$ et la cohomologie de $\mathrm{R}\Gamma(\beta^?(T_{x,\pi}(\mathcal{O}))) \in D(\mathrm{Vect})$ doit être $(H^*(M) \otimes \pi^{gr})^{{}^LG}$, où $H^*(M)$ est considéré comme un espace vectoriel gradué avec action de ${}^LG$ (c'est-à-dire qu'on oublie l'action de A). Comme ceci est vrai pour toute représentation π de ${}^LG$, $H^*(M) = 0$, ce qui signifie que M est un complexe acyclique.
Remarque. Il est donc difficile de décrire directement $\beta^?(\mathcal{O})$. Pour contourner cette difficulté, on peut introduire $B = \mathrm{RHom}_A(\mathbb{C}, \mathbb{C})$: c'est une algèbre graduée engendrée en degré 1 par $H^1_{dR}(X) \otimes {}^L\mathfrak{g}$ et en degré 2 par $H^2_{dR}(X) \otimes {}^L\mathfrak{g}$, avec les relations $(a \otimes x).(b \otimes y) + (b \otimes y).(a \otimes x) = ab \otimes [x, y]$. Il s'agit alors de comprendre le DG-module ${}^LG$-équivariant N sur B, qui correspond à M par la dualité de Koszul. Une condition que N devrait satisfaire est $\mathrm{RHom}_{D(\mathcal{O}(\mathrm{Spec} B/{}^LG))}(N, N) = H^*_{dR}(\mathrm{Bun}_G)$, où $H^*_{dR}(\mathrm{Bun}_G)$ est la cohomologie de de Rham de Bun_G. Nous proposerons une description conjecturale de N dans un prochain article.

6 Calculs avec les opers

Dans ce paragraphe on prend $X = \mathbb{P}^1$ sur $\mathbb{C}$ et on se place dans le cadre des D-modules. Soit G un groupe réductif sur $\mathbb{C}$. En reprenant la construction du paragraphe 2 dans le cadre des D-modules, on obtient une équivalence de catégories $\alpha : D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{{}^LG})) \to D^{b,coh,0}(\mathcal{D}\text{-mod}(\mathrm{Bun}_G))$ où $D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{{}^LG}))$ est la catégorie triangulée obtenue en localisant les quasi-isomorphismes dans la catégorie à homotopie près des DG-modules ${}^LG$ équivariants sur le DG-anneau $A = \mathrm{Sym}\, {}^L\mathfrak{g}^*[1]$, qui sont bornés (inférieurement et supérieurement) et de type fini (donc de dimension finie) et où $D^{b,coh,0}(\mathcal{D}\text{-mod}(\mathrm{Bun}_G))$ est la sous-catégorie pleine de $D^{b,coh}(\mathcal{D}\text{-mod}(\mathrm{Bun}_G))$ qui est la réunion des images des foncteurs d'extension par 0 : $D^{b,coh}(\mathcal{D}\text{-mod}(U)) \to D^{b,coh}(\mathcal{D}\text{-mod}(\mathrm{Bun}_G))$ pour U ouvert de type fini de Bun_G, où $D^{b,coh}(\mathcal{D}\text{-mod}(U))$ est la catégorie des complexes bornés de D-modules cohérents sur U. La théorie des D-modules sur les champs est développée dans le paragraphe 7 de [BD]. Cependant un ouvert U comme ci-dessus peut être représenté comme un quotient Y/H où Y est une variété lisse de type fini et H est un groupe algébrique de type fini, et alors un D-module cohérent sur U est par définition un D-module cohérent sur Y et H-équivariant au sens fort. Plus précisément la catégorie dérivée des D-modules cohérents sur Y, H-équivariants au sens fort, est construite dans le paragraphe 20.5 de [FG05]. Cette catégorie est obtenue en localisant les quasi-isomorphismes dans une DG-catégorie, dont les objets sont les complexes H-équivariants $X^\bullet$ de D-modules cohérents sur Y, munis d'un morphisme de complexes de D-modules sur Y, H-équivariant $i^\sharp : X^\bullet \to \mathfrak{h}^*[-1] \otimes X^\bullet$ (où $h^*[-1] \otimes X^\bullet$ est muni de l'action diagonale de H) tel que

- le morphisme $X^\bullet \to \Lambda^2(\mathfrak{h}^*)[-2] \otimes X^\bullet$ obtenu en itérant $i^\sharp$ est nul
- le morphisme $[d, i^\sharp] : X^\bullet \to \mathfrak{h}^* \otimes X^\bullet$ est égal à la différence entre la différentielle de l'action de H sur $X^\bullet$ et le produit par les champs de vecteurs sur Y donnant l'action infinitésimale de H sur Y, qui vient de la structure de D-module de $X^\bullet$.

Un morphisme dans cette DG-catégorie est un morphisme de complexe qui commute à $i^\sharp$.

Le but de ce paragraphe est d'étudier le compatibilité de α avec les calculs fondés sur la construction par Beilinson et Drinfeld de D-modules associés aux opers [BD]. Pour simplifier les constructions liées aux opers nous supposons G semi-simple et simplement connexe dans tout ce paragraphe.

On rappelle, en suivant le paragraphe 3.1 de [BD] ainsi que [BD05], la définition d'un ${}^LG$-oper, qui est aussi un ${}^L\mathfrak{g}$-oper puisque ${}^LG$ est adjoint. On fixe un sous-groupe de Borel ${}^LB \subset {}^LG$ et on note ${}^LN = [{}^LB, {}^LB]$. Pour tout ouvert $U \subset X$ on définit $\mathcal{O}\mathfrak{p}_{{}^L\mathfrak{g}}(U)$ comme l'ensemble des ${}^LB$-torseurs $\mathcal{F}_{{}^LB}$ sur U dont le ${}^LG$-torseur associé est muni d'une connexion vérifiant les conditions 1 et 2 de la définition 3.1.3 de [BD] ou les conditions de la définition 1.2 de [BD05]. D'après la proposition 3.1.4 de [BD] ou la proposition 1.3 de [BD05] ces objets n'ont pas d'automorphismes.

On fixe maintenant un plongement principal $i : PSL_2 \to {}^LG$, et on fixe le $\mathfrak{sl}_2$-oper $\mathcal{F}_0$ sur $X = \mathbb{P}^1$ défini comme dans le paragraphe 3.1 de [BD05] : $\mathcal{F}_0$ provient en fait d'un SL_2-oper égal au système local trivial de rang 2, dont le fibré vectoriel sous-jacent est muni de la filtration donnée par le sous-fibré en droites tautologique. L'image directe $i\mathcal{F}_0$ est un ${}^L\mathfrak{g}$-oper sur $\mathbb{P}^1$, que l'on note $(\mathcal{F}_{{}^LB}, \nabla)$.

On note ${}^LB_0 \subset PSL_2$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures et ${}^LN_0 = [{}^LB_0, {}^LB_0]$, et ${}^L\mathfrak{b}_0$ et ${}^L\mathfrak{n}_0$ les algèbres de Lie de ${}^LB_0$ et ${}^LN_0$. On note $V = {}^L\mathfrak{g}^{i({}^LN_0)}$ qui est un sous-espace vectoriel de ${}^L\mathfrak{g}$, qui est muni de la représentation adjointe Ad de $\mathbb{G}_m = {}^LB_0/{}^LN_0$. En suivant le paragraphe 3.1.9 de [BD] on définit une nouvelle action a sur V par $a(t) = tAd(t)v$ pour $v \in V$ et $t \in \mathbb{G}_m$. On a le fibré vectoriel V_{Ω_X} sur X, obtenu en tordant V par le $\mathbb{G}_m$-torseur Ω_X, relativement à l'action a de $\mathbb{G}_m$ sur V. On rappelle, en suivant le paragraphe 3.1.9 de [BD], que l'isomorphisme $V_{\Omega_X} = V_{\mathcal{F}_{^LB_0}} \otimes \Omega_X$ fournit une inclusion $V_{\Omega_X} \subset {}^L\mathfrak{b}_{\mathcal{F}_0} \otimes \Omega_X = {}^L\mathfrak{b}_{\mathcal{F}_{^LB}} \otimes \Omega_X$. En translatant ∇ par une section ν de V_{Ω_X} on obtient un nouveau ${}^L\mathfrak{g}$-oper noté $i\mathcal{F}_0 + \nu$.

La proposition 3.1.10 de [BD] ou le théorème 3.4 de [BD05] montrent que l'application de l'espace des sections de V_{Ω_X} sur un ouvert U de X vers $\mathcal{O}\mathfrak{p}_{^L\mathfrak{g}}(U)$, qui à ν associe $i\mathcal{F}_0 + \nu$ est un isomorphisme. On en déduit que l'application de l'espace des sections de V_{Ω_X} sur X vers $\mathcal{O}\mathfrak{p}_{^L\mathfrak{g}}(X)$ est un isomorphisme, en prenant ces deux espaces au sens dérivé.

On fixe un point $x \in X$. Comme le ${}^L\mathfrak{g}$-oper $i\mathcal{F}_0 + \nu$ a pour ${}^LB$-torseur sous-jacent $\mathcal{F}_{^LB}$ et donc *a fortiori* pour ${}^LG$-torseur sousjacent $\mathcal{F}_{^LB} \times_{^LB} {}^LG$ l'application d'oubli $\mathcal{O}\mathfrak{p}_{^L\mathfrak{g}}(X) \to \mathrm{Loc}_{^LG,X}$ se relève en un morphisme $\gamma : \mathcal{O}\mathfrak{p}_{^L\mathfrak{g}}(X) \to \mathrm{Loc}^{\mathrm{triv},x}_{^LG,X}$, où $\mathrm{Loc}^{\mathrm{triv},x}_{^LG,X}$ est le DG-champ classifiant les ${}^LG$-systèmes locaux sur X munis d'une trivialisation en x. Ce relèvement dépend du choix d'une trivialisation de $\mathcal{F}_{^LB,x} \times_{^LB} {}^LG$.

Proposition 6.1 *Le morphisme de DG-schémas $\gamma : \mathcal{O}\mathfrak{p}_{^L\mathfrak{g}}(X) \to \mathrm{Loc}^{\mathrm{triv},x}_{^LG,X}$ est un isomorphisme.*

En effet notons $\mathrm{Conn}^{\mathrm{triv}}_{^LG,X}$ le DG-schéma classifiant les connexions sur le ${}^LG$-torseur trivial sur X. On a un morphisme évident $\mathrm{Conn}^{\mathrm{triv}}_{^LG,X} \to \mathrm{Loc}^{\mathrm{triv},x}_{^LG,X}$, qui est un isomorphisme. En effet ces deux DG-schémas sont isomorphes à $\mathrm{Spec}A = \mathrm{Spec}\mathrm{Sym}{}^L\mathfrak{g}^*[1]$ et le morphisme est l'identité. Le fait que $\mathrm{Conn}^{\mathrm{triv}}_{^LG,X}$ est isomorphe à $\mathrm{Spec}A$ vient du fait que $H^\bullet(X,\Omega)\otimes{}^L\mathfrak{g}$ est concentré en degré 1 et égal à ${}^L\mathfrak{g}$.

Comme le ${}^LB$-torseur sous-jacent à $i\mathcal{F}_0 + \nu$ est indépendant de ν et égal à $\mathcal{F}_{^LB}$, et que $\mathcal{F}_{^LB} \times_{^LB} {}^LG$ est trivial, le morphisme $\gamma : \mathcal{O}\mathfrak{p}_{^L\mathfrak{g}}(X) \to \mathrm{Loc}^{\mathrm{triv},x}_{^LG,X}$ se relève naturellement en un morphisme $\gamma' : \mathcal{O}\mathfrak{p}_{^L\mathfrak{g}}(X) \to \mathrm{Conn}^{\mathrm{triv}}_{^LG,X}$ et il s'agit de montrer que c'est un isomorphisme. Cela revient à montrer que que la suite d'applications $V_{\Omega_X} \subset \mathfrak{b}_{\mathcal{F}_{^LB}} \otimes \Omega_X \subset {}^L\mathfrak{g}_{\mathcal{F}_{^LB}} \otimes \Omega_X$, fournit une bijection de $H^1(X, V_{\Omega_X})$ vers $H^1(X, {}^L\mathfrak{g}_{\mathcal{F}_{^LB}}\otimes\Omega_X) = H^1(X,\Omega_X)\otimes{}^L\mathfrak{g} = {}^L\mathfrak{g}$. On vérifie d'abord que toutes ces cohomologies sont concentrées en degré 1 : on a $H^0(X, V_{\Omega_X}) = 0$ car on a un isomorphisme $V_{\Omega_X} = \bigoplus_i \Omega_X^{d_i}$, où les $d_i \in \mathbb{N}^*$ sont les degrés de générateurs homogènes de $(\mathrm{Sym}{}^L\mathfrak{g})^{^LG}$, et $\Omega_X = \mathcal{O}(-2)$. Le fait que le morphisme $H^1(X, V_{\Omega_X}) \to H^1(X, {}^L\mathfrak{g}_{\mathcal{F}_B} \otimes \Omega_X) = H^1(X,\Omega_X)\otimes{}^L\mathfrak{g} = {}^L\mathfrak{g}$ soit une bijection résulte de la dualité de Serre et du théorème de Borel-Weil pour $\mathbb{P}^1$. En effet par dualité de Serre il s'agit d'établir que la restriction ${}^L\mathfrak{g}^* \to H^0(X, V^*_{\Omega_X} \otimes \Omega_X)$ est une bijection. Mais on peut identifier X à l'espace des sous-groupes de Borel de PSL_2 de telle sorte que $V^*_{\Omega_X} \otimes \Omega_X$ soit le fibré qui à un Borel ${}^LB_1$ de PSL_2, de radical unipotent ${}^LN_1$, associe $({}^L\mathfrak{g}^{^LN_1})^*$.

Remarque. De façon plus canonique, si évite le choix du $\mathfrak{sl}_2$-oper $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{O}\mathfrak{p}_{^L\mathfrak{g}}(X)$ est un "espace affine" sur Spec$A$.
Remarque. On a bien

$$\dim H^1(X, V_{\Omega_X}) = \sum \dim H^1(X, \Omega^{d_i}) = \sum (2d_i - 1) = \dim {}^L\mathfrak{g}.$$

Avant de passer à la suite on va rendre plus explicite, dans le cas où $G = SL_2$, la démonstration de la proposition 6.1. On fixe une coordonnée t sur $\mathbb{P}^1$ et on choisit $x = 1 \in \mathbb{P}^1$. On rappelle que $\mathcal{F}_{^L B_0}$ est le ${}^L G = PGL_2$-système local trivial sur $\mathbb{P}^1$ muni de la famille de sous-groupes de Borel naturellement paramétrée par $\mathbb{P}^1 = {}^L G/{}^L B$. Si ν est une section de $V_{\Omega_X} \otimes \Omega_X = \Omega_X^2$ sur $\mathbb{P}^1 \backslash \{0, \infty\}$, le ${}^L\mathfrak{g}$-oper $\mathcal{F}_{^L B_0} + \nu$ sur $\mathbb{P}^1 \backslash \{0, \infty\}$ s'obtient à partir de $\mathcal{F}_{^L B_0}$ en remplaçant la connexion triviale par la connexion $\begin{pmatrix} t & -t^2 \\ 1 & -t \end{pmatrix} \nu(t)dt$. En effet le sous-fibré canonique de $\mathcal{O}^2$ sur $\mathbb{P}^1$ est engendré par $\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ pour $t \in \mathbb{A}^1$ et la matrice $\begin{pmatrix} t & -t^2 \\ 1 & -t \end{pmatrix}$ est, à un scalaire près, l'unique matrice ayant pour noyau et pour image le sous-fibré canonique. De plus ν s'étend à $\mathbb{P}^1 \backslash \{\infty\}$, resp. $\mathbb{P}^1 \backslash \{0\}$ si et seulement si $\nu(t) \in \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ appartient à $\mathbb{C}[t]$, resp. $t^{-4}\mathbb{C}[t^{-1}]$. On voit donc directement que

$$\mathcal{O}\mathfrak{p}_{^L\mathfrak{g}}(\mathbb{P}^1) = \mathcal{O}\mathfrak{p}_{^L\mathfrak{g}}(\mathbb{P}^1 \backslash \{\infty\}) \times_{\mathcal{O}\mathfrak{p}_{^L\mathfrak{g}}(\mathbb{P}^1 \backslash \{0,\infty\})} \mathcal{O}\mathfrak{p}_{^L\mathfrak{g}}(\mathbb{P}^1 \backslash \{0\})$$

s'identifie à Spec$\mathrm{Sym}\mathbb{C}^3[1]$. Cela permet aussi de comprendre le morphisme d'oubli $\mathcal{O}\mathfrak{p}_{^L\mathfrak{g}}(\mathbb{P}^1) \to \mathrm{Loc}^{\mathrm{triv},x}_{^L G, \mathbb{P}^1}$ et de montrer que c'est un isomorphisme. En effet on a

$$\mathrm{Loc}^{\mathrm{triv},x}_{^L G, \mathbb{P}^1} = \mathrm{Loc}^{\mathrm{triv},x}_{^L G, \mathbb{P}^1 \backslash \{\infty\}} \times_{\mathrm{Loc}^{\mathrm{triv},x}_{^L G, \mathbb{P}^1 \backslash \{0,\infty\}}} \mathrm{Loc}^{\mathrm{triv},x}_{^L G, \mathbb{P}^1 \backslash \{0\}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{pt} \times_{^L G} \mathrm{pt}.$$

L'isomorphisme de droite provient du morphisme de monodromie (le long du cercle unité $|t| = 1$ en partant de $x = 1$) $\mathrm{Loc}^{\mathrm{triv},x}_{^L G, \mathbb{P}^1 \backslash \{0,\infty\}} \to {}^L G$, qui n'est pas un isomorphisme dans le cadre des D-modules, à cause des singularités irrégulières. Il suffit donc de montrer que le morphisme de monodromie

$$H^0(\mathbb{P}^1 \backslash \{0, \infty\}, \Omega_X^2) = \mathcal{O}\mathfrak{p}_{^L\mathfrak{g}}(\mathbb{P}^1 \backslash \{0, \infty\}) \to \mathrm{Loc}^{\mathrm{triv},x}_{^L G, \mathbb{P}^1 \backslash \{0,\infty\}} = {}^L G$$

est une submersion au voisinage de $\nu = 0$. Or il est bien clair que, à l'ordre 1 en a, b, c, la monodromie de la connexion $\begin{pmatrix} t & -t^2 \\ 1 & -t \end{pmatrix} (at^{-3} + bt^{-2} + ct^{-1})dt$ le long du cercle unité $|t| = 1$ est égale à $\begin{pmatrix} 1+b & -a \\ c & 1-b \end{pmatrix}$.

On retient de la proposition 6.1 l'existence d'un isomorphisme non canonique $\alpha : \mathcal{O}\mathfrak{p}_{^L\mathfrak{g}} \to \mathrm{Spec} A$ de sorte que l'oubli de la structure d'oper de $\mathcal{O}\mathfrak{p}_{^L\mathfrak{g}}$ dans $\mathrm{Loc}_{^LG}$ soit l'application évidente $\mathrm{Spec} A \to \mathrm{Spec} A/{}^LG$.

L'image directe du $\mathcal{O}$-module tautologique A sur $\mathrm{Spec} A$ par le morphisme $\mathrm{Spec} A \to \mathrm{Spec} A/{}^LG$ est $A \otimes \mathrm{Reg}$. La construction par Beilinson et Drinfeld de la quantification de Hitchin peut suggérer que l'équivalence de catégories conjecturale $\alpha^?$ envoie $A \otimes \mathrm{Reg} \in D(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG}))$ sur le D-module $\mathrm{Diff}(\mathcal{O}, \Omega^{1/2}_{\mathrm{Bun}_G})$. En fait $A \otimes \mathrm{Reg}$ est une somme directe infinie d'objets de $D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG}))$, plus précisément $A \otimes \mathrm{Reg} = \bigoplus (A \otimes \pi) \otimes \pi^*$ où la somme porte sur les représentations irréductibles de ${}^LG$. Si l'équivalence de catégories α de la proposition 2.1 (telle qu'on l'a rappelée au début de ce paragraphe) est bien celle que l'on cherche, on connaît donc l'image de $A \otimes \mathrm{Reg} \in D(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG}))$ dans $D(\mathcal{D}\text{-mod}(\mathrm{Bun}_G))$ par $\alpha^?$: on devrait avoir $\alpha^?(A \otimes \mathrm{Reg}) = \bigoplus \alpha(A \otimes \pi) \otimes \pi^* \in D(\mathcal{D}\text{-mod}(\mathrm{Bun}_G))$. En fait cette image doit être imposée (au moins si c'est une somme directe infinie d'objets de $D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG})))$ par la condition de compatibilité de α avec la normalisation de Whittaker, au sens de la définition 1.3 et ne dépend donc pas de la construction de α proposée au paragraphe 2. On est donc amené à la question suivante.

Question 6.2 *Existe-t-il un isomorphisme (ou une équivalence d'homotopie) entre le D-module* $\mathrm{Diff}(\mathcal{O}, \Omega^{1/2}_{\mathrm{Bun}_G})$ *sur* Bun_G *et* $\bigoplus \alpha(A \otimes \pi) \otimes \pi^*$ *qui est une somme directe infinie d'objets de* $D^{b,coh,0}(\mathcal{D}\text{-mod}(\mathrm{Bun}_G))$ *?*

Je ne sais pas répondre à cette question.

Nous allons nous contenter de vérifier que

$$\mathrm{RHom}_{D(\mathcal{D}\text{-mod}(\mathrm{Bun}_G))}(j_!(\mathcal{O}), \mathrm{Diff}(\mathcal{O}, \Omega^{1/2}_{\mathrm{Bun}_G})) \text{ et}$$

$$\mathrm{RHom}_{D(\mathcal{O}(\mathrm{Loc}_{^LG}))}(\mathbb{C}, A \otimes \mathrm{Reg})$$

sont tous les deux égaux à $\mathbb{C}$, à un décalage près.

Le premier est égal, par adjonction, à la cohomologie totale de BG à valeurs dans la restriction de $\mathrm{Diff}(\mathcal{O}, \Omega^{1/2}_{\mathrm{Bun}_G}))$ à BG. Mais cette restriction est isomorphe à D, et pour toute variété X, $H^\bullet_{dR}(X, D) = H^\bullet_{coh}(X, \mathcal{O})[-\dim X]$. En étendant cette formule à BG (ce qui est possible grâce aux définitions du paragraphe 20 de [FG05] que nous avons rappelées en partie ci-dessus), $H^\bullet_{dR}(BG, D) = \mathbb{C}[\dim G]$.

Le deuxième est égal à $RHom_A(\mathbb{C}, A) = \mathbb{C}[\dim G]$ par un calcul facile utilisant la résolution de Koszul de $\mathbb{C}$ comme A-module.

Remarque. Si on savait montrer que $\mathrm{Diff}(\mathcal{O}, \Omega^{1/2}_{\mathrm{Bun}_G})$ est isomorphe à

$$\bigoplus \alpha(A \otimes \pi) \otimes \pi^* \quad \text{dans} \quad D(\mathcal{D}\text{-mod}(\mathrm{Bun}_G)),$$

le calcul que nous venons de mener impliquerait la conjecture 2.3.
Remarque. D'après le théorème 5.2.9 de [BD] on a

$$T_{x,\pi}(\mathrm{Diff}(\mathcal{O},\Omega^{1/2}_{\mathrm{Bun}_G})) = \mathrm{Diff}(\mathcal{O},\Omega^{1/2}_{\mathrm{Bun}_G}) \otimes \pi$$

pour toute représentation irréductible de ${}^LG$. Les foncteurs de Hecke en x munissent $D(\mathcal{D}\text{-mod}(\mathrm{Bun}_G))$ d'une structure de catégorie au-dessus de B^LG au sens de [Gai05] et $\mathrm{Diff}(\mathcal{O},\Omega^{1/2}_{\mathrm{Bun}_G})$, muni des isomorphismes ci-dessus, appartient donc à la catégorie "dé-équivariantisée" associée à $D(\mathcal{D}\text{-mod}(\mathrm{Bun}_G))$, au sens du paragraphe 21 de [Gai05], qui est une catégorie triangulée munie d'une action de ${}^LG$. Les équivalences de catégories $\alpha^?$ et $\beta^?$ devraient donner naissance à des equivalences inverses l'une de l'autre, et compatibles avec l'action de ${}^LG$ entre cette catégorie "dé-équivariantisée" et une certaine catégorie triangulée associée à une catégorie de DG-modules sur A. Par ces équivalences l'objet $\mathrm{Diff}(\mathcal{O},\Omega^{1/2}_{\mathrm{Bun}_G})$ muni des isomorphismes ci-dessus correspond à A comme DG-module sur A si la question 6.2 admet une réponse positive.
Remarque. Dans la construction de [BD] et pour une courbe de genre >1, l'objet $\mathrm{Diff}(\mathcal{O},\Omega^{1/2}_{\mathrm{Bun}_G})$ de $D(\mathcal{D}\text{-mod}(\mathrm{Bun}_G))$ est muni d'une action de l'espace des fonctions sur l'espace des ${}^L\mathfrak{g}$-opers. Dans notre cas, $\mathrm{Diff}(\mathcal{O},\Omega^{1/2}_{\mathrm{Bun}_G})$ de $D(\mathcal{D}\text{-mod}(\mathrm{Bun}_G))$ doit être muni d'une action de A. D'un autre côté, l'objet $A\otimes\mathrm{Reg}$ de $D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}A/{}^LG))$ est aussi muni d'une action de A. L'isomorphisme de la question 6.2 doit être compatible avec ces actions. Il est important de noter que cette action de A ne respecte pas la décomposition de $A\otimes\mathrm{Reg}$ en une somme directe infinie d'objets de $D^{b,tf}(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}A/{}^LG))$. Cette action de A existe aussi pour les objets "dé-équivariantisés" décrits dans la remarque précédente.
Remarque. L'existence de l'action de A sur $\mathrm{Diff}(\mathcal{O},\Omega^{1/2}_{\mathrm{Bun}_G})$ qui a été mentionnée au paragraphe précédent implique que l'on peut définir l'objet $M\in D(\mathcal{D}\text{-mod}(\mathrm{Bun}_G))$ associé à *un* ${}^LG$-oper. On peut écrire

$$\text{“}M = \mathrm{Diff}(\mathcal{O},\Omega^{1/2}_{\mathrm{Bun}_G})\otimes_A \mathbb{C}\text{''}.$$

On voit que $H^\bullet_{dR}(BG,M) = \mathbb{C}[\dim G]\otimes_A\mathbb{C} = \mathrm{Sym}({}^L\mathfrak{g}[-2])[\dim G]$. D'après Kostant $\mathrm{Sym}({}^L\mathfrak{g}[-2]) = (\mathrm{Sym}({}^L\mathfrak{g}[-2]))^{{}^LG}\otimes H$ (et H s'identifie comme espace vectoriel gradué à un sous-espace de polynômes harmoniques), et on a vu que $(\mathrm{Sym}({}^L\mathfrak{g}[-2]))^{{}^LG}$ s'identifie à la cohomologie de BG, donc la fibre de M en un point de BG doit être égale à $H[\dim G]$. C'est ce que prévoit la proposition 2.1 (à un décalage près), si M est l'image de $\mathrm{Reg}\in D^?(\mathcal{O}(\mathrm{Spec}A/{}^LG))$ par $\alpha^?$. En tous cas il est clair que la restriction de M à BG est non nulle puisque $H^\bullet_{dR}(BG,M)$ est non nul.

Références

[BL95] A. Beauville et Y. Laszlo. Un lemme de descente. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, vol 320, 335–340, 1995.

[BD] A. Beilinson et V. Drinfeld. Quantification of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves. preprint, http ://www.math.uchicago.edu/∼arinkin/langlands/hitchin/

[BD04] A. Beilinson et V. Drinfeld. Chiral algebras. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 2004.

[BD05] A. Beilinson et V. Drinfeld. Opers. arXiv :math.AG/0501398, 2005.

[BZN07] D. Ben-Zvi et D. Nadler. Loop Spaces and Langlands Parameters. arXiv :0706.0322.

[BL94] J. Bernstein et V. Lunts. Equivariant sheaves and functors. Lecture Notes in Mathematics 1578 (1994).

[BF08] R. Bezrukavnikov et M. Finkelberg. Equivariant Satake category and Kostant-Whittaker reduction. *Moscow Math. Journal* 8(1), 39–72, 2008.

[Bra03] T. Braden. Hyperbolic localization of intersection cohomology. *Transformation groups* 8(3), 209–216, 2003.

[BFGM02] A. Braverman, M. Finkelberg, D. Gaitsgory, I. Mirkovic. Intersection cohomology of Drinfeld's compactifications. *Selecta Math.* 8 (2002), 381–418

[BG02] A. Braverman et D. Gaitsgory. Geometric Eisentein series. *Inv. Math.* 150 (2002), 287–384

[Fal03] G. Faltings. Algebraic loop groups and moduli spaces of bundles. *J. Eur. Math. Soc.* 5(1), pages 41–68, 2003.

[FGV01] E. Frenkel, D. Gaitsgory et K. Vilonen. Whittaker patterns in the geometry of moduli spaces of bundles on curves. *Ann. Math.* 153 (2001), 699–748

[FG05] E. Frenkel et D. Gaitsgory. Local geometric Langlands correspondence and affine Kac-Moody algebras. Arxiv :math.RT/0508382, 2005.

[Gai05] D. Gaitsgory. The notion of category over an algebraic stack. arXiv :math.AG/0507192.

[Gin95] V. Ginzburg. Perverse sheaves on a loop group and Langlands duality. alg-geom/9511007

[Gin98] V. Ginzburg. Loop grassmannian cohomology, the principal nilpotent and Kostant theorem. math.AG/9803141

[Gro57] A. Grothendieck. Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann. *Amer. J. of Math.* 79, 121–138, 1957.

[HS07] J. Heinloth and A. Schmitt. The cohomology ring of moduli stacks of principal bundles over curves. http ://www.uni-essen.de/∼hm0002/HS_v1.pdf

[Kel06] B. Keller. On differential graded categories. Preprint 2006.

[Lys02] S. Lysenko. On automorphic sheaves on Bun_G. arXiv :math/0211067

[Lys06] S. Lysenko. Moduli of metaplectic bundles on curves and Theta-sheaves *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* 39 :415–466, 2006.

[Lys08] S. Lysenko. Geometric theta-lifting for the dual pair SO_{2m}, Sp_{2n}. math.RT/0701170.

[NS05] F. Neumann et U. Stuhler. Moduli stacks of vector bundles and Frobenius morphisms. Algebra and number theory, Hindustan Book Agency, 2005, 126–146