L'ISOMORPHISME DES DEUX TOURS UNE AUTRE APPROCHE EN ÉGALES CARACTÉRISTIQUES

par

Alain Genestier et Vincent Lafforgue

Introduction

La véritable introduction « mathématique » apparaîtra plus tard (1.5) lorsque nous aurons fixé les notations et effectué quelques rappels. Pour le moment, nous nous contenterons de donner un bref aperçu de notre plan.

Dans la première section, après quelques préparatifs, nous énonçons le théorème principal de l'article. Le paragraphe 1.5 que nous consacrons à cet énoncé (et en particulier, l'analyse critique de la conjecture 1.5.1) a été fortement influencé par l'exposé d'introduction de Laurent Fargues, pour le groupe de travail à l'IHES sur l'isomorphisme de Faltings.

La deuxième section est essentiellement composée de rappels. Nous y résumons une partie de [**G**], notamment une équivalence de catégories due à Drinfeld (le « module de coordonnées », voir [**G**, ch. I]) qui nous permettra de ramener la construction de l'isomorphisme des deux tours à de l'algèbre linéaire, ainsi que les résultats explicites sur la tour de Drinfeld des chapitres II et IV de [**G**]. Utilisant un théorème de Drinfeld [**D1**], nous y développons aussi des résultats explicites analogues pour la tour de Lubin-Tate.

Dans la troisième section, nous introduisons un recouvrement de la tour de Lubin-Tate indexé par l'ensemble des simplexes d'un immeuble de Bruhat-Tits. En fait, un recouvrement de la tour de Drinfeld de même ensemble d'indices (dont nous rappelons la définition dans le deuxième section) apparaît déjà dans [**BC**] et [**G**]. Cette section recoupe l'article [**Far2**], qui généralise considérablement son résultat principal 3.1.4 et traite aussi du cas d'inégales caractéristiques.

Dans la quatrième section, fixant un simplexe maximal de l'immeuble de Bruhat-Tits, nous ramenons la construction de l'isomorphisme des deux tours à celle d'un isomorphisme des ouverts de ces deux tours associés au simplexe fixé

–ces ouverts seront donc considérés comme des « domaines fondamentaux » et cette section est consacrée à l'étude des recollements.

Dans la cinquième section, qui est en fait le cœur de ce travail, nous construisons finalement l'isomorphisme des domaines fondamentaux.

1. Rappels sur les deux tours et énoncé du théorème

1.1. Notations. — Soit $\mathcal{O}$ un anneau de valuation discrète localement compact d'égales caractéristiques $p > 0$. On identifie son corps résiduel à $\mathbb{F}_q$ (où $q = p^r$) et on note K son corps des fractions. On note v la valuation sur K. On fixe une uniformisante π de $\mathcal{O}$, ce qui induit des identifications $\mathcal{O} \simeq \mathbb{F}_q[[\pi]]$, $K \simeq \mathbb{F}_q((\pi))$.

On fixe un entier $d \geq 1$ et on note D l'unique K-algèbre à division centrale simple (à isomorphisme non-unique près) d'invariant $1/d$ et $\mathcal{O}_D$ l'ordre maximal de D. Si l'on note K_d l'extension non-ramifiée de degré d de K, $\mathcal{O}_d$ son anneau d'entiers et $\tau \in \mathrm{Gal}(K_d/K)$ l'automophisme induisant $(\lambda \mapsto \lambda^q)$ sur le corps résiduel, les algèbres D et $\mathcal{O}_D$ s'écrivent simplement comme des algèbres de polynômes non-commutatifs $K_d[\Pi]$ (resp. $\mathcal{O}_d[\Pi]$) en une indéterminée Π vérifiant les relations $\Pi^d = \pi$ et $\Pi a = \tau(a)\Pi$, $\forall a \in K_d$.

On note $\mathcal{B} \subset M_d(\mathcal{O})$ l'ordre d'Iwahori des matrices triangulaires supérieures modulo π et

$$P_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \pi & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}\,,$$

de sorte que l'on a

$$\mathcal{B} = \{\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{diag}(\lambda_{i,0}, \cdots, \lambda_{i,d-1})P_\pi^i, \lambda_{i,j} \in \mathbb{F}_q\} = \mathrm{diag}(\mathbb{F}_q^d)[[P_\pi]]\,.$$

On appellera immeuble étendu de $\mathrm{GL}_d(K)$ le produit de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_d(K)$ par $\mathbb{Z}$. Cette terminologie n'est pas standard car l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{GL}_d(K)$ est plutôt le le produit de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_d(K)$ par $\mathbb{R}$! On munira cet immeuble étendu de l'action de $\mathrm{GL}_d(K)$ produit de l'action standard sur l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_d(K)$ et de l'action $(\gamma, n) \in \mathrm{GL}_d(K) \times \mathbb{Z} \mapsto n - v(\det\gamma)$ sur $\mathbb{Z}$.

On note $\breve{K} \supset K_d$ le complété de l'extension maximale non-ramifiée de K, $\breve{\mathcal{O}}$ son anneau d'entiers et on note encore τ l'automorphisme de Frobenius de $\breve{K}$.

On note $\mathrm{Nilp}\,\mathcal{O}$ (resp. $\mathrm{Nilp}\,\breve{\mathcal{O}}$) la catégorie des $\mathcal{O}$-schémas (resp. $\breve{\mathcal{O}}$-schémas) sur lesquels l'image de π est localement (pour la topologie de Zariski) nilpotente. Les $\mathcal{O}$-schémas formels (resp. $\breve{\mathcal{O}}$-schémas formels) seront considérés comme des ind-objets de $\mathrm{Nilp}\,\mathcal{O}$ (resp. $\mathrm{Nilp}\,\breve{\mathcal{O}}$). Lorsque S est un schéma (ou un schéma formel) on commettra souvent l'abus de notation consistant à écrire $s \in \mathcal{O}_S$ pour signifier que s est une section globale de $\mathcal{O}_S$. Pour $S \in \mathrm{Nilp}\,\mathcal{O}$ on note $S_0 = V(\pi)$ le sous-schéma fermé de S le long duquel π s'annule et $\mathrm{Fr}_{\mathcal{O}_S}$ le morphisme d'élévation à la puissance q-ième. Pour $S \in \mathrm{Nilp}\,\breve{\mathcal{O}}$ on note $S[\tau]$ le $\breve{\mathcal{O}}$-schéma de morphisme structural le composé $S \to \mathrm{Spec}\,\breve{\mathcal{O}} \xrightarrow{\tau} \mathrm{Spec}\,\breve{\mathcal{O}}$. Enfin, on note encore $\tau : \widehat{\mathbb{G}}_{a,S} \to \widehat{\mathbb{G}}_{a,S}$ l'isogénie de Frobenius ($x \mapsto x^q$) du groupe formel $\widehat{\mathbb{G}}_{a,S}$.

1.2. $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}_D$-modules formels. — On rappelle maintenant quelques définitions.

Définition 1.2.1. — Soit $S \in \mathrm{Nilp}\,\mathcal{O}$.

- 1) Un $\mathcal{O}$-module formel X sur S est un groupe formel lisse sur S muni d'une action de $\mathcal{O}$ telle que l'action tangente de $\mathcal{O}$ sur $\mathrm{Lie}X$ coïncide avec celle provenant des structures de $\mathcal{O}$-algèbre de $\mathcal{O}_S$ et de $\mathcal{O}_S$-module de $\mathrm{Lie}X$; sa dimension est celle du groupe formel sous-jacent.
- 2) Un $\mathcal{O}$-module formel est dit π-divisible (ou de hauteur finie) lorsque l'endomorphisme $X(\pi)$ est une isogénie. Sa hauteur (normalisée) est $\mathrm{ht}\,X(\pi)/r$, où ht désigne la hauteur usuelle (c'est-à-dire, non-normalisée) ; cette hauteur normalisée est un entier.
- 3) Lorsque X et Y sont deux $\mathcal{O}$-modules formels, une quasi-isogénie $\rho : X \dashrightarrow Y$ est un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(X,Y)\otimes_{\mathcal{O}}K$ ayant un inverse dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(Y,X)\otimes_{\mathcal{O}} K$. Le composé $\rho \circ X(\pi^N)$ est alors une isogénie pour N assez grand ; la hauteur (normalisée) de ρ est $(\mathrm{ht}\,(\rho \circ X(\pi^N)) - \mathrm{ht}\,X(\pi^N))/r \quad (N \gg 0)$ – cette hauteur normalisée est un entier.

Dans la suite on appellera simplement hauteurs les hauteurs normalisées. De même, la notation ht désignera la hauteur normalisée.

Définition 1.2.2. — Soit $S \in \mathrm{Nilp}\,\mathcal{O}$.

- 1) Un $\mathcal{O}_D$-module formel est un $\mathcal{O}$-module formel muni d'une action $\mathcal{O}$-linéaire de $\mathcal{O}_D$.
- 2) Un $\mathcal{O}_D$-module formel X est dit spécial lorsque l'action tangente de $\mathcal{O}_d$ sur $\mathrm{Lie}X$ fait de $\mathrm{Lie}X$ un $\mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_S$-module inversible.

On va maintenant donner deux exemples de $\mathcal{O}$ (et même $\mathcal{O}_D$)-modules formels qui serviront respectivement de points-base dans la définition des tours de Lubin-Tate et de Drinfeld. Ces deux $\mathcal{O}$-modules formels seront définis sur le corps résiduel $\overline{\mathbb{F}}_q$ de la $\mathcal{O}$-algèbre $\breve{\mathcal{O}}$.

La proposition suivante est due à Lubin et Tate [**LT**].

Proposition 1.2.3. — *Les $\mathcal{O}$-modules formels $\mathbb{X}$ de dimension 1 et hauteur d sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ sont tous isomorphes. La $\mathcal{O}$-algèbre $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}\mathbb{X}$ des endomorphismes d'un tel $\mathcal{O}$-module formel $\mathbb{X}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_D$.*

Plutôt que de répéter la démonstration de [**LT**], on se contentera de dire qu'en égales caractéristiques un tel $\mathbb{X}$ est défini par

$$\mathbb{X} = \widehat{\mathbb{G}}_{a,\overline{\mathbb{F}}_q} \text{ en tant que groupe formel et } \mathbb{X}(\pi) = \tau^d$$

et que l'action de O_D sur $\mathbb{X}$ est définie par

$$\mathbb{X}(\lambda) = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{F}_{q^d}) \text{ et } \mathbb{X}(\Pi) = \tau\,.$$

Le $\mathcal{O}_D$-module formel

$$\mathbb{Y} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \mathbb{X}(\Pi^i \bullet \Pi^{-i})$$

(où $\mathbb{X}(\Pi^i \bullet \Pi^{-i})$ désigne le $\mathcal{O}_D$ module formel obtenu en tordant l'action de $\mathcal{O}_D$ sur $\mathbb{X}$ par l'automorphisme $\Pi^i \bullet \Pi^{-i}$ de $\mathcal{O}_D$) est spécial. La proposition suivante est due à Drinfeld [**D2**].

Proposition 1.2.4. — *Les $\mathcal{O}_D$-modules formels spéciaux de hauteur d^2 sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ sont tous isogènes à $\mathbb{Y}$. La $\mathcal{O}$-algèbre* $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_D}\mathbb{Y}$ *des endomorphismes de $\mathbb{Y}$ s'identifie à l'ordre d'Iwahori ${}^t\mathcal{B}$ des matrices triangulaires inférieures modulo π.*

Là encore, au lieu de répéter la démonstration de [**D2**], on se contentera de dire que l'isogénie $r_{\mathcal{O}^d} = \mathrm{diag}(1, \tau, \cdots, \tau^{d-1}) : \mathbb{X}^d \to \mathbb{Y}$ identifie $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_D}(\mathbb{Y}) \otimes_{\mathcal{O}} K$ à $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_D}(\mathbb{X}^d) \otimes_{\mathcal{O}} K = M_d(K)$ et que, pour cette identification, $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_D}\mathbb{Y} \subset M_d(K)$ est l'ordre des matrices entières triangulaires inférieures modulo π.

1.3. Tour de Lubin-Tate. — On considère le foncteur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}}$ qui à $S \in \mathrm{Nilp}\,\breve{\mathcal{O}}$ associe l'ensemble des classes d'isomorphie de couples (X, ρ), où

– X est un $\mathcal{O}$-module formel sur S de dimension 1 et hauteur d

– $\rho : \mathbb{X}_{S_0} \dashrightarrow X_{S_0}$ est une quasi-isogénie

et à un morphisme $S' \to S$ associe le morphisme de changement de base évident.

Le théorème suivant est dû à Lubin et Tate [**LT**] –voir aussi Rapoport-Zink [**RZ**] pour une démonstration dans un cadre beaucoup plus général, englobant en fait ce paragraphe et le suivant consacré à la tour de Drinfeld.

Théorème 1.3.1. — *Le foncteur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}}$ est (ind)-représentable par un $\breve{\mathcal{O}}$-schéma formel.*

On donnera dans la troisième section (théorèmes de représentabilité explicites) un énoncé beaucoup plus précis.

Définition 1.3.2. — Soit X un $\mathcal{O}$-module formel de dimension 1. Une structure de niveau à la Drinfeld [**D1**] d'échelon π^n sur X est un morphisme de $\mathcal{O}$-modules

$$\sigma : (\pi^{-n}\mathcal{O}/\mathcal{O})^d \to X$$

dont l'image coïncide (en tant que diviseur) avec le sous-groupe $X[\pi^n]$ des points de π^n-torsion.

L'ensemble des classes d'isomorphie de triplets (X,ρ,σ), où $(X,\rho)\in\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}}(S)$ et σ est une structure de niveau à la Drinfeld d'échelon π^n sur X, définit un foncteur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n}$, qui est (ind-) représenté par un $\breve{\mathcal{O}}$-schéma formel fini et plat au-dessus de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}}$.

La tour $(\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n})_n$ est munie d'une action (à gauche) du groupe $\mathrm{GL}_d(K)\times D^\times$ (*cf.* [**D1**], [**C**] et [**RZ**]) dont on va maintenant rappeler la définition.

Soient $\gamma\in\mathrm{GL}_d(K)$ et $N\in\mathbb{N}$ tel que $\pi^N\gamma M_d(\mathcal{O})\gamma^{-1}\subset M_d(\mathcal{O})$. L'élément γ induit un morphisme $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n+N}\to\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n}$ de la manière suivante. Soient $m\in\mathbb{Z}$ le plus petit entier tel que $\pi^m\gamma\in M_d(\mathcal{O})$ et $\gamma'=\pi^m\gamma$. Grâce au théorème des diviseurs élémentaires on voit aisément que $\pi^N\mathcal{O}^d\subset\gamma'\mathcal{O}^d\subset\mathcal{O}^d$. Soient $H=\gamma'^{-1}\mathcal{O}^d/\mathcal{O}^d\subset\pi^{-(n+N)}\mathcal{O}^d/\mathcal{O}^d$ et $X'=X/\sigma(H)$ (comme pour les structures de niveau à la Drinfeld, cette image $\sigma(H)$ doit être considérée comme un diviseur). Le morphisme composé $\pi^{-(n+N)}\mathcal{O}^d/\mathcal{O}^d\to X\to X'$ se factorise à travers γ' : $\pi^{-(n+N)}\mathcal{O}^d/\mathcal{O}^d\to\gamma'\pi^{-(n+N)}\mathcal{O}^d/\mathcal{O}^d$ et la structure de niveau σ induit donc un morphisme $\sigma'=\pi^{-n}\mathcal{O}^d/\mathcal{O}^d\subset\gamma'\pi^{-(n+N)}\mathcal{O}^d/\mathcal{O}^d\to X'$; il résulte de [**D1**, prop. 4.4] que ce morphisme σ' est une structure de niveau à la Drinfeld d'échelon π^n sur X'. On obtient finalement un triplet $(X',\rho',\sigma')\in\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n}(S)$ en prenant pour ρ' la quasi-isogénie composée $\mathbb{X}_{S_0}\overset{\pi^{-m}}{\dashrightarrow}\mathbb{X}_{S_0}\overset{\rho}{\dashrightarrow}X_{S_0}\to X'_{S_0}$.

Soit $\delta\in D^\times$. L'élément δ induit un morphisme $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n}\to\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n}$ associant à un triplet $(X,\rho,\sigma)\in\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n}(S)$ le triplet $(X'=X,\rho',\sigma'=\sigma)$, où ρ' est la quasi-isogénie composée $\mathbb{X}_{S_0}\overset{\delta^{-1}}{\dashrightarrow}\mathbb{X}_{S_0}\overset{\rho}{\dashrightarrow}X_{S_0}$.

On notera que les groupes $GL_d(K)$ et $D^\times$ ont deux actions de nature très différente : le groupe $\mathrm{GL}_d(K)$ agit par « correspondances de Hecke » sur les structures de niveau alors que le groupe $D^\times$ agit sur la quasi-isogénie.

Le sous-groupe $K^\times\subset\mathrm{GL}_d(K)\times D^\times$ (plongé diagonalement) agit trivialement et l'action qu'on vient de définir se factorise donc en une action de $(\mathrm{GL}_d(K)\times D^\times)/K^\times$.

Enfin, la tour $(\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n})_n$ est munie d'une donnée de descente à la Weil (au sens de Rapoport-Zink [**RZ**, 3.44]), qui est l'endomorphisme τ-semi-linéaire associant à (X,ρ,σ) le triplet $(X,\rho\circ\tau^{-1},\sigma)$ sur $S[\tau]$, où $\rho\circ\tau^{-1}$ est la quasi-isogénie composée $\mathbb{X}_{S_0[\tau]}=\mathbb{X}\times_{(\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_q,\tau)}S_0\overset{\tau^{-1}}{\dashrightarrow}\mathbb{X}_{S_0}\overset{\rho}{\dashrightarrow}X_{S_0}$. Cette donnée de descente est effective et le $\breve{\mathcal{O}}$-schéma formel $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n}$ provient donc, par changement de base, d'un $\mathcal{O}$-schéma formel $\mathcal{M}_{\mathcal{LT},n}$ –ce $\mathcal{O}$-schéma formel $\mathcal{M}_{\mathcal{LT},n}$ s'identifie d'ailleurs à la partie ouverte et fermée de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n}$ sur laquelle la hauteur de la quasi-isogénie ρ est nulle.

L'action de $\mathrm{GL}_d(K)\times D^\times$ sur la tour $(\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n})_n$ commute à cette donnée de descente et descend donc en une action sur la tour $(\mathcal{M}_{\mathcal{LT},n})_n$.

En principe, on appellera « tour de Lubin-Tate » la tour $(\mathcal{M}_{\mathcal{LT},n})_n$. Il pourra cependant arriver qu'on appelle ainsi la tour $(\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n})_n$ –afin de ne pas créer de confusions, on précisera à chaque fois laquelle des deux versions on utilise.

1.4. Tour de Drinfeld. — On considère le foncteur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ qui à $S \in \mathrm{Nilp}\,\breve{\mathcal{O}}$ associe l'ensemble des classes d'isomorphie de couples (Y, ρ), où

– Y est un $\mathcal{O}_D$-module formel spécial sur S de hauteur d^2

– $\rho : \mathbb{Y}_{S_0} \dashrightarrow Y_{S_0}$ est une quasi-isogénie compatible à l'action de $\mathcal{O}_D$

et à un morphisme $S' \to S$ associe le morphisme de changement de base évident.

Le théorème suivant est dû à Drinfeld [**D2**] –voir aussi Rapoport-Zink [**RZ**], ainsi que [**G**], pour d'autres démonstrations (celle de [**G**] ne vaut –hélas !– qu'en égales caractéristiques).

Théorème 1.4.1. — *Le foncteur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ est (ind)-représentable par un $\breve{\mathcal{O}}$-schéma formel.*

On donnera dans la troisième section (théorèmes de représentabilité explicites) un énoncé beaucoup plus précis qui est une reformulation du résultat principal de [**G**, ch. II].

On considère maintenant la fibre générique au sens de Raynaud $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}^{\mathrm{rig}}$ (voir [**B**] et [**RZ**, prop. 5.3]) de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$. La fibre générique au sens de Raynaud $Y[\pi^n]^{\mathrm{rig}}$ est un schéma en groupes (et même en $\mathcal{O}_D$-modules) fini et étale au-dessus de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ qui est localement (pour la topologie étale) isomorphe à $\pi^{-n}\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_D$. Les structures de niveau d'échelon π^n : $\pi^{-n}\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_D \xrightarrow{\sim} Y[\pi^n]^{\mathrm{rig}}$ définissent alors un revêtement fini étale galoisien $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}^{\mathrm{rig}}$ de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}^{\mathrm{rig}}$, de groupe de Galois $(\mathcal{O}_D/\pi^n\mathcal{O}_D)^\times$.

On munit la tour $(\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}^{\mathrm{rig}})_n$ de l'action à gauche suivante de $\mathrm{GL}_d(K) \times D^\times$. A un triplet $(Y, \rho, \sigma) \in \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}^{\mathrm{rig}}(S)$ (où S est une $\breve{K}$-variété rigide analytique, (Y, ρ) un point de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ défini sur un modèle entier convenable S^{ent} de S et σ : $\pi^{-n}\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_D \xrightarrow{\sim} Y[\pi^n]^{\mathrm{rig}}$ est une structure de niveau d'échelon π^n sur Y) et à l'élément $(\gamma, \delta) \in \mathrm{GL}_d(K) \times D^\times$, elle associe le triplet

$$Y' = Y(\Pi^{-m} \bullet \Pi^m)$$

$$\rho' = (\mathbb{Y}_{S_0^{\mathrm{ent}}} \overset{{}^t\gamma_{S_0^{\mathrm{ent}}}}{\dashrightarrow} \mathbb{Y}_{S_0^{\mathrm{ent}}} \overset{\rho}{\dashrightarrow} Y_{S_0^{\mathrm{ent}}} \overset{Y_{S_0^{\mathrm{ent}}}(\Pi^{-m})}{\dashrightarrow} Y'_{S_0^{\mathrm{ent}}})$$

$$\sigma' = (\pi^{-n}\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_D \xrightarrow{(\bullet\,\Pi^{-m}\delta)} \pi^{-n}\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_D \xrightarrow{\sigma} Y[\pi^n]^{\mathrm{rig}} =\!= Y'[\pi^n]^{\mathrm{rig}}))$$

où $m \in \mathbb{Z}$ est l'entier tel que $\delta \in \Pi^m\mathcal{O}_D^\times$, $(\bullet\,\Pi^{-m}\delta)$ est la multiplication à droite par $\Pi^{-m}\delta$ et $Y[\pi^n]^{\mathrm{rig}} =\!= Y'[\pi^n]^{\mathrm{rig}}$ est l'isomorphisme $\mathcal{O}$-linéaire évident (il *n'est pas* $\mathcal{O}_D$-linéaire si m n'est pas multiple de d).

On remarque que par rapport à l'action précédemment définie sur la tour de Lubin-Tate les groupes $\mathrm{GL}_d(K)$ et $D^\times$ ont inversé leur rôle. Le groupe $\mathrm{GL}_d(K)$ agit sur les quasi-isogénies, tout comme $D^\times$ sur la tour de Lubin-Tate. En notant que lorsque $m \leq 0$ le morphisme $Y \xrightarrow{Y(\Pi^{-m})} Y'$ n'est autre que le morphisme de passage au quotient par $Y[\Pi^{-m}]$, l'action de $D^\times$ est analogue à l'action de $\mathrm{GL}_d(K)$ sur la tour de Lubin-Tate.

Le sous-groupe $K^\times \subset \mathrm{GL}_d(K) \times D^\times$ (plongé diagonalement) agit trivialement et l'action qu'on vient de définir se factorise donc en une action de $(\mathrm{GL}_d(K) \times D^\times)/K^\times$.

Remarque 1.4.2. — Cette action de $\mathrm{GL}_d(K)$ n'est pas l'action « usuelle » figurant dans [**D2**], [**RZ**], [**C**], [**G**], ... Elle en diffère en fait [(1)] par une torsion par l'automorphisme $\gamma \mapsto {}^t\gamma^{-1}$ de $\mathrm{GL}_d(K)$. Comme on le verra, c'est là le prix à payer pour obtenir un isomorphisme $\mathrm{GL}_d(K)$-équivariant des deux tours.

Enfin, la tour $(\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n})_n$ est munie d'une donnée de descente à la Weil (au sens de Rapoport-Zink [**RZ**, 3.44]), qui est l'endomorphisme τ-semi-linéaire associant à (Y, ρ, σ) le triplet $(Y, \rho \circ \tau^{-1}, \sigma)$ sur $S^{\mathrm{ent}}[\tau]$, où $\rho \circ \tau^{-1}$ est la quasi-isogénie composée $\mathbb{Y}_{S_0^{\mathrm{ent}}[\tau]} \overset{\tau^{-1}}{\dashrightarrow} \mathbb{Y}_{S_0^{\mathrm{ent}}} \overset{\rho}{\dashrightarrow} Y_{S_0^{\mathrm{ent}}}$. Cette donnée de descente est effective et la $\breve{K}$-variété rigide-analytique $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n}$ provient donc, par changement de base, d'une K-variété rigide-analytique $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n}$ –qui s'identifie d'ailleurs à la partie ouverte et fermée de $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n}$ sur laquelle la hauteur de la quasi-isogénie ρ est nulle.

L'action de $\mathrm{GL}_d(K) \times D^\times$ sur la tour $(\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n})_n$ commute à cette donnée de descente et descend donc en une action sur la tour $(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n})_n$.

En principe, on appellera « tour de Drinfeld » la tour $(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n})_n$. Il pourra cependant arriver qu'on appelle ainsi la tour $(\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n})_n$ –de même que du côté Lubin-Tate, on précisera à chaque fois laquelle des deux versions on utilise.

1.5. Enoncé du théorème. — Hopkins et Gross (dans leur prépublication [**HG2**] ; voir aussi Rapoport-Zink [**RZ**, 5.54] pour une référence plus facile à se procurer) ont formulé la conjecture suivante, que nous énonçons ici volontairement sous une forme un peu vague.

Conjecture 1.5.1. — *On a une égalité*

$$\text{«}\varprojlim_n\text{»}\, \mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},n} = \text{«}\varprojlim_n\text{»}\, \mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n}$$

où « $\varprojlim$ » est une sorte de limite projective (en un sens à préciser).

---

(1) Nous avons adopté ici le point de vue de [**RZ**] consistant à considérer des quasi-isogénies de hauteur arbitraire et une donnée de descente à la Weil. Le point de vue utilisé dans les autres références, qui consiste à ne considérer que des quasi-isogénies de hauteur nulle, donne directement $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n}$. Les formules qui expriment l'action de $\mathrm{GL}_d(K)$ (et de $D^\times$) y sont de ce fait plus compliquées, et ne se comparent pas directement à l'action que nous définissons ici.

Nous allons maintenant faire une analyse critique de cet énoncé.

1) Il n'existe manifestement pas de couple de morphismes $\mathrm{GL}_d(K) \times D^\times$–équivariants, mutuellement inverses

$$\begin{array}{ll} \mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},m} \to \mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n} & (m \gg n) \\ \mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n} \to \mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},m} & (n \gg m) \end{array}$$

des deux systèmes projectifs (pour dissiper tout malentendu, précisons tout de suite que cet énoncé trop naïf n'est pas celui figurant dans les références que nous venons de citer !). En effet, si x_m est un point de $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},m}$ à valeurs dans une extension L de K et si y_n est un point de $\mathcal{M}_{\mathcal{D}r,n}$ à valeurs dans L, le stabilisateur de x_m vis-à-vis de l'action de $\mathrm{GL}_d(K)$ est ouvert (pour la topologie π-adique) alors que celui de y_n ne l'est pas ; de même, le stabilisateur de x_m vis-à-vis de l'action de $D^\times$ n'est pas ouvert alors que celui de y_n l'est.

Pour répondre à cette objection, une idée simple est d'utiliser une complétion. Le morphisme de comparaison des deux tours enverra donc un point $x = (x_m)_m$ de $(\mathcal{M}_{\mathcal{LT},m})_m$ sur un point $y = (y_n)_n$ de $(\mathcal{M}_{\mathcal{D}r,n})_n$, où y_n sera défini à l'aide de séries (dont la convergence requiert cette complétion) dépendant de *tous* les x_m et non seulement d'un nombre fini comme dans le cas du morphisme de systèmes projectifs envisagé ci-dessus –en particulier, si x est à valeurs dans une extension L de K (nécessairement infinie), y sera un point à valeurs dans *le complété* π*-adique* de L.

La « limite projective complétée » d'un système projectif de variétés rigide-analytiques n'a pas de sens dans la théorie « classique » des espaces rigides [(2)]. Pour donner un sens à cette complétion, Faltings construit des modèles entiers des deux tours. Nous adopterons aussi cette approche, mais nos modèles entiers seront différents de ceux utilisés par Faltings.

2) Cette idée se heurte tout de suite à une nouvelle difficulté. En effet, le modèle entier $\mathcal{M}_{\mathcal{D}r,n} = (\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n})^{\sim}$ de $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n}$ obtenu par normalisation de $\mathcal{M}_{\mathcal{D}r}$ dans $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n}$ (voir [**Far1**, appendice A]) est π-adique alors que $\mathcal{M}_{\mathcal{LT},m}$ ne l'est pas. Pour pouvoir comparer les deux tours, Faltings modifie (« π-adifie ! ») le modèle entier de la tour de Lubin-Tate (voir [**Fal1**], [**Far1**]) ; il modifie aussi un peu le modèle entier de la tour de Drinfeld. Nous π-adifierons aussi la tour de Lubin-Tate en employant une variante de la construction de Faltings. Nous n'aurons en revanche pas besoin de modifier le modèle entier de la tour de Drinfeld obtenu par normalisation.

3) Pour obtenir un modèle entier π-adique d'une K-variété rigide-analytique, il suffit de se donner un recouvrement affinoïde admissible *pur* de cette variété (voir le paragraphe 3.7 de [**vdPV**] ; nous allons rappeler à l'instant en quoi consiste cette condition de pureté). En fait, ni le recouvrement affinoïde de la tour de

(2) Laurent Fargues (voir [**Far1**, ch. IV. 1]) a récemment développé un formalisme d'espaces rigides généralisés ; nous n'utiliserons pas ce point de vue dans notre texte mais l'isomorphisme de notre théorème principal 1.5.3 –tout comme l'isomorphisme original de Faltings– se réinterprète immédiatement en ces termes.

Lubin-Tate qu'utilise Faltings ni celui que nous nous utiliserons ne s'obtiennnent comme l'image réciproque d'un recouvrement défini à un niveau fini de la tour et il faut donc légèrement modifier cette construction. Pour cela, nous posons la définition suivante.

Définition 1.5.2. — Un recouvrement affinoïde admissible $(\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\bullet,i})_{i\in\mathcal{I}}$ de la tour de Lubin-Tate $(\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},n})_n$ consiste en la donnée

- d'un ensemble $\mathcal{I}$ d'indices
- d'un entier $n(i)$ pour tout $i \in \mathcal{I}$
- d'un ouvert affinoïde $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},n(i),i} \subset \breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},n(i)}$ pour tout $i \in \mathcal{I}$, induisant donc par image réciproque un ouvert affinoïde $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},n,i} \subset \breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},n}$ pour tout $n \geq n(i)$

tels que pour tout ouvert affinoïde connexe $\mathcal{U} \subset \breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT}}$, il existe une partie finie $\mathcal{I}(\mathcal{U})$ telle que l'image réciproque $\mathcal{U}_n$ de $\mathcal{U}$ dans $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},n}$ $(n \geq \sup_{i\in\mathcal{I}(\mathcal{U})} n(i))$ soit recouverte par les ouverts $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},n,i}$ $(i \in \mathcal{I}(\mathcal{U}))$.

Ce recouvrement est dit pur si pour tout couple (i,j) d'éléments de $\mathcal{I}$, l'ouvert $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},n,i} \cap \breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},n,j}$ $(n \geq i,j)$ de $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},n,i}$ provient d'un ouvert de Zariski $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n,(i,j)}$ du modèle entier affine

$$\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n,i} = \mathrm{Spf}(\{f \in H^0(\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},n,i}, \mathcal{O}_{\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},n,i}}); |f(x)| \leq 1, \forall x \in \breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},n,i}\})$$

de $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},n,i}$.

Soit $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,i}$ (resp. $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n,(i,j)}$) la limite projective (complétée, *cf.* [**Far1**, IV.1.7]) des schémas formels $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n,i}$ (resp. $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n,(i,j)}$). En recollant les schémas formels π-adiques $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,i}$ le long de leurs ouverts $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,(i,j)}$ le recouvrement $(\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\bullet,i})_i$ induit un schéma formel π-adique $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,\mathcal{I}}$. Ce schéma formel peut être considéré comme une « π-adification » de la tour de Lubin-Tate.

Le recouvrement $(\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\bullet,i})_{i\in\mathcal{I}}$ que nous utiliserons sera précisé dans la troisième section. Nous nous contentons pour l'instant de dire qu'il est muni d'une action de $\mathrm{GL}_d(K) \times D^\times$ et d'une donnée de descente à la Weil (de sorte qu'il en est de même pour $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,\mathcal{I}}$).

Du « côté Drinfeld », comme nous l'avons déjà dit, la situation est beaucoup plus simple puisqu'il suffit de considérer le modèle entier $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\infty} = \varprojlim_n \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}$ de la tour de Drinfeld (bien sûr, cette limite projective est elle aussi complétée, *cf.* [**Far1**, IV.1.7]).

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat principal.

Théorème 1.5.3. — *Il existe un isomorphisme (explicite)* $(\mathrm{GL}_d(K)\times D^\times)/K^\times$*-équivariant*

$$\varphi : \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,\mathcal{I}} \xrightarrow{\sim} \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\infty}$$

qui est de plus compatible aux données de descente de Weil.

Nous allons finalement faire quelques remarques.

Remarque 1.5.4. —

1) En égales caractéristiques, il est encore possible d'utiliser le point de vue de Faltings pour construire un isomorphisme « de Faltings » des deux tours. En effet, la construction de Faltings repose uniquement sur la théorie de Grothendieck-Messing –seule la conservation du degré [**Far1**, II. 11] utilise la théorie de Fontaine. En égales caractéristiques, [**G**] (*cf.* I. 3 : théorie de déformations) fournit un analogue de la théorie de Grothendieck-Messing qui s'avère suffisant pour transposer la construction de Faltings.

Au niveau des points à valeurs dans un anneau de valuation (comme dans le chapitre II de [**Far1**]) notre isomorphisme φ coïncide avec celui de Faltings. De plus, notre résultat a les mêmes conséquences cohomologiques (*cf.* [**Fal1**, §6] et [**Far1**, IV. 13]) que le théorème original de Faltings. En fait, l'isomorphisme d'*espaces rigides généralisés* (au sens de [**Far1**, IV.1])

$$\varphi^{\mathrm{rig}} : \breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\infty,\mathcal{I}} \xrightarrow{\sim} \breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,\infty}$$

induit par notre isomorphisme coïncide vraisemblablement avec celui induit par l'isomorphisme de Faltings.

2) Notre recouvrement $(\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\bullet,i})_{i\in\mathcal{I}}$ aura comme ensemble $\mathcal{I}$ d'indices l'ensemble des simplexes maximaux de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_d(K)$. L'action de $\mathrm{GL}_d(K)\times D^\times$ sur $\mathcal{I}$ sera le produit de l'action évidente de $\mathrm{GL}_d(K)$ et de l'action triviale de $D^\times$; la donnée de descente agira trivialement sur $\mathcal{I}$ (si bien que ce recouvrement proviendra en fait d'un recouvrement $(\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\bullet,i})_{i\in\mathcal{I}}$ de $\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\bullet}$).

En particulier, l'ouvert $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},n,(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)}$ que nous associerons au simplexe maximal $(P^{-i}\mathcal{O}^d)_{i\in\mathbb{Z}}$ sera une sorte de « domaine fondamental » pour l'action de $\mathrm{GL}_d(K)$ sur la tour de Lubin-Tate.

La tour de Drinfeld est elle aussi munie d'un recouvrement affinoïde (provenant d'un recouvrement de son rez-de-chaussée[(3)] $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,0}$) ayant le même ensemble d'indices (*cf.* [**D1**], [**BC**] ou [**G**]). Pour construire l'isomorphisme du théorème 1.5.3, il suffira donc de construire un isomorphisme $\varphi_{P^{-\bullet}\mathcal{O}^d} : \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d} \xrightarrow{\sim} \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\infty,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}$ équivariant sous $\mathcal{B}^\times\times D^\times$ et compatible aux données de descente de Weil puis de vérifier que les translatés sous l'action de $\mathrm{GL}_d(K)$ de cet isomorphisme se recollent. C'est ce que nous ferons dans les deux dernières sections.

(3) *first floor*

2. Théorèmes de représentabilité explicites

2.1. Modules de coordonnées. — La théorie du module de coordonnées, esquissée dans une lettre de Drinfeld à Carayol et développée dans [**G**], est une sorte d'analogue en égales caractéristiques de la théorie de Dieudonné. Elle ramène l'étude des $\mathcal{O}$-modules formels à de l'algèbre semi-linéaire –plus précisément, elle fournit une équivalence contravariante entre la catégorie des $\mathcal{O}$-modules formels et une certaine catégorie de chtoucas locaux. La construction de l'isomorphisme des deux tours dans la section 5 reposera sur cette théorie. On va donc faire quelques rappels à son sujet (voir [**G**, ch. I] pour plus de précisions).

Soit X un $\mathcal{O}$-module formel de hauteur h et de dimension d sur un $\mathcal{O}$-schéma $S \in \mathrm{Nilp}\,\mathcal{O}$. Son module de coordonnées est $M_X = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{F}_q}(X, \widehat{\mathbb{G}}_{a,S})$, où $\mathbb{F}_q$ agit sur $\widehat{\mathbb{G}}_{a,S}$ de la manière évidente. C'est un faisceau de $\mathcal{O}\,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}\,\mathcal{O}_S$-modules sur S, où $O\,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}\,\mathcal{O}_S$ est le complété de $\mathcal{O}\otimes_{\mathbb{F}_q}\mathcal{O}_S$ pour la topologie $\pi\otimes 1$-adique –l'action de $\mathcal{O}$ provient de l'action de $\mathcal{O}$ sur X et l'action de $\mathcal{O}_S$ vient de l'action de $\mathcal{O}_S$ sur $\widehat{\mathbb{G}}_{a,S}$ par homothéties. De plus l'isogénie de Frobenius $\tau : \widehat{\mathbb{G}}_{a,S} \to \widehat{\mathbb{G}}_{a,S}$ induit une application $\mathrm{Id}_{\mathcal{O}}\otimes \mathrm{Fr}_{\mathcal{O}_S}$-linéaire $F : M_X \to M_X$. Pour tout $\mathcal{O}\,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}\,\mathcal{O}_S$-module M on note ${}^{\tau}M = (\mathrm{Id}_{\mathcal{O}}\otimes\mathrm{Fr}_{\mathcal{O}_S})^*(M)$, de sorte que F induit un morphisme de $\mathcal{O}\,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}\,\mathcal{O}_S$-modules ${}^{\tau}M_X \to M_X$.

A partir de maintenant on notera $\mathcal{O}\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S$ le produit tensoriel $\mathcal{O}\,\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}\,\mathcal{O}_S$. Pour simplifier on notera $z = \pi\otimes 1$ et lorsque s est une section de $\mathcal{O}_S$ on notera encore s la section $1\otimes s$ de $\mathcal{O}\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S$ –remarquer que ceci s'applique en particulier pour $s = \pi$. On notera aussi $K\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S = \mathcal{O}\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S[z^{-1}]$ le complété de $K\otimes_{\mathbb{F}_q}\mathcal{O}_S$ pour la topologie z-adique.

Proposition 2.1.1. — *([**G**], ch. I, prop. 2.2.3 et 2.2.6)*

1) Soit X un $\mathcal{O}$-module formel de hauteur h et de dimension d sur un $\mathcal{O}$-schéma $S \in \mathrm{Nilp}\,\mathcal{O}$. Son module de coordonnées M_X a les propriétés suivantes :

- *a) M_X est, localement pour la topologie de Zariski sur S, un $\mathcal{O}\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S$-module libre de rang h,*
- *b) le conoyau de $F : {}^{\tau}M_X \to M_X$ est supporté schématiquement par le graphe du morphisme de S dans $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}$ (ce qui revient à dire qu'il est annulé par $z-\pi$), et il est localement libre de rang d sur ce graphe (comme $\mathcal{O}_S$-module il est canoniquement isomorphe au dual de $\mathrm{Lie}\,X$),*
- *c) l'endomorphisme semi-linéaire F de M_X/zM_X est, localement pour la topologie de Zariski sur S, nilpotent.*

2) Le module de coordonnées établit une équivalence de catégories contravariante de la catégorie des $\mathcal{O}$-modules formels de hauteur h et de dimension d vers la catégorie des couples (M, F) satisfaisant les conditions 1),a),b),c).

3) La donnée d'une quasi-isogénie $X \dashrightarrow X'$ équivaut à celle d'un isomorphisme de $K\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S$-modules $M_{X'}\otimes_{\mathcal{O}\widehat{\otimes}\mathcal{O}_S} K\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S \to M_X\otimes_{\mathcal{O}\widehat{\otimes}\mathcal{O}_S} K\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S$ compatible aux morphismes de Frobenius $F_{X'}$ et F_X.

Lorsque S est un $\mathcal{O}$-schéma formel, la proposition ci-dessus s'adapte –il suffit de lire « le graphe du morphisme de S dans $\mathrm{Spf}\,\mathcal{O}$ » dans la condition (b) et de remplacer la condition (c) par « l'endomorphisme semi-linéaire F de M_X/zM_X est, localement pour la topologie de Zariski sur S, topologiquement nilpotent ».

Dans ce cadre, on rencontrera souvent des *limites de quasi-isogénies*, c'est-à-dire, lorsque S est défini par un système inductif de nil-immersions fermées $S_n \hookrightarrow S_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}, S_n \in \mathrm{Nilp}\,\mathcal{O}$), des systèmes compatibles $(\rho_n : X_{S_n} \dashrightarrow X'_{S_n})_{n\in\mathbb{N}}$ de quasi-isogénies. De telles limites de quasi-isogénies ne proviennent pas nécessairement d'une quasi-isogénie $X \dashrightarrow X'$ car le dénominateur de ρ_n (c'est-à-dire, le plus petit entier N tel que $\rho_n \circ X(\pi^N)$ soit un morphisme) est en général une fonction non-bornée de n –on en rencontrera d'ailleurs un exemple dès le paragraphe suivant avec la limite de quasi-isogénies ρ universelle sur la fibre spéciale de l'espace de modules de Lubin-Tate. Notant

$$\begin{aligned} K \,\widehat{\widehat{\otimes}}\, \mathcal{O}_S &= \varprojlim_n K \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{O}_{S_n} \\ &= \{\textstyle\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j z^j ; a_j \in \mathcal{O}_S \text{ et } \lim_{j\to-\infty} a_j = 0\} \end{aligned}$$

la $\mathcal{O} \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{O}_S$-algèbre complétée de $K \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{O}_S$ vis-à-vis de la topologie induite par celle de $\mathcal{O}_S$, la donnée d'une telle limite de quasi-isogénies équivaut alors à celle d'un isomorphisme $M_{X'} \otimes_{\mathcal{O}\widehat{\otimes}\mathcal{O}_S} K \,\widehat{\widehat{\otimes}}\, \mathcal{O}_S \to M_X \otimes_{\mathcal{O}\widehat{\otimes}\mathcal{O}_S} K \,\widehat{\widehat{\otimes}}\, \mathcal{O}_S$ compatible aux morphismes de Frobenius $F_{X'}$ et F_X.

On peut remarquer qu'on a là encore commis l'abus de notations consistant à écrire $a_j \in \mathcal{O}_S$ pour dire que a_j est une section globale de $\mathcal{O}_S$. En fait, les constructions de $\mathcal{O} \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{O}_S$, $K \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{O}_S$ et $K \,\widehat{\widehat{\otimes}}\, \mathcal{O}_S$ se « faisceautisent » visiblement et fournissent des faisceaux de $\mathcal{O}_S$-algèbres sur S. Ces faisceaux ne sont pas quasi-cohérents mais proviennent de faisceaux quasi-cohérents de $\mathcal{O} \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{O}_S$-algèbres sur $\mathrm{Spf}\,\mathcal{O} \widehat{\times}_{\mathrm{Spf}\,\mathbb{F}_q} S$.

Dans les deux paragraphes suivants, on va respectivement décrire les schémas formels (ind-)représentant les foncteurs $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}}$ et $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$, ainsi que les modules de coordonnées des objets universels.

2.2. Côté Lubin-Tate. — Il résulte de [**D1**] (voir aussi [**HG1**]) que le foncteur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}}$ est ind-représenté par $\coprod_{h\in\mathbb{Z}} \mathrm{Spf}\,\breve{\mathcal{O}}[[u_1, \cdots, u_{d-1}]]$ muni de l'objet universel (X, ρ) suivant. En tant que groupe formel avec action de $\mathbb{F}_q$, $X = \widehat{\mathbb{G}}_a$; l'action de $\pi \in \mathcal{O}$ est $X(\pi) = \pi + u_1\tau + \cdots + u_{d-1}\tau + \tau^d$. La quasi-isogénie ρ est uniquement déterminée par la condition $\rho \equiv \tau^h$ modulo $(\pi, u_1, \cdots, u_{d-1})$ (dans la suite elle sera explicitée à l'aide de modules de coordonnées). Sur cette écriture, la donnée de descente de Weil est facile à expliciter : elle applique la h-ième copie de $\mathrm{Spf}\,\breve{\mathcal{O}}[[u_1, \cdots, u_{d-1}]]$ sur la $(h-1)$-ième, fixe les u_i et agit sur $\breve{\mathcal{O}}$ par τ.

Dans toute la suite, plutôt qu'avec $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}}$ on travaillera avec l'espace de modules avec structures de niveau « de type Iwahori » $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times}$ suivant (intermédiaire entre $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}}$ et $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},1}$).

Au sous-groupe d'Iwahori $\mathcal{B}^\times$ est naturellement associé un problème de modules

$$\begin{aligned}\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times} &= \{(X,\rho), H_1 \subset \cdots \subset H_{d-1} \subset X(\pi)\}\\ &= \{(X,\rho), X = X_0 \xrightarrow{\alpha_1} X_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots X_d \xrightarrow{\alpha_d} X_0, \alpha_d \circ \cdots \circ \alpha_1 = X(\pi)\},\end{aligned}$$

où (X,ρ) est comme dans la définition de l'espace de Lubin-Tate $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}}$, H_i est un sous-schéma en groupes avec action de $\mathbb{F}_q$ de $X[\pi]$, fini et plat d'ordre q^i, $X_i = X/H_i$ est un $\mathcal{O}$-module formel de hauteur d et de dimension 1, et α_i est une isogénie de degré q.

Ce foncteur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times}$ est ind-représenté par

$$\coprod_{h\in\mathbb{Z}} \mathrm{Spf}(\breve{\mathcal{O}}[[x_1,\cdots,x_d]]/(x_1\cdots x_d - (-1)^d\pi))$$

(dans la suite on considérera toujours $(x_i)_{i\in\{1,\cdots,d\}}$ comme une suite périodique $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$) et les objets universels sont les suivants :

- $X = \widehat{\mathbb{G}}_a$ comme groupe formel avec action de $\mathbb{F}_q$ et l'action de π est donnée par $X(\pi) = (\tau - x_d)\cdots(\tau - x_1)$,
- $H_i = \mathrm{Ker}[(\tau - x_i)\cdots(\tau - x_1)]$,
- $X_i = \widehat{\mathbb{G}}_a$ comme groupe formel avec action de $\mathbb{F}_q$, l'action de π est donnée par $X_i(\pi) = (\tau - x_i)\cdots(\tau - x_1)(\tau - x_d)\cdots(\tau - x_{i+1})$ et $\alpha_i = \tau - x_i$,
- la quasi-isogénie ρ est encore déterminée par la condition

$$\rho \equiv \tau^h \text{ modulo } (x_1\cdots,x_d).$$

On va maintenant traduire ceci en termes de modules de coordonnées. Pour énoncer le résultat, il est commode d'introduire la notation suivante : $P = P_\pi \otimes 1$ –il aurait certes été plus logique de noter P_z cette matrice...

Théorème 2.2.1. — *Le module de coordonnées (M_X, F_X) du $\mathcal{O}$-module formel universel X sur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times}$ est*

- $M_X = \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times}}$
- $F_X = \Phi_X \circ \tau$

où l'on note Φ_X la matrice $\mathrm{diag}(x_1,\cdots,x_d) + {}^tP$ *et* $\tau = \mathrm{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \mathrm{Fr}_{\mathcal{O}_{\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times}}}$. *La matrice $R_{X_{S_0}}$ du morphisme*

$$M_\rho : M_X/\pi M_X \to K^d \,\widehat{\widehat{\otimes}}\, (\mathcal{O}_{\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times}}/(\pi))$$

associé à la quasi-isogénie ρ est la réduction modulo π de

$$\begin{aligned} R_X &= {}^tP^h[\cdots({}^tP^3\,{}^{\tau^2}\Phi_X^{-1}\,{}^tP^{-2})({}^tP^2\,{}^{\tau}\Phi_X^{-1}\,{}^tP^{-1})({}^tP\Phi_X^{-1})]\\ &= \lim_{n\to\infty} {}^tP^{n+h}\,{}^{\tau^{n-1}}\Phi_X^{-1}\cdots\Phi_X^{-1}\end{aligned}$$

–ce produit converge pour la topologie $(x_1,\cdots,x_d)$-adique sur le complété $(x_1,\cdots,x_d)$-adique de ${}^tP^h\,\mathrm{diag}(\mathcal{O}^d_{\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times}})[{}^tP^{-1}]$ et définit donc une matrice à coefficients dans $K \,\widehat{\widehat{\otimes}}\, \mathcal{O}_{\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times}}$; cette matrice R_X satisfait l'équation $R_X\Phi_X = {}^tP\,{}^{\tau}R_X$.

On note $R_X = {}^tP^h \sum_{j\geq 0} \mathrm{diag}(r_{1,j}, \cdots, r_{d,j})\, {}^tP^{-j}$ (avec $r_{i,0} = 1$) ; l'équation matricielle $R_X \Phi_X = {}^tP\, {}^\tau R_X$ se traduit alors par les équations $r_{i-1,j+1}^q - r_{i,j+1} = r_{i,j} x_{i+j}$ $(j \geq 0)$.

Démonstration. — La famille $(1, \tau - x_1, (\tau - x_2)(\tau - x_1), \cdots, (\tau - x_{d-1}) \cdots (\tau - x_1))$ est visiblement une base de M_X et en utilisant cette base on obtient l'isomorphisme de la proposition. La matrice $R_{X_{S_0}}$ est congrue à ${}^tP^h$ modulo $(x_1, \cdots, x_d)$ et telle que $R_{X_{S_0}} \Phi_X = {}^tP\, {}^\tau R_{X_{S_0}}$. On a donc

$$R_{X_{S_0}} = {}^tP^n\, {}^{\tau^n} R_{X_{S_0}}\, {}^{\tau^{n-1}}\Phi_X^{-1} \cdots \Phi_X^{-1} = \lim_{n\to\infty} {}^tP^{n+h}\, {}^{\tau^{n-1}}\Phi_X^{-1} \cdots \Phi_X^{-1} .$$

Enfin, il reste à vérifier que R_X s'exprime comme un somme de puissances de ${}^tP$ d'exposants $\leq h$. La matrice $\Phi_X\, {}^tP^{-1}$ est de la forme

$$\mathrm{Id}_d + \varepsilon \,, \text{où } \varepsilon \in (x_1, \cdots, x_d)\, \mathrm{diag}(\mathcal{O}^d_{\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times}})[\,{}^tP^{-1}]$$

et a donc un inverse $\mathrm{Id}_d - \varepsilon + \varepsilon^2 - \cdots$ dans le complété $(x_1, \cdots, x_d)$-adique de la $\mathcal{O}_{\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times}}$-algèbre $\mathrm{diag}(\mathcal{O}^d_{\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times}})[\,{}^tP^{-1}]$; en utilisant l'expression de R_X sous forme de produit il en résulte que R_X appartient au complété $(x_1, \cdots, x_d)$-adique de ${}^tP^h\, \mathrm{diag}(\mathcal{O}^d_{\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times}})[\,{}^tP^{-1}]$. □

Remarque 2.2.2. — Le fait que la matrice $R_{X_{S_0}}$ se relève en une matrice R_X satisfaisant la même équation est à rapprocher du lemme de rigidité [**K**, lemma 1.1.3] utilisé dans la démonstration de Drinfeld ([**D2**], [**K**]) du théorème de Serre-Tate.

Il faut cependant souligner que $(\mathcal{O}^d \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}_S,\ {}^tP \circ \tau)$ n'est pas le module de coordonnées d'un $\mathcal{O}$-module formel si l'image de π est non nulle dans $\mathcal{O}_S$. On peut néanmoins considérer la matrice R_X comme celle associée à une limite de quasi-isogénies *généralisées* au sens suivant. Revenant à la définition rappelée en (1.2) des $\mathcal{O}$-modules formels, on peut aussi appeler $\mathcal{O}$-module formel sur un $\mathbb{F}_q$-schéma S tout groupe formel muni d'une action de $\mathcal{O}$ telle que l'action tangente de $\mathcal{O}$ se fasse par une homothétie de rapport nilpotent (qui fait alors de S un objet de $\mathrm{Nilp}\,\mathcal{O}$). Avec ce point de vue on peut ensuite définir des morphismes généralisés $X \to X'$ en n'imposant plus que les morphismes $\mathcal{O} \to \mathcal{O}_S$ induits par X et par X' coïncident.

2.2.1. Structures de niveau. — On va maintenant interpréter les structures de niveau en termes du module de coordonnées.

Puisqu'on utilise dans la suite le problème de modules $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times}$, on travaille avec des $\mathcal{O}$-modules formels déjà munis d'une structure de niveau de type Iwahori. Il est alors naturel de demander que la structure de niveau additionnelle $\sigma : \pi^{-n}\mathcal{O}^d/\mathcal{O}^d \to X[\pi^{-n}]$ sur X soit compatible à la structure de niveau de type $\mathcal{B}^\times$ sur X, c'est-à-dire, que $\sigma(\pi^{-1}\mathcal{O}/\mathcal{O}e_1 \oplus \cdots \oplus \pi^{-1}\mathcal{O}/\mathcal{O}e_i) \subset H_i$ (où $(e_i)_i$ désigne la base canonique de $\mathcal{O}^d$).

Soit $S \in \mathrm{Nilp}\,\mathcal{O}$ et X un $\mathcal{O}$-module formel sur S. En identifiant le $\mathbb{F}_q$-dual de $K/\mathcal{O}$ à $\mathcal{O}$ par le résidu $\mathcal{O}\otimes K/\mathcal{O} \to \mathbb{F}_q$, la donnée d'un morphisme $\sigma : \pi^{-n}\mathcal{O}/\mathcal{O} \to X[\pi^n]$ correspond à celle d'un morphisme $M_\sigma : M_X/z^n M_X \to (\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})\otimes\mathcal{O}_S$ compatible aux Frobenius F_X sur la source et τ sur le but. Lorsque (X, H_i, ρ) est un point de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times}$ à valeurs dans $S \in \mathrm{Nilp}\,\breve{\mathcal{O}}$, la donnée de $\sigma : \pi^{-n}\mathcal{O}^d/\mathcal{O}^d \to X[\pi^n]$ correspond à celle d'une matrice $S_X \in M_d(\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}\otimes\mathcal{O}_S)$ telle que $S_X\Phi_X = {}^\tau S_X$ (où l'on note encore Φ_X la matrice obtenue à partir de $\Phi_X \in M_d(\mathcal{O}\otimes\mathcal{O}_{\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times}})$ par le changement de base $S \to \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times}$). Le morphisme σ est tel que $\sigma(\pi^{-1}\mathcal{O}/\mathcal{O}e_1 \oplus \cdots \oplus \pi^{-1}\mathcal{O}/\mathcal{O}e_i) \subset H_i$ si et seulement si la matrice S_X est triangulaire inférieure modulo z ; lorsque c'est le cas, on va expliciter les conditions pour que σ soit une structure de niveau à la Drinfeld.

Soit $S_X \equiv \sum_{j\geq 0}\mathrm{diag}(s_{1,j},\cdots,s_{d,j})\,{}^tP^j$ (modulo $z^n M_d(\mathcal{O}\mathbin{\widehat{\otimes}}\mathcal{O}_S)$) une matrice triangulaire inférieure modulo z. L'équation matricielle $S_X\Phi_X = {}^\tau S_X$ s'écrit encore $s_{i,j}^q - x_{i-j}s_{i,j} = s_{i,j-1}$. En particulier on a $s_{i,0}^q - x_i s_{i,0} = 0$ et $s_{i,0}$ est donc un point du noyau de $\alpha_i = (\tau - x_i) : X_{i-1} \to X_i$; plus généralement, $s_{i,j}$ est un point de $(\alpha_{i-1}\circ\cdots\circ\alpha_{i-j})^{-1}(s_{i,0}) \subset \mathrm{Ker}\,(\alpha_i\circ\cdots\circ\alpha_{i-j}) \subset X_{i-j-1}[\pi^{[j/d]+1}]$ (où $[j/d]$ désigne la partie entière de j/d) et on a $\alpha_{i-j}(s_{i,j}) = s_{i,j-1}$.

Le morphisme σ associé à S_X est une structure de niveau à la Drinfeld si et seulement si on a $s_{i,0}^{q-1} = x_i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. En effet, ce morphisme σ est une structure de niveau à la Drinfeld lorsqu'on a les égalités de diviseurs $\sigma(\pi^{-1}\mathcal{O}/\mathcal{O}e_1 \oplus\cdots\oplus \pi^{-1}\mathcal{O}/\mathcal{O}e_i) = H_i$ et $\sigma(\pi^{-1}\mathcal{O}^d/\mathcal{O}^d) = X[\pi]$ sur $X = X_0$, qui sont elles-mêmes équivalentes aux égalités de diviseurs $\sum_{\lambda\in\mathbb{F}_q}\lambda s_{i,0} = \mathrm{Ker}(\tau - x_i)$ sur X_{i-1}, pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Remarque 2.2.3. — Au lieu de considérer une matrice S_X définie modulo $z^n M_d(\mathcal{O}\otimes\mathcal{O}_S)$ comme ci-dessus il est plus naturel de considérer une matrice S_X définie modulo $z^n\,{}^t\mathcal{B}\otimes\mathcal{O}_S$ (autrement dit, $S_X \in ({}^t\mathcal{B}/\pi^n\,{}^t\mathcal{B})\otimes\mathcal{O}_S$). L'espace de module $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}_n^\times}$ ainsi obtenu (qui est associé au sous-groupe $\mathcal{B}_n^\times = (\mathrm{Id}_d + \pi^n\mathcal{B})^\times$ de $\mathrm{GL}_d(K)$) est intermédiaire entre $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n}$ et $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n+1}$. Il est en fait régulier (une suite régulière de paramètres est $(s_{i,nd-1})_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$).

2.2.2. Action du groupe $\mathrm{GL}_d(K)\times D^\times$ *et de la donnée de descente*. — Tout comme en 1.3, on se donne $\gamma \in \mathrm{GL}_d(K)$, $N \in \mathbb{N}$ tel que $\pi^N\gamma M_d(\mathcal{O})\gamma^{-1} \subset M_d(\mathcal{O})$, $m \in \mathbb{Z}$ le plus petit entier tel que $\pi^m\gamma \in M_d(\mathcal{O})$, $\gamma' = \pi^m\gamma$ et $H = \gamma'^{-1}\mathcal{O}^d/\mathcal{O}^d$. Soit $(X,\rho,\sigma) \in \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n+N}(S)$. Le sous-groupe $\sigma(H) \subset X$ image (au sens des diviseurs) de H par σ est aussi l'unique sous-groupe fini et plat de X d'ordre $|H| = q^{v(\det\gamma')}$ et contenant (ensemblistement cette fois) l'image de H par σ. Par conséquent, à isomorphisme unique près, il existe un unique triplet $(X', \widetilde{\gamma'} : X \to X')$, où $\widetilde{\gamma'}$ est une isogénie de hauteur $v(\det\gamma')$ et σ' est une structure de niveau à la Drinfeld sur X', rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \gamma'^{-1}\pi^{-n}\mathcal{O}^d/\mathcal{O}^d & \xrightarrow{\gamma'} & \pi^{-n}\mathcal{O}^d/\mathcal{O}^d \\ \sigma\downarrow & & \sigma'\downarrow \\ X & \xrightarrow{\widetilde{\gamma}'} & X' \end{array}$$

commutatif (le morphisme $\widetilde{\gamma}'$ est bien sûr le morphisme de passage au quotient par $\sigma(H)$). On rappelle (1.3) que l'image de (X,ρ,σ) par γ est alors $(X',\sigma',X'_0(\pi^m)^{-1}\circ \widetilde{\gamma}'_0\circ\rho)$ (où l'indice 0 désigne la restriction à S_0).

Traduisant ceci en termes de modules de coordonnées, à isomorphisme unique près, il existe un unique quintuplet $(M_{X'},F_{X'},\Gamma',S_{X'},R_{X'})$ où

$$(M_{X'},F_{X'},S_{X'},R_{X'})\in\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n}(S)$$

et

$$\Gamma' = M(\widetilde{\gamma}') : \mathcal{O}^d\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S = M_X \to M_{X'} = \mathcal{O}^d\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S$$

est un morphisme

- compatible aux Frobenius F_X et $F_{X'}$
- dont le déterminant $\det\Gamma'$ –qui est compatible aux Frobenius $\det F_X$ et $\det F_{X'}$ et est donc un élément de $\mathbb{F}_q[[z]]\subset\mathcal{O}\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S$ –est de valuation (z-adique) $v(\det\gamma')$
- rendant commutatifs les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} M_{X'} & \xrightarrow{\Gamma'} & M_X \\ S_{X'}\downarrow & & S_X\downarrow \\ \mathcal{O}^d/\pi^n\mathcal{O}^d\otimes\mathcal{O}_S & \xrightarrow{{}^t\gamma'_z} & \mathcal{O}^d/\pi^n\,{}^t\gamma'\mathcal{O}^d\otimes\mathcal{O}_S \end{array} \quad\text{et}\quad \begin{array}{ccc} M_{X'} & \xrightarrow{z^{-m}\Gamma'} & M_X[z^{-1}] \\ R_{X'}\downarrow & & R_X\downarrow \\ K^d\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S & = & K^d\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S \end{array}$$

  (où l'on note $\gamma'_z=\gamma'\otimes\mathrm{Id}_{\mathcal{O}_S}$).

L'image de (M_X,F_X,R_X,S_X) par γ est alors $(M_{X'},F_{X'},R_{X'},S_{X'})$.

Lorsqu'on dispose d'un système compatible $(M_X,F_X,R_X,S_{n,X})\in\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n}(S)$ ($n\in\mathbb{N}, S_{n+1,X}\equiv S_{n,X}$ modulo z^n), l'élément $(M_{X'},F_{X'},R_{X'},S_{\bullet,X'}) = \gamma(M_X,F_X,R_X,S_{\bullet,X})$ s'écrit plus agréablement de la manière suivante. En notant $S_X=\varprojlim_n S_{n,X}: M_X\to\mathcal{O}^d\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S$ (resp. $S_{X'}=\cdots$), $(M_{X'},F_{X'},R_{X'},S_{X'})$ est, à isomorphisme unique près, l'unique quadruplet tel qu'il existe $\Gamma: M_{X'}\to M_X[z^{-1}]$, compatible aux Frobenius F_X et $F_{X'}$ et tel que $\det\Gamma$ soit de valuation (z-adique) $v(\det\gamma)$, rendant les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} M_{X'} & \xrightarrow{\Gamma} & M_X[z^{-1}] \\ S_{X'}\downarrow & & S_X\downarrow \\ \mathcal{O}^d\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S & \xrightarrow{{}^t\gamma_z} & \mathcal{O}^d\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S[z^{-1}] \end{array} \quad\text{et}\quad \begin{array}{ccc} M_{X'} & \xrightarrow{\Gamma} & M_X[z^{-1}] \\ R_{X'}\downarrow & & R_X\downarrow \\ K^d\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S & = & K^d\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S \end{array}$$

commutatifs –on a donc $S_{X'}={}^t\gamma_z^{-1}S_X\Gamma$ et $R_{X'}=R_X\Gamma$. Lorsque $\gamma\in\mathcal{B}^\times$, Γ est un isomorphisme ; dans ce cas on peut en fait prendre $X=X'$ et $\Gamma=\mathrm{Id}_X$.

Pour exprimer l'action de $D^\times$ sur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n}$ en termes de modules de coordonnées, on utilise le morphisme d'algèbres $D\to M_d(K_d)$, $\lambda\in\mathbb{F}_{q^d}\mapsto$

$\operatorname{diag}(\lambda, \lambda^q, \cdots, \lambda^{q^{d-1}})$, $\Pi \mapsto P_\pi$ qui permet de considérer les éléments de D comme des matrices. Pour $\delta = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \lambda_j \Pi^j \in D$, on note

$$\delta_z = \sum_j \operatorname{diag}(\iota(\lambda_j), \cdots, \iota(\lambda_j^{q^{d-1}}))P^j \in \operatorname{diag}(\mathcal{O}_S^d)((P)) = M_d(K) \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$$

(où $\iota : \breve{\mathcal{O}} \to \mathcal{O}_S$ est le morphisme structural du $\breve{\mathcal{O}}$-schéma S).

Soient $\delta \in D^\times$ et $(X, \rho, \sigma) \in \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n}(S)$, de module de coordonnées (M_X, F_X, R_X, S_X). Le module de coordonnées de $(X, \rho \circ \delta^{-1}, \sigma)$ est alors $(M_X, F_X, {}^t\delta_z^{-1} R_X, S_X)$.

En travaillant avec des modules de coordonnées normalisés comme dans le théorème 2.2.1, on obtient des objets uniquement déterminés plutôt que des objets uniquement déterminés à isomorphisme unique près. L'action ci-dessus de $D^\times$ ne respecte pas cette normalisation ; avec ce point de vue il faut alors remplacer $(M_X, F_X, {}^t\delta_z^{-1} R_X, S_X)$ par l'unique module de coordonnées normalisé $(M_X, \Delta^{-1} F_X\, {}^\tau\Delta, {}^t\delta_z^{-1} R_X \Delta, S_X \Delta)$ qui lui soit isomorphe (où Δ est un élément uniquement déterminé de $({}^t\mathcal{B} \widehat{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}_S)^\times = \mathcal{O}_S[[{}^tP]]^\times$).

Finalement, la donnée de descente à la Weil est le morphisme τ-semi-linéaire associant à $(M_X, F_X, R_X, S_X) \in \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n}(S)$ le quadruplet $(M_X, F_X, {}^tP^{-1} R_X, S_X) \in \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n}(S[\tau])$ –elle commute visiblement à l'action de $\mathrm{GL}_d(K)$ et on laisse au lecteur l'exercice amusant consistant à vérifier qu'elle commute à l'action de $D^\times$ (indication : même si cela n'apparaît pas sur la notation, δ_z dépend du morphisme $\breve{\mathcal{O}} \to \mathcal{O}_S$).

Remarque 2.2.4. — Pour un système compatible $(M_X, F_X, R_X, S_{\bullet,X})$ comme ci-dessus, induisant donc $S_X : M_X \to \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ par passage à la limite projective, on peut considérer le produit $T_X = S_X R_X^{-1} \in M_d(K \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)$ (voire, dans le cas où $S = \varinjlim_m S_m$, $S_m \in \operatorname{Nilp} \breve{\mathcal{O}}$ est un $\breve{\mathcal{O}}$-schéma formel, $T_X = S_X R_X^{-1} \in M_d(K \widehat{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}_S)$). Cette matrice satisfait l'équation $T_X\, {}^tP = {}^\tau T_X$. L'action de $(\gamma, \delta) \in \mathrm{GL}_d(K) \times D^\times$ sur T_X est aussi très simple puisqu'elle associe ${}^t\gamma_z^{-1} T_X\, {}^t\delta_z$ à T_X. Enfin, l'action de la donnée de descente est $T_X \mapsto T_X\, {}^tP \in M_d(K \widehat{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}_S)$.

Comme nous le verrons (remarque 2.3.7), un produit analogue T_Y du côté Drinfeld possède –à une transposition près– les mêmes propriétés. C'est sur cette observation que reposera notre construction de l'isomorphisme des tours de Lubin-Tate et de Drinfeld –comme le lecteur l'aura sans doute deviné, cet isomorphisme identifiera les matrices $T_{\mathcal{LT}} = T_X$ et ${}^tT_{\mathcal{D}r} = {}^tT_Y$.

2.3. Côté Drinfeld. — Ce qui suit est simplement une reformulation des résultats du chapitre II et d'une partie du chapitre IV de [**G**]. Attention : certaines de nos notations et conventions diffèrent de celles utilisées dans [**G**] (par exemple, P y désigne la matrice que nous notons ici ${}^tP$).

On va d'abord utiliser la théorie du module de coordonnées pour réinterpréter le foncteur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ comme un problème de modules de chaînes de réseaux (voir [**G**], ch. I, variante 4.4.2).

Lorsque la base $S \in \mathrm{Nilp}\,\mathcal{O}$ est un $\breve{\mathcal{O}}$-schéma, le module de cordonnées M_Y du $\mathcal{O}_D$-module formel Y admet une graduation naturelle [(4)]

$$M_Y = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} M_{i,Y}\ , \text{ où } M_{i,Y} = \{m \in M_Y\ ;\ (1\otimes\lambda^{q^{i-1}})m = (\lambda\otimes 1)m\,,\ \forall\lambda\in\mathbb{F}_{q^d}\}.$$

On note que cette graduation dépend de la structure de $\breve{\mathcal{O}}$-schéma de S –il sera important de s'en souvenir lorsqu'on voudra écrire la donnée de descente de Weil.

Le Frobenius F_Y et l'élément $\Pi \in \mathcal{O}_D$ induisent des morphismes de degré 1

$$F_{i,Y} : {}^{\tau}M_{i,Y} \to M_{i+1,Y} \quad \text{et} \quad \Pi_{i,Y} : M_{i,Y} \to M_{i+1,Y}\ (i\in\mathbb{Z})$$

et la quasi-isogénie ρ induit une famille de morphismes

$$R_{i,Y_{S_0}} : M_{i,Y_{S_0}} \to K\otimes_{\mathcal{O}} M_{i,\mathbb{Y}_{S_0}}$$

compatibles aux Frobenius $F_{\bullet,Y_{S_0}}$ et $F_{\bullet,\mathbb{Y}_{S_0}}$ ainsi qu'aux morphismes de degré 1 $\Pi_{\bullet,Y_{S_0}}$ et $\Pi_{\bullet,\mathbb{Y}_{S_0}}$. Identifiant $M_{i,\mathbb{Y}}$ à $P^{-i}\mathcal{O}^d\,\widehat{\otimes}\,\overline{\mathbb{F}}_q$ (de sorte que le morphisme $\Pi_{\bullet,\mathbb{Y}}$ est l'inclusion évidente et que le Frobenius $F_{i,\mathbb{Y}}$ est le composé ${}^{\tau}(P^{-i}\mathcal{O}^d\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S) = P^{-i}\mathcal{O}^d\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S \hookrightarrow P^{-(i+1)}\mathcal{O}^d\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S$), cette condition de compatibilité s'écrit

$$R_{i,Y_{S_0}} = R_{i+1,Y_{S_0}}\circ\Pi_{i,Y}\ ,\ \ {}^{\tau}R_{i,Y_{S_0}} = R_{i+1,Y_{S_0}}\circ F_{i,Y}\ .$$

Comme du côté Lubin-Tate (prop. 2.2.1 et remarque 2.2.2) le système $R_{\bullet,Y_{S_0}}$ se relève de manière unique en un système $(R_{i,Y} : M_{i,Y} \to K^d\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S)_{i\in\mathbb{Z}}$ tel que $R_{i,Y} = R_{i+1,Y}\circ\Pi_{i,Y}$ et ${}^{\tau}R_{i,Y} = R_{i+1,Y}\circ F_{i,Y}$ (voir [**G**], ch. I prop. 4.4.1 pour une démonstration).

Identifiant $M_{i,Y}$ à son image par le morphisme $R_{i,Y}$ dans $K^d\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S$, l'ensemble $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}(S)$ se réinterprète alors comme l'ensemble des chaînes

$$\cdots \subsetneq M_{i,Y} \subsetneq M_{i+1,Y} \subsetneq \cdots \subsetneq K^d\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S$$

de $\mathcal{O}\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S$-réseaux dans $K^d\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S$ vérifiant

- (périodicité) pour tout $i\in\mathbb{Z}$, $M_{i+d,Y} = z^{-1}M_{i,Y}$ et $M_{i+1,Y}/M_{i,Y}$ est un $\mathcal{O}_S$-module inversible
- (2.1, 1.b) pour tout $i\in\mathbb{Z}$, ${}^{\tau}M_{i,Y}\subset M_{i+1,Y}$, le quotient $M_{i+1,Y}/{}^{\tau}M_{i,Y}$ est supporté (schématiquement) par le graphe de $S\to\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}$ et est localement libre de rang 1 sur ce graphe (c'est donc un $\mathcal{O}_S$-module inversible)
- (2.1, 1.c) Localement pour la topologie de Zariski sur S, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $i\in\mathbb{Z}$, ${}^{\tau^N}M_{i,Y}\subset zM_{i+N,Y}$.

[(4)] Le décalage ($i-1$ au lieu de i) est en fait commode –voir ci-dessous la description de $M_{i,\mathbb{Y}}$ ainsi que la description (2.3.1) des structures de niveau ; il sera en fait encore plus commode d'y penser comme un décalage de $d-1$.

La condition (2.1, 1.c) est en fait automatiquement vérifiée lorsque la condition de périodicité l'est. En effet, localement pour la topologie de Zariski sur S, il existe alors $m \in \mathbb{N}$ tel que $z^m \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S \subset M_i \subset z^{-m} \mathcal{O}^d \otimes \mathcal{O}_S$ et il suffit de prendre $N = 2m + 1$.

On va maintenant voir que cette interprétation du foncteur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}^r}$ permet de le plonger dans une ind-variété de drapeaux affine sur $\breve{\mathcal{O}}$ (au sens de [**BL**] , [**Fal2**] ou [**PS**]).

Le foncteur $\mathcal{D}$ associant à un $\breve{\mathcal{O}}$-schéma S l'ensemble des systèmes

$$\cdots \subsetneq M_i \subsetneq M_{i+1} \subsetneq \cdots \subsetneq K^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$$

de $\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$-réseaux dans $K^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ vérifiant la condition de périodicité ci-dessus est limite inductive de ses sous-foncteurs fermés $\mathcal{D}_N$ définis par

$$\mathcal{D}_N(S) = \{(M_i)_i \in \mathcal{D}(S); P^{N-i} \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S \subset M_i \subset P^{-N-i} \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S\}.$$

Ces sous-foncteurs fermés sont représentables par des $\breve{\mathcal{O}}$-schémas et $\mathcal{D}$ est donc un $\breve{\mathcal{O}}$-ind-schéma.

On rappelle maintenant comment l'ind-variété de drapeaux $\mathcal{D}$ s'écrit comme un quotient de groupes de lacets. Lorsque $(M_i)_i \in \mathcal{D}(S)$ est un tel système, localement pour la topologie de Zariski sur S, il existe une base $(r_i)_{1 \leq i \leq d}$ de $K^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S$ telle que

$$M_i = z^{-1}(\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S) r_1 \oplus \cdots \oplus z^{-1}(\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S) r_i \oplus (\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S) r_{i+1} \oplus \cdots \oplus (\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S) r_d$$

pour $0 \leq i \leq d$, ou, de manière équivalente, telle qu'en notant R la matrice ayant pour colonnes les vecteurs r_i, on ait $M_i = RP^{-i}(\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)$.

Remarque 2.3.1. — Appliqué au système de morphismes $R_{i,Y}$ comme ci-dessus ceci signifie simplement que, localement pour la topologie de Zariski sur S, on peut choisir des bases des $M_{i,Y}$ telles que la matrice de $\Pi_{i,Y} : M_{i,Y} \hookrightarrow M_{i+1,Y}$ soit P et que par conséquent la matrice (encore notée R_i) du morphisme R_i soit $R_0 P^{-i}$.

L'ind-variété de drapeaux $\mathcal{D}$ s'écrit donc comme le quotient de groupes de lacets $\underline{\mathrm{GL}_d(K)} / \underline{\mathcal{B}^\times}$, où $\underline{\mathrm{GL}_d(K)}$ est l'$\breve{\mathcal{O}}$-ind-schéma en groupes tel que $\underline{\mathrm{GL}_d(K)}(S) = \mathrm{GL}_d(K \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)$ (limite inductive de ses sous-schémas fermés $\underline{\mathrm{GL}_d(K)}_N$ définis par $\underline{\mathrm{GL}_d(K)}_N(S) = \{R \in \underline{\mathrm{GL}_d(K)}(S); R \in z^{-N} M_d(\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)$ et $R^{-1} \in z^{-N} M_d(\mathcal{O} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)\})$ et $\underline{\mathcal{B}^\times}$ est le $\breve{\mathcal{O}}$-schéma en groupes tel que $\underline{\mathcal{B}^\times}(S) = (\mathcal{B} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)^\times$.

La condition (2.1, 1.b) définit $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}^r}$ comme un sous-foncteur localement fermé de $\mathcal{D}$ (ou, plus précisément, de la restriction $\mathcal{D} \times_{\mathrm{Spec}\, \breve{\mathcal{O}}} \mathrm{Spf}\, \breve{\mathcal{O}}$ de $\mathcal{D}$ à $\mathrm{Nilp}\, \breve{\mathcal{O}}$) , qu'on va maintenant expliciter en suivant [**G**].

Indices critiques. — Soit $S \in \mathrm{Nilp}\,\breve{\mathcal{O}}$ un $\breve{\mathcal{O}}$-schéma intègre sur lequel l'image de π est nulle. Lorsque $(M_i)_i \in \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}(S)$, le morphisme composé

$$M_0/{}^\tau M_{-1} \to M_1/{}^\tau M_0 \to \cdots \to M_d/{}^\tau M_{d-1} = M_0/{}^\tau M_{-1}\,,$$

qui est la multiplication par π, est nul. L'un au moins des morphismes de $\mathcal{O}_S$-modules inversibles $M_i/{}^\tau M_{i-1} \to M_{i+1}/{}^\tau M_i$ est donc nul et pour un tel i on a donc $M_i = {}^\tau M_i$. Le réseau M_i est donc définissable sur $\mathbb{F}_q$, en ce sens qu'il existe un $\mathcal{O}$-réseau $\Lambda \subset K^d$ tel que $M_i = \Lambda \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}_S$.

Soit $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0,(\Lambda,i)}$ le sous-foncteur fermé de la fibre spéciale $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0}$ de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ défini par $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0,(\Lambda,i)}(S) = \{(M_j \subset K^d \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}_S)_j \in \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}(S); M_i = \Lambda \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}_S\}$ pour tout $S \in \mathrm{Nilp}\,\breve{\mathcal{O}}$. La fibre spéciale $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0}$ est alors « réunion » des $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0,(\Lambda,i)}$ au sens où $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}(S) = \bigcup_{(\Lambda,i)} \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0,(\Lambda,i)}$ pour tout schéma intègre (et en particulier, tout spectre de corps) $S \in \mathrm{Nilp}\,\breve{\mathcal{O}}$.

En fait, les foncteurs $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0,(\Lambda,i)}$ sont représentables par des $\overline{\mathbb{F}}_q$-schémas intègres (isomorphes au schéma obtenu en éclatant $\mathbb{P}^{d-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ le long de ses points $\mathbb{F}_q$-rationnels, puis des transformés stricts de ses droites $\mathbb{F}_q$-rationnelles, puis… , voir [**G**, II.1]) et apparaîtront rétrospectivement comme les composantes irréductibles de la fibre spéciale de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$.

Sous-foncteurs ouverts associés aux simplexes de l'immeuble étendu de $\mathrm{GL}_d(K)$. — Soit $\underline{\Lambda}$ un simplexe de l'immeuble étendu de $\mathrm{GL}_d(K)$. La donnée du simplexe $\underline{\Lambda}$ est équivalente à celle

- d'une partie $I(\underline{\Lambda})$ de $\mathbb{Z}$ qui est périodique de période d (c'est-à-dire invariante sous la translation $i \mapsto i + d$)
- d'une suite strictement croissante $(\Lambda_i \subset K^d)_{i \in I(\underline{\Lambda})}$ de réseaux telle que $\Lambda_{i+d} = \pi^{-1}\Lambda_i, \forall i \in I(\underline{\Lambda})$ et qu'il existe un entier $h(\underline{\Lambda})$ tel que $[\Lambda_i : \mathcal{O}^d] = i + h(\underline{\Lambda}), \forall i \in I(\underline{\Lambda})$.

En effet, la donnée ci-dessus définit visiblement un simplexe de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_d(K)$, ne dépendant que de son orbite sous l'opération de décalage de la numérotation

$$I(\underline{\Lambda}) \mapsto I(\underline{\Lambda}) + 1 \quad \text{et} \quad (\Lambda_i)_{i \in I(\underline{\Lambda})} \mapsto (\Lambda_{i-1})_{i \in I(\underline{\Lambda})+1},$$

et définit aussi comme on l'a vu un entier $h(\underline{\Lambda})$. On note qu'avec cette écriture des simplexes de l'immeuble étendu on a $\underline{\Lambda} \cap \underline{\Lambda}' = (\Lambda_i)_{\{i \in I(\underline{\Lambda}) \cap I(\underline{\Lambda}'); \Lambda_i = \Lambda'_i\}}$.

On associe à tout simplexe $\underline{\Lambda}$ de l'immeuble étendu le sous-foncteur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\underline{\Lambda}}$ de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ obtenu comme intersection de tous les ouverts complémentaires des fermés $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0,(\Lambda,i)}$, où (Λ, i) parcourt l'ensemble $\mathcal{C}(\underline{\Lambda})$ des couples formés d'un réseau Λ et d'un entier i tels que $i \notin I(\underline{\Lambda})$ ou que $\Lambda \neq \Lambda_i$.

Cette intersection n'est pas une intersection finie mais ceci définit cependant un sous-foncteur ouvert de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$. Pour le vérifier, il suffit d'établir que pour tout

$S \in \mathrm{Nilp}\,\mathcal{O}$ et tout $M_\bullet \in \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}(S) \subset \mathcal{D}(S)$, le produit fibré de foncteurs $S \times_{\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}} \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0,(\Lambda,i)}$ n'est non-vide que pour un nombre fini d'orbites $\{(\pi^{-j}\Lambda, i+jd); j \in \mathbb{Z}\}$. Comme il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $M_\bullet$ appartienne en fait à $\mathcal{D}_N(S) = \{(M_i)_i \in \mathcal{D}(S); P^{N-i}\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S \subset M_i \subset P^{-N-i}\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S\}$, ceci résulte du fait que le fermé $\mathcal{D}_N \cap \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0,(\Lambda,i)}$ de $\mathcal{D}$ n'est non-vide que pour un nombre fini d'orbites $\{(\pi^{-j}\Lambda, i+jd); j \in \mathbb{Z}\}$.

Pour pouvoir énoncer le théorème de représentabilité explicite pour $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$, on a encore besoin de faire une remarque. On considère d'abord la $\breve{\mathcal{O}}$-algèbre A_Φ complétée π-adique de

$$\breve{\mathcal{O}}[(y_i)_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}]/(y_1\cdots y_d - (-1)^d\pi)$$

et le système d'équations

$$(\mathcal{E}_{i,j}) \qquad r_{i,j+1}^q - r_{i,j+1} = y_i r_{i+1,j} \quad (i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}, r_{i,0} = 1).$$

à coefficients dans A_Φ associées à l'égalité $R_Y\Phi_Y = {}^\tau R_Y$, où l'on note [5]

$$\Phi_Y = \mathrm{Id}_d + P^{-1}\,\mathrm{diag}(y_i)_{1\le i\le d}$$
$$\text{et} \qquad R_Y = \textstyle\sum_{j\in\mathbb{N}} P^{-j}\,\mathrm{diag}(r_{i,j})_i = \mathrm{Id}_d + \sum_{j\ge 1} P^{-j}\,\mathrm{diag}(r_{i,j})_i\,.$$

On considère maintenant la $\breve{\mathcal{O}}$-algèbre $A_{\mathcal{D}r}$ complétée π-adique de

$$A_\Phi[(r_{i,j})_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j\in\{0,\cdots,d-1\}}, (1-r_{i,j}^{q-1})^{-1}_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j\in\{1,\cdots,d-1\}}]/\mathcal{E}$$

où $\mathcal{E}$ est l'idéal engendré par $r_{i,0}-1$ pour $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et par $r_{i,j+1}^q - r_{i,j+1} - y_i r_{i+1,j}$ pour $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et $0 \le j \le d-2$. Le système d'équations $(\mathcal{E}_{i,j})_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j\ge d-1}$ à coefficients dans $A_{\mathcal{D}r}$ admet alors une unique solution $(r_{i,j} \in \pi A_{\mathcal{D}r})_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j\ge d}$, comme on le voit en remarquant que $y_i r_{i+1,d-1} = (-1)^{d-2}[(1-r_{i+1,d-1}^{q-1})(1-r_{i+2,d-2}^{q-1})\cdots(1-r_{i+d-1,1}^{q-1})]^{-1}(y_i y_{i+1}\cdots y_{i+d-1}) \in \pi A_{\mathcal{D}r}$ et que pour tout $a \in \pi A_{\mathcal{D}r}$, l'équation $r^q - r = a$ a comme unique solution $r = -a - a^q - a^{q^2} - \cdots$ dans $\pi A_{\mathcal{D}r}$.

Pour $j \ge nd$, on a en fait $r_{i,j} \in \pi^n A_{\mathcal{D}r}$ comme il résulte de la formule

$$r_{i,j} = (-1)^j \frac{(y_i\cdots y_{i+d-1})^n y_{i+nd}\cdots y_{i+j-1}}{(1-r_{i,j}^{q-1})(1-r_{i+1,j-1}^{q-1})\cdots(1-r_{i+j-1,1}^{q-1})}\,.$$

La matrice $R_Y = \sum_{j\in\mathbb{N}} P^{-j}\,\mathrm{diag}(r_{i,j})_i$ appartient donc au complété π-adique de $\mathrm{Id}_d + P^{-1}\,\mathrm{diag}(A_{\mathcal{D}r}^d)[P^{-1}]$. En particulier, cette matrice est donc à coefficients dans

[5] Par souci d'uniformité (voir le théorème 2.2.1) on rétablit les indices Y qu'on avait abandonnés à partir du pragraphe consacré aux indices critiques. Il peut sembler fantaisiste de noter les matrices diagonales *à droite* des puissances de P ; cette convention est cependant la plus commode. Les variables $r_{i,j}$ qui apparaissent ici ne sont pas celles figurant dans l'énoncé du théorème 2.2.1. En toute rigueur il faudrait donc noter $r_{i,j}^{\mathcal{LT}}$ et $r_{i,j}^{\mathcal{D}r}$ pour distinguer les deux jeux de variables... En pratique, sauf dans la section 4 où on utilisera cette notation, le contexte permettra de les distinguer et on s'en dispensera.

le complété π-adique de $A_{\mathcal{D}r}[z^{-1}]$ et *a fortiori* dans le complété π-adique $K \widehat{\widehat{\otimes}} A_{\mathcal{D}r}$ de $K \widehat{\otimes} A_{\mathcal{D}r}$.

Le théorème suivant décrit alors explicitement le schéma formel ind-représentant le foncteur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ et l'objet universel au-dessus de ce schéma formel.

Théorème 2.3.2. — *– 1) L'élément $\gamma \in \mathrm{GL}_d(K)$ envoie le sous-foncteur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\underline{\Lambda}}$ sur le sous-foncteur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\gamma\underline{\Lambda}}$.*

- *2) Si $\underline{\Lambda}$ et $\underline{\Lambda}'$ sont deux simplexes de l'immeuble étendu de $\mathrm{GL}_d(K)$, l'intersection $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\underline{\Lambda}} \cap \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\underline{\Lambda}'}$ est $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\underline{\Lambda}\cap\underline{\Lambda}'}$ (et est vide si $\underline{\Lambda} \cap \underline{\Lambda}'$ est vide).*
- *3) Les sous-foncteurs ouverts $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\underline{\Lambda}}$ ($\underline{\Lambda}$ décrivant l'ensemble des simplexes de l'immeuble étendu de $\mathrm{GL}_d(K)$, ou même, l'ensemble de ses simplexes maximaux) forment un recouvrement ouvert de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$.*
- *4) Le foncteur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}$ associé au simplexe maximal $P^{-\bullet}\mathcal{O}^d = (P^{-i}\mathcal{O}^d)_{i\in\mathbb{Z}}$ est ind-représenté par $\mathrm{Spf}\, A_{\mathcal{D}r}$ muni de l'objet universel $(M_{i,Y} = R_Y P^{-i}\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} A_{\mathcal{D}r})_{i\in\mathbb{Z}}$.*
- *5) Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, le sous-schéma formel ouvert $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_i}$ de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}$ associé au sous-simplexe $(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_i$ de $P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$ obtenu en lui enlevant les sommets $P^{-i+nd}\mathcal{O}^d$ ($n \in \mathbb{Z}$) est l'ouvert complémentaire du fermé d'équation $y_i = 0$ de $\mathrm{Spf}\, A_{\mathcal{D}r} = \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}$.*

Cet énoncé rassemble la proposition 2.1.3, les théorèmes 2.3.1, et 3.3.1 et les propositions 4.1 et 4.3.1 du chapitre II de [**G**]. Le point de vue utilisé dans [**G**] n'est pas exactement celui qu'on a adopté ici. Pour le confort du lecteur on donnera donc une démonstration de ce théorème, qui diffèrera d'ailleurs un peu de la démonstration figurant dans [**G**].

Auparavant, on va expliciter le $\mathcal{O}_D$-module formel Y et la quasi-isogénie ρ correspondant au module de coordonnées gradué $(M_{i,Y} \subset K^d \widehat{\widehat{\otimes}} A_{\mathcal{D}r})$ universel sur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}$ –ce corollaire ne servira en fait pas dans la suite mais il est agréable de pouvoir exprimer « concrètement » le couple (Y, ρ).

Corollaire 2.3.3. — *La restriction à $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}$ du $\mathcal{O}_D$-module formel universel Y sur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ est caractérisée par*

- *$Y = \widehat{\mathbb{G}}_a^d$ en tant que groupe formel*
- *$Y(\lambda) = \mathrm{diag}(\lambda, \cdots, \lambda^{q^{d-1}})$ pour $\lambda \in \mathbb{F}_{q^d}$*
- *$Y(\Pi) = -\mathrm{diag}(y_i)_{1\leq i\leq d}\, C + \tau \mathrm{Id}_d$*

où l'on note

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et la restriction de la quasi-isogénie ρ universelle est

$$\rho = \mathrm{Id}_d + \sum_{1 \leq j \leq d-1} \mathrm{diag}(r_{i,j})_i \, \tau^{-j} C^j \quad (\textit{modulo } \pi).$$

Avant de démontrer le théorème 2.3.2, on va encore introduire trois ouverts de la grassmannienne affine $\mathcal{D}$.

Pour définir le premier ouvert, on note $\underline{U}^-$ l'$\breve{\mathcal{O}}$-ind-schéma en groupes défini par

$$\underline{U}^-(S) = (\mathrm{Id}_d + P^{-1}\,\mathrm{diag}(\mathcal{O}_S^d)[P^{-1}])^\times$$

pour tout $\breve{\mathcal{O}}$-schéma S. Le stabilisateur de $P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$ dans $\underline{U}^-$ est trivial et l'orbite $\underline{U}^- \cdot P^{-\bullet}\mathcal{O}^d \simeq \underline{U}^-$ de $P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$ sous $\underline{U}^-$ est un ouvert de $\mathcal{D}$, analogue aux « grosses cellules de Schubert opposées » des variétés de drapeaux usuelles [(6)]. On peut aussi caractériser cet ouvert $\underline{U}^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$ de la manière suivante. On considère la chaîne de co-réseaux $(z^{-1}P^{-i}\mathcal{O}_S[z^{-1}]^d \subset K^d \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{O}_S)_{i\in\mathbb{Z}}$; la partie $(\underline{U}^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)(S) \subset \mathcal{D}(S)$ est alors celle constituée des chaînes de réseaux $(M_i \subset K^d \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{O}_S)_{i\in\mathbb{Z}}$ transverses à la chaîne de co-réseaux $(z^{-1}P^{-i}\mathcal{O}_S[z^{-1}]^d)_{i\in\mathbb{Z}}$ (c'est à dire, telles que $M_i \cap z^{-1}P^{-i}\mathcal{O}_S[z^{-1}]^d$ et que $M_i \oplus z^{-1}P^{-i}\mathcal{O}_S[z^{-1}]^d = K^d \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{O}_S$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$). Le lien entre les deux points de vue provient du fait que le $\mathcal{O}_S$-module $M_i \cap z^{-1}P^{-i+1}\mathcal{O}_S[z^{-1}]^d$ (qui est libre de rang 1 car il s'identifie à son projeté sur M_i parallèlement à $z^{-1}P^{-i}\mathcal{O}_S[z^{-1}]^d$, qui est $z^{-1}P^{-i+1}\mathcal{O}_S[z^{-1}]^d / z^{-1}P^{-i}\mathcal{O}_S[z^{-1}]^d$) n'est autre que celui engendré par $RP^{-i}e_1$ (où l'on note bien sûr $(e_1, \cdots, e_d)$ la base canonique de K^d), ce qui permet de « retrouver » la matrice R sous l'hypothèse de transversalité.

Le deuxième ouvert n'est autre que l'intersection $\bigcap_{\gamma\in\mathcal{B}^\times} \gamma\underline{U}^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$. Pour vérifier que c'est en fait un ouvert de $\mathcal{D}$ on remarque que $\mathcal{D}_N \cap \gamma\underline{U}^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$ ne dépend en fait que de $\gamma \in (\mathcal{B}/P^{2N}\mathcal{B})^\times$. L'intersection $\mathcal{D}_N \cap \bigcap_{\gamma\in\mathcal{B}^\times} \gamma\underline{U}^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$ est donc un ouvert de $\mathcal{D}_N$ et $\bigcap_{\gamma\in\mathcal{B}^\times} \gamma\underline{U}^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$ est alors un ouvert de $\mathcal{D} = \varinjlim_{N\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_N$.

Le troisième ouvert $(U^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)[(1 - r_{i,j}^{q-1})^{-1}_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j\geq 1}]$ est l'intersection des ouverts $(U^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)[(1 - r_{i,j}^{q-1})^{-1}_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}]$, $(j \geq 1)$ –c'est un ouvert, puisque là encore

(6) L'analogie deviendra encore plus évidente dans le paragraphe 5.3, où on représentera les éléments de $\underline{\mathrm{GL}_d(K)}$ comme des matrices infinies –celles associées aux éléments de $\underline{\mathcal{B}^\times}$ seront triangulaires supérieures et celles associées aux éléments de $\underline{U}^-$ seront triangulaires inférieures de diagonale principale la matrice Id_∞.

l'intersection $\bigcap_{j\geq 1}(\mathcal{D}_N \cap (U^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)[(1-r_{i,j}^{q-1})^{-1}_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}])$ est en fait une intersection finie.

Démonstration du théorème 2.3.2. — Les deux premiers points du théorème sont triviaux. Le troisième point résulte simplement du fait que pour toute extension k de $\overline{\mathbb{F}}_q$ (considérée comme une $\breve{\mathcal{O}}$-algèbre de la manière évidente) et tout point $M_\bullet$ de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ à valeurs dans k, le point $M_\bullet$ appartient au simplexe $(M_i)_{i\in I_{\mathrm{crit}}}$ de l'immeuble étendu, où I_{crit} désigne l'ensemble des indices critiques de $M_\bullet$ (et où, par abus de notation, on a considéré les réseaux critiques M_i comme des réseaux dans K^d).

Pour vérifier les deux derniers points on va commencer par démontrer le lemme suivant (voir aussi [**G**], ch. II, prop. 2.5.1 et 2.6.1).

Lemme 2.3.4. — *Le plongement de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ dans $\mathcal{D}$ identifie $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}$ à l'image inverse de l'ouvert $\bigcap_{\gamma\in\mathcal{B}^\times}\underline{U}^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$ de $\mathcal{D}$.*

En fait, on n'utilisera que l'inclusion $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d} \subset \bigcap_{\gamma\in\mathcal{B}^\times}\underline{U}^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$, mais il est agréable de constater que cette inclusion est une égalité.

Démonstration. — Bien entendu, il suffit de démontrer que pour toute extension k de $\overline{\mathbb{F}}_q$ on a $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}(k) = \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0}(k)\cap\bigcap_{\gamma\in\mathcal{B}^\times}(\underline{U}^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)(k)$.

On vérifie d'abord l'inclusion

$$\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}(k) \subset \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0}(k)\cap\bigcap_{\gamma\in\mathcal{B}^\times}(\underline{U}^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)(k)\ ;$$

comme $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}(k)$ est stable par $\mathcal{B}^\times$ il suffit en fait d'établir que $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}(k) \subset (\underline{U}^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)(k)$.

Soient $M_{\bullet,Y}\in\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}(k)$ et $\ell\in\mathbb{Z}$. On se propose de démontrer que $M_{\ell,Y}$ est tranverse à $P^{-\ell}(z^{-1}k[z^{-1}]^d)$ dans $k((z))^d = K^d\,\widehat{\otimes}\,k$. Si ℓ est critique on a $M_{\ell,Y} = P^{-\ell}\mathcal{O}^d\widehat{\otimes}k$ et la transversalité est évidente. Sinon on note $i\in\mathbb{Z}$ le plus grand indice critique inférieur à ℓ et $i'\in\mathbb{Z}$ le plus petit indice critique supérieur à ℓ. On a donc $M_{i,Y} = P^{-i}\mathcal{O}^d\widehat{\otimes}k$ et $M_{i',Y} = P^{-i'}\mathcal{O}^d\widehat{\otimes}k$. Pour tout $j\in\mathbb{Z}$, on note $E'_j = P^{-j+1}e_1$; la famille $z^{-1}E'_{i+1},\dots,z^{-1}E'_{i'}$ est alors une base de $M_{i',Y}/M_{i,Y}$ sur k (la notation E'_j provient en fait d'un paragraphe ultérieur, *cf.* 5.3). Soit $x = x_{i+1}E'_{i+1}+\cdots+x_{i'}E'_{i'}$ un vecteur non nul de la droite vectorielle $M_{i+1,Y}/M_{i,Y}$. Comme i' est le plus petit indice critique supérieur à i, les vecteurs x, ${}^{\tau}x = x_{i+1}^q E'_{i+1}+\cdots+x_{i'}^q E'_{i'}$, $\cdots$, ${}^{\tau^{i'-i-1}}x$ sont linéairement indépendants sur k –si ce n'était pas le cas ils engendreraient un sous-espace propre invariant par τ de $M_{i',Y}/M_{i,Y}$ et i' ne serait donc pas le premier indice critique supérieur à ℓ.

En considérant le déterminant de Moore de x, qui est celui de la matrice ayant pour vecteurs-colonnes les vecteurs x, ${}^{\tau}x$, $\cdots$, ${}^{\tau^{i'-i-1}}x$, on vérifie de manière élémentaire que les vecteurs x, ${}^{\tau}x$, $\cdots$, ${}^{\tau^{i'-i-1}}x$ sont linéairement indépendants sur

k si et seulement si les éléments $x_{i+1}, \cdots, x_{i'}$ de k sont linéairement indépendants sur $\mathbb{F}_q$. Pour plus de précisions, voir le paragraphe 5.1.2 consacré aux déterminants de Moore ; on note $\mathrm{Moore}(x_{i+1}, \cdots, x_{i'})$ ce déterminant de Moore.

En particulier, $x_{i+1}, ..., x_\ell$ sont donc indépendants sur $\mathbb{F}_q$ et $\mathrm{Moore}(x_{i+1}, ..., x_\ell)$ n'est donc pas nul. Le k-espace vectoriel $M_{\ell,Y}/M_{i,Y}$ est donc transverse à

$$\mathrm{Vect}\,(z^{-1}E'_{\ell+1}, ..., z^{-1}E'_{i'}) = P^{-\ell}(z^{-1}k[z^{-1}]^d)/P^{-i'}(z^{-1}k[z^{-1}]^d)$$

dans $M_{i',Y}/M_{i,Y}$; par conséquent $M_{\ell,Y}$ est bien transverse à $P^{-\ell}(z^{-1}k[z^{-1}]^d)$, comme on voulait le vérifier.

Pour établir l'autre inclusion

$$\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}(k) \supset \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0}(k) \cap \Big(\bigcap_{\gamma\in\mathcal{B}^\times} \underline{U}^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d\Big)(k)\,,$$

il suffit de démontrer que si $M \subset K^d = \mathbb{F}_q((z))^d$ est un réseau transverse à tous les co-réseaux $\gamma z^{-1}P^{-i}\mathbb{F}_q[z^{-1}]^d$ (où γ parcourt $\mathcal{B}^\times$ et $i = [M : \mathcal{O}^d]$) on a $M = P^{-i}\mathcal{O}^d$, puis d'appliquer cet énoncé aux indices critiques.

Pour cela, on remarque que lorsque $M \subset K^d$ un réseau, il existe un appartement de l'immeuble de $\mathrm{PGL}_d(K)$ contenant à la fois le sommet M et le simplexe $P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$; il existe donc un élément γ de $\mathcal{B}^\times$ tel que $\gamma^{-1}M$ soit dans l'appartement « standard » associé au tore des matrices diagonales. Pour cet élément γ on a donc $\gamma^{-1}(M_i) = \bigoplus_{j=1}^d z^{-n_j}\mathcal{O}e_j$ (où les n_j sont dans $\mathbb{Z}$). Lorsque le réseau M est transverse à $\gamma z^{-1}P^{-i}\mathbb{F}_q[z^{-1}]^d$ (où $i = [M : \mathcal{O}^d] = n_1 + \cdots + n_d$) le réseau $\gamma^{-1}M = \bigoplus_{j=1}^d z^{-n_j}\mathcal{O}e_j$ est alors transverse à $z^{-1}P^{-i}\mathbb{F}_q[z^{-1}]^d$. Ceci n'est possible que pour $\gamma^{-1}M = P^{-i}\mathcal{O}^d$; on a donc bien $M = P^{-i}\mathcal{O}^d$, ce qui achève la démonstration du lemme. □

On va maintenant étudier l'intersection de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ avec l'ouvert $\underline{U}^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$. Soient $S \in \mathrm{Nilp}\,\breve{\mathcal{O}}$ et $(M_{i,Y})_i \in \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}(S) \cap (\underline{U}^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)(S)$. Le point $(M_{i,Y})_i$ est alors de la forme $(R_Y P^{-i}\mathcal{O}^d \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}_S)_i$ où la matrice (uniquement déterminée)

$$R_Y = \mathrm{Id}_d + \sum_{j\geq 1} P^{-j}\,\mathrm{diag}(r_{i,j})_{1\leq i\leq d} \in \underline{U}^-(S)$$

vérifie

– $\Phi_Y := R_Y^{-1}\,{}^\tau R_Y \in P^{-1}\mathcal{B} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}_S$ (ceci traduit le fait que ${}^\tau M_{i,Y} \subset M_{i+1,Y}, \forall i \in \mathbb{Z}$)

– $\det \Phi_Y \in (z-\pi)(\mathcal{O} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}_S)^\times$ (ceci traduit le fait que $\mathcal{M}_{i+1,Y}/\,{}^\tau M_{i,Y}$ est annulé par $z-\pi$ et est un module inversible sur son support $V(z-\pi), \forall i \in \mathbb{Z}$)

Il résulte de la première condition que $\Phi_Y \in \underline{U}^-(S) \cap P^{-1}\mathcal{B} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}_S$ est de la forme $\mathrm{Id}_d + P^{-1}\,\mathrm{diag}(y_i)_i$ et de la deuxième que $y_1 \cdots y_d = (-1)^d\pi$. On retrouve alors le système d'équations $(\mathcal{E}_{i,j}\,,\ i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}\,,\ j \geq 0)$ associé à l'égalité $R_Y\Phi_Y = {}^\tau R_Y$ qu'on a introduit avant l'énoncé du théorème 2.3.2.

Plus précisément, on remarque que $\mathrm{Spf}\,A_{\mathcal{D}r}$ n'est autre que

$$\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r} \cap (U^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)[(1 - r_{i,j}^{q-1})^{-1}_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j\geq 1}]$$

(et que l'objet universel sur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r} \cap (U^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)[(1-r_{i,j}^{q-1})^{-1}_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j\geq 1}]$ coïncide avec celui introduit plus haut sur Spf $A_{\mathcal{D}r}$). Pour achever la démonstration du quatrième point du théorème, il suffira donc de vérifier l'égalité de sous-foncteurs ouverts $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r, P^{-\bullet}\mathcal{O}^d} = \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r} \cap (U^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)[(1-r_{i,j}^{q-1})^{-1}_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j\geq 1}]$ dans $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r} \cap \underline{U}^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$.

On va maintenant exprimer certaines des conditions ouvertes associées à l'ouvert $\bigcap_{\gamma\in\mathcal{B}^\times} \underline{U}^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$. Le lemme suivant fournit de telles conditions.

Lemme 2.3.5. — *Sur l'ouvert $\bigcap_{\gamma\in\mathcal{B}^\times} \underline{U}^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$ de $P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$ les fonctions $1-r_{i,j}^{q-1}$ sont inversibles pour $i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et $1\leq j\leq d-1$.*

Démonstration. — On va établir que pour $\lambda\in\mathbb{F}_q^\times, i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et $1\leq j\leq d-1$, la fonction $1-\lambda r_{i,j}$ est en fait inversible sur l'ouvert

$$(\mathrm{Id}_d + P^{-i+1}\operatorname{diag}(\lambda,0,\cdots,0)P^{i+j-1})\underline{U}^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d \cap \underline{U}^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$$

de $\underline{U}^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$. En combinant l'action de P^{-i} et le décalage de $-i$ il suffit de le faire pour $i=1$.

Pour cela, on se donne un point $M_\bullet = RP^{-\bullet}\mathcal{O}^d \mathbin{\widehat{\otimes}} k$ de cet ouvert à valeurs dans une extension k de $\overline{\mathbb{F}}_q$ (et on note bien entendu $R = \mathrm{Id}_d + \sum_{j\geq 1} P^{-j}\operatorname{diag}(r_{i,j})_i$). On va alors étudier la condition de transversalité de M_1 et de $(\mathrm{Id}_d + \operatorname{diag}(\lambda,0,\cdots,0)P^j)P^{-1}z^{-1}k[z^{-1}]^d$.

On remarque qu'on a l'inclusion $(\mathrm{Id}_d + \operatorname{diag}(\lambda,0,\cdots,0)P^j)P^{-1}z^{-1}k[z^{-1}]^d \subset z^{-1}k[z^{-1}]^d$. L'intersection de M_1 avec $z^{-1}k[z^{-1}]^d$ n'est autre que la droite kRe_1. On va chercher à quelle condition cette droite est incluse dans $(\mathrm{Id}_d + \operatorname{diag}(\lambda,0,\cdots,0)P^j)P^{-1}z^{-1}k[z^{-1}]^d$.

La matrice $P^{j+1}\operatorname{diag}(\lambda,0,\cdots,0)P^{-1} = P^j\operatorname{diag}(0,\cdots,0,\lambda)$ a comme seul coefficient non nul λ, situé sur la dernière colonne et la $(d-j)$-ème ligne ; on a donc $(\mathrm{Id}_d + P^{j+1}\operatorname{diag}(\lambda,0,\cdots,0)P^{-1})k[z^{-1}]^d = k[z^{-1}]^d$. La matrice $\mathrm{Id}_d + \operatorname{diag}(\lambda,0,\cdots,0)P^j$ préserve donc $P^{-1-j}z^{-1}k[z^{-1}]^d$, si bien qu'on a

$$P^{-1-j}z^{-1}k[z^{-1}]^d \subset (\mathrm{Id}_d + \operatorname{diag}(\lambda,0,\cdots,0)P^j)P^{-1}z^{-1}k[z^{-1}]^d .$$

Par ailleurs, le co-réseau $(\mathrm{Id}_d + \operatorname{diag}(\lambda,0,\cdots,0)P^j)P^{-1}z^{-1}k[z^{-1}]^d$ contient les vecteurs $P^{-1-d}e_1,\cdots,P^{-j-d+1}e_1$.

On est alors ramené à étudier l'intersection dans le plan

$$z^{-1}k[z^{-1}]^d/(P^{-1-j}z^{-1}k[z^{-1}]^d \oplus kP^{-1-d}e_1 \oplus\cdots\oplus kP^{-j-d+1}e_1)$$

des droites images de kRe_1 et de $(\mathrm{Id}_d + \operatorname{diag}(\lambda,0,\cdots,0)P^j)P^{-1}z^{-1}k[z^{-1}]^d$. Une base de ce plan est formée des images de e_1 et $P^{-j}e_1$; ces deux droites s'écrivent respectivement $k(e_1 + r_{i,j}P^{-j}e_1)$ et $k(\lambda e_1 + P^{-j}e_1)$ modulo $(P^{-1-j}z^{-1}k[z^{-1}]^d \oplus kP^{-1-d}e_1 \oplus\cdots\oplus kP^{-j-d+1}e_1)$ si bien que la condition de transversalité cherchée est bien $1-\lambda r_{1,j}\neq 0$. □

Il reste donc finalement à démontrer que les deux sous-foncteurs ouverts $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r, P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}$ et $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r} \cap (U^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)[(1-r_{i,j}^{q-1})^{-1}_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j\geq 1}]$ de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r} \cap \underline{U}^- P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$ coïncident et à vérifier le cinquième point du théorème.

Pour cela on se donne une extension k de $\overline{\mathbb{F}}_q$ et on va successivement vérifier les inclusions $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}(k) \subset \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r} \cap (U^-P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)[(1-r_{i,j}^{q-1})^{-1}_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z},j\geq 1}]$ et $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}(k) \supset \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r} \cap (U^-P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)[(1-r_{i,j}^{q-1})^{-1}_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z},j\geq 1}](k)$; en vérifiant la deuxième inclusion on obtiendra aussi une démonstration du point 5.

Soient $M_\bullet = RP^{-\bullet}\mathcal{O}^d \in \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}(k)$ et $P^{-i}\mathcal{O}^d$ un réseau critique de $M_\bullet$. Les réseaux M_j ($j-d \leq j \leq i$) vérifient les inclusions $zP^{-i}\mathcal{O}^d\widehat{\otimes}k \subset M_j \subset P^{-i}\mathcal{O}^d\widehat{\otimes}k$ et *a fortiori* les inclusions $P^{-j+d-1}\mathcal{O}^d\widehat{\otimes}k \subset M_j \subset P^{-j-d+1}\mathcal{O}^d\widehat{\otimes}k$. Les éléments $r_{i,j}$ associés à la matrice R sont donc nuls pour $j \geq d$, ce qui démontre que $RP^{-\bullet}\mathcal{O}^d$ est un point de l'ouvert $(U^-P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)[(1-r_{i,j}^{q-1})^{-1}_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z},j\geq 1}]$.

Soient $M_\bullet = RP^{-\bullet}\mathcal{O}^d$ un point de $\operatorname{Spf} A_{\mathcal{D}r}(k) = \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r} \cap (U^-P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)[(1-r_{i,j}^{q-1})^{-1}_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z},j\geq 1}]$ et $i \in \mathbb{Z}$. L'indice i est critique si et seulement si la matrice Φ associée à ce point appartient à $P^{-i}M_d(\mathcal{O}\,\widehat{\otimes}\,k)P^i$. On vérifie aisément que cette dernière condition équivaut à $y_i = 0$; il reste donc seulement à vérifier que le réseau critique est bien $P^{-i}\mathcal{O}^d$. Ceci résulte de la formule

$$r_{\ell,j} = (-1)^j[(1-r_{\ell,j}^{q-1})(1-r_{\ell+1,j-1}^{q-1})\cdots(1-r_{\ell+j-1,1}^{q-1})]^{-1}y_\ell\cdots y_{\ell+j-1}$$

qui entraîne les égalités $r_{\ell,j} = 0$ pour $i-j+1 \leq \ell \leq i$, desquelles il suit que la matrice R appartient à $P^{-i}M_d(k)P^i \subset P^{-i}M_d(\mathcal{O}\,\widehat{\otimes}\,k)P^i$ et que le réseau critique $M_i = RP^{-i}\mathcal{O}^d\,\widehat{\otimes}\,k$ est donc $P^{-i}\mathcal{O}^d\,\widehat{\otimes}\,k$.

Le théorème 2.3.2 est donc démontré. □

2.3.1. Structures de niveau. — Soit S une $\breve{K}$-variété rigide analytique munie d'un point $(Y,\rho)^{\mathrm{rig}}$ de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}^{\mathrm{rig}}$ à valeurs dans S, provenant d'un point (Y,ρ) de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ à valeurs dans S^{ent} pour un modèle entier convenable S^{ent}. On note que, quitte à normaliser S^{ent} dans sa fibre générique S, les points de π^n-division de Y^{rig} définis sur S proviennent de points de π^n-division de Y définis sur S^{ent} ; on suppose désormais que S^{ent} est normal.

On identifie le $\mathbb{F}_q$-dual de $D/\mathcal{O}_D$ à $\Pi^{1-d}\mathcal{O}_D$ en utilisant le résidu de la trace réduite : $D/\mathcal{O}_D \otimes_{\mathbb{F}_q} \Pi^{1-d}\mathcal{O}_D \to \mathbb{F}_q$. Le décalage qui devrait en résulter est en fait annulé par celui qu'on a introduit dans la graduation du module de coordonnées au début du paragraphe 2.3.

De même que du côté Lubin-Tate (*cf.* 2.2.1), la donnée d'une structure de niveau d'échelon π^n

$$\pi^{-n}\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_D \to Y[\pi^n]_S^{\mathrm{rig}}$$

sur $Y[\pi^n]_S^{\mathrm{rig}}$ équivaut (voir [**G**, IV. 1.3]) à celle d'une famille de morphismes

$$S_{i,n,Y} : (M_{i,Y}/z^nM_{i,Y}) \otimes_{\mathcal{O}_{\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}}} \mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}} \to (P^{-i}\mathcal{O}^d/z^nP^{-i})\mathcal{O}^d\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}}$$

induisant des isomorphismes $(M_{i,Y}/z^nM_{i,Y}) \otimes_{\mathcal{O}_{\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}}} \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} (P^{-i}\mathcal{O}^d/z^nP^{-i}\mathcal{O}^d)\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S$ après tensorisation par $\mathcal{O}_S$ et vérifiant

– $S_{i,n,Y}$ est compatible aux morphismes induits par les inclusions $M_{i,Y} \hookrightarrow M_{i+1,Y}$ et $P^{-i}\mathcal{O}^d \hookrightarrow P^{-(i+1)}\mathcal{O}^d$

– le diagramme

$$\begin{array}{ccc} {}^{\tau}(M_{i,Y}/z^n M_{i,Y}) \otimes_{\mathcal{O}_{\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}}} \mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}} & \overset{{}^{\tau}S_{i,n,Y}}{\longrightarrow} & (P^{-i}\mathcal{O}^d/z^n P^{-i}\mathcal{O}^d) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (M_{i+1,Y}/z^n M_{i+1,Y}) \otimes_{\mathcal{O}_{\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}}} \mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}} & \overset{S_{i+1,n,Y}}{\longrightarrow} & (P^{-(i+1)}\mathcal{O}^d/z^n P^{-(i+1)}\mathcal{O}^d) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}} \end{array}$$

(dont les morphismes verticaux sont respectivement induits par ${}^{\tau}M_{i,Y} \hookrightarrow M_{i+1,Y}$ et par $P^{-1} : P^{-i}\mathcal{O}^d \xrightarrow{\sim} P^{-(i+1)}\mathcal{O}^d$) est commutatif.

Travaillant localement pour la topologie de Zariski sur S^{ent}, on peut supposer que le système $(M_{i,Y})_i$ est de la forme $(R_Y P^{-i}(\mathcal{O}^d \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}_S))_i$, où $R_Y \in \mathrm{GL}_d(K \mathbin{\widehat{\widehat{\otimes}}} \mathcal{O}_S)$. Notant $\Phi_Y = R_Y^{-1}\,{}^{\tau}R_Y \in P^{-1}\mathcal{B} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}_S$, la donnée de la famille $(S_{i,n,Y})_i$ équivaut alors à celle d'une matrice[7] $S_{n,Y} = \sum_{0\le j\le nd-1} P^j \operatorname{diag}(s_{i,j})_{1\le i\le d} \in (\mathcal{B} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}_S/z^n(\mathcal{B} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}_S))^{\times}$ vérifiant $S_{n,Y}\Phi_Y \equiv P^{-1}\,{}^{\tau}S_{n,Y}$ modulo $z^n\mathcal{B} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}_S$.

En particulier, le revêtement $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}$ de $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}$ du paragraphe 1.4, classifiant les structures de niveau d'échelon π^n sur le $\mathcal{O}_D$-module universel Y au-dessus de $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}$, est défini par la tour d'équations

$$s_{i,j+1}^q - s_{i+1,j+1}y_i = s_{i,j} \quad (i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, -1 \le j \le nd-1, s_{i,-1} = 0)$$

associées à l'égalité de matrices $S_{n,Y}\Phi_Y \equiv P^{-1}\,{}^{\tau}S_{n,Y}$ modulo $z^n\mathcal{B} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}_S$ et par l'équation

$$(s_{1,0}\cdots s_{d,0})^{q-1} = (-1)^d\pi$$

résultant de l'équation $(s_1\cdots s_d)^q = s_2y_1\cdots s_dy_{d-1}s_1y_d = (-1)^d s_1\cdots s_d\pi$ et du fait que $s_1\cdots s_d$ est inversible puisque $S_{n,Y}$ l'est.

Ces équations donnent un modèle entier $\mathrm{Spf}(A_{\mathcal{D}r}[(s_{i,j})_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z},0\le j\le nd-1}]/\mathcal{I}_{\mathcal{D}r,n})$ de $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}$, où l'idéal $\mathcal{I}_{\mathcal{D}r,n}$ est bien sûr engendré par $s_{i,0}^q - s_{i+1,0}y_i$ pour $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, par $(s_{1,0}\cdots s_{d,0})^{q-1} - (-1)^d\pi$ et par $s_{i,j+1}^q - s_{i+1,j+1}y_i - s_{i,j}$ pour $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, 0 \le j \le nd-1$. Malheureusement, ce modèle entier n'est pas normal ; on le remplacera donc par son normalisé $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d} = \mathrm{Spf}\, A_{\mathcal{D}r,n}$, où $A_{\mathcal{D}r,n}$ désigne la clôture intégrale de $A_{\mathcal{D}r}$ dans $A_{\mathcal{D}r}[(s_{i,j})_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z},j\ge 0}][\pi^{-1}]/\mathcal{I}_{\mathcal{D}r,n}$.

Enfin, il sera commode d'interpréter la $\breve{\mathcal{O}}$-algèbre $A_{\mathcal{D}r}[(s_{i,0})_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}]/\mathcal{I}_{\mathcal{D}r,1/d}$ associée aux structures de niveau d'échelon Π à l'aide d'algèbres de monoïdes de la manière suivante. Pour tout monoïde M, on note $\overline{\mathbb{F}}_q[M]$ la $\overline{\mathbb{F}}_q$-algèbre de ce monoïde et pour tout $m \in M$ on note $e^m \in \overline{\mathbb{F}}_q[M]$ l'élément de $\overline{\mathbb{F}}_q[M]$ qui lui correspond. La $\overline{\mathbb{F}}_q$-algèbre $\overline{\mathbb{F}}_q[(y_i)_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}, (s_{i,0})_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}]/((s_{i,0}^q - s_{i+1,0}y_i)_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}, (s_{1,0}\cdots s_{d,0})^{q-1} - y_1\cdots y_d)$ s'identifie alors (en envoyant $s_{i,0}$ sur $e^{(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)}$ et y_i sur $e^{(0,\cdots,0,q,-1,0,\cdots,0)}$, le 1 et le q étant tous deux en i-ème position) à celle du monoïde $\mathbb{M}$ engendré par les vecteurs de base

[7] Bien sûr, cette matrice n'est autre que celle de $S_{0,n,Y}$; on préfère abandonner l'indice 0 – comme on l'a déjà fait avec $R_{0,Y}$ – pour alléger les notations.

$e_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$ et par les vecteurs $qe_i - e_{i+1}$ ($i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$). Utilisant les notations introduites dans la discussion qui précède l'énoncé du théorème 2.3.2, la $\breve{\mathcal{O}}$-algèbre $A_\Phi[(s_{i,0})_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}]/\mathcal{I}_{\mathcal{D}r,1/d}$ s'identifie donc à la complétée $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}]\widehat{}$ de $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}]$ pour la topologie $\pi = (-1)^d e^{(q-1,\cdots,q-1)}$-adique, si bien que $A_{\mathcal{D}r}[(s_{i,0})_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}]/\mathcal{I}_{\mathcal{D}r,1/d}$ s'identifie finalement à la complétée π-adique $(\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}][(r_{i,j})_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z},0\leq j\leq d-1}]/\mathcal{E})\widehat{}$. Il résulte alors du lemme suivant et du fait que le morphisme d'algèbres $A_\Phi[(s_{i,0})_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}]/\mathcal{I}_{\mathcal{D}r,1/d} \to A_{\mathcal{D}r}[(s_{i,0})_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}]/\mathcal{I}_{\mathcal{D}r,1/d}$ est étale que $A_{\mathcal{D}r}[(s_{i,0})_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}]/\mathcal{I}_{\mathcal{D}r,1/d}$ est normale.

Lemme 2.3.6. — *Le monoïde $\mathbb{M}$ est l'intersection du réseau $\mathbb{Z}^d$ avec le cône $\sum_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \mathbb{R}_+(qe_i - e_{i+1})$.*

Démonstration. — Soit $m = \sum_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} n_i e_i = \sum_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \alpha_i(qe_i - e_{i+1})$ ($n_i \in \mathbb{Z}, \alpha_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$) un élément de cette intersection. On veut démontrer que $m \in \mathbb{M}$. Quitte à soustraire à m un élément de $\sum_i \mathbb{N}(qe_i - e_{i+1})$, on peut supposer que $\alpha_i < 1, \forall i$. Pour tout i on a alors $n_i = -\alpha_{i-1} + q\alpha_i > -1$ et donc $n_i \geq 0$, si bien que $m \in \mathbb{N}^d \subset \mathbb{M}$. □

2.3.2. Action du groupe $\mathrm{GL}_d(K)\times D^\times$ *et de la donnée de descente*. — L'action du groupe $\mathrm{GL}_d(K)$ sur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ est très simple : $\gamma \in \mathrm{GL}_d(K)$ envoie $(M_i \subset K^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S)_i \in \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}(S)$ sur $(\gamma M_i)_i$. En particulier, γ envoie le sous-foncteur ouvert $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\underline{\Lambda}}$ de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ associé à un simplexe $\underline{\Lambda} = (\Lambda_i)_{i\in I(\underline{\Lambda})}$ de l'immeuble étendu de $\mathrm{GL}_d(K)$ sur le sous-foncteur ouvert $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\gamma\underline{\Lambda}}$ associé au simplexe $\gamma\underline{\Lambda} = (\gamma\Lambda_i)_{i\in I(\underline{\Lambda})}$.

Utilisant les notations du paragraphe précédent (2.3.1), lorsque S est une $\breve{K}$-variété rigide-analytique, $\gamma \in \mathrm{GL}_d(K)$ envoie $(M_{i,Y} \subset K^d \widehat{\widehat{\otimes}} \mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}})_i, S_{n,i,Y}) \in \breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n}(S)$ sur

$$((\gamma M_{i,Y})_i, S_{n,i,Y} \circ \gamma^{-1} : \gamma M_{i,Y}/z^n\gamma M_{i,Y} \underset{\sim}{\xrightarrow{\gamma^{-1}}} M_{i,Y}/z^n M_{i,Y}$$
$$\xrightarrow{S_{n,i,Y}} P^{-i}\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}}/z^n P^{-i}\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}}) \ .$$

Lorsque $(M_{i,Y})_i$ est de la forme $(R_Y P^{-i}\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}})_i$, on peut aussi représenter la famille $(S_{n,i,Y})_i$ à l'aide d'une seule matrice $S_{n,Y}$ (*cf.* 2.3.1) et γ envoie alors $(R_Y \cdot P^{-\bullet}\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}}, S_{n,Y}) \in \breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n}(S)$ sur $((\gamma R_Y) \cdot P^{-\bullet}\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}}, S_{n,Y})$.

L'élément $\delta \in D^\times$ envoie $(M_{\bullet,Y} = R_Y \cdot P^{-\bullet}\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S, S_{n,Y}) \in \breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n}(S)$ sur

$$(M_{\bullet+m,Y} = R_Y \cdot P^{-\bullet-m}\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S, \delta_z S_{n,Y} P^{-m}),$$

où la notation δ_z est celle du paragraphe 2.2.2, $m \in \mathbb{Z}$ est l'unique entier tel que $\delta \in \mathcal{O}_D^\times \Pi^m$ et par abus de notation $\delta_z S_{n,Y} P^{-m}$ désigne $(\delta_z P^{-m})(P^m S_{n,Y} P^{-m}) \in (\mathcal{B} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}}/z^n \mathcal{B} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}})$ –en remarquant que $b \mapsto P^m b P^{-m}$ agit sur $(\mathcal{B} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}}/z^n \mathcal{B} \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}})^\times$; en travaillant avec un système compatible $((M_{\bullet,Y} = R_Y \cdot P^{-\bullet}\mathcal{O}^d \widehat{\otimes}$

$\mathcal{O}_{S^{\mathrm{ent}}}, S_{n,Y}) \in \breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n}(S))_{n\in\mathbb{N}}$ et en posant $S_Y = \varprojlim S_{n,Y}$ comme dans le paragraphe 2.2.2 la notation $\delta_z S_Y P^{-m}$ devient rigoureuse. En posant $\Delta = P^m$ cette action est donc analogue à celle de $\mathrm{GL}_d(K)$ sur la tour de Lubin-Tate, comme on l'a déjà remarqué dans le paragraphe 1.4.

En particulier, l'action de δ décale de m le module de coordonées gradué et envoie donc l'ouvert affinoïde $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n,\underline{\Delta}}$ associé à un simplexe $\underline{\Delta} = (\Lambda_i)_{i\in I(\underline{\Delta})}$ sur l'ouvert $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n,\underline{\Delta}[m]}$ associé au simplexe décalé $\underline{\Delta}[m]$ défini par $I(\underline{\Delta}[m]) = \{i - m; i \in I(\underline{\Delta})\}$ et $\underline{\Delta}[m] = (\Lambda_{i+m})_{i\in I(\underline{\Delta}[m])}$.

Comme du côté Lubin-Tate, on peut souhaiter travailler avec des modules de coordonnées normalisés comme dans le point 4 du théorème 2.3.2. L'action ci-dessus de $\mathcal{B}^\times = \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}_d(K)}(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)$ ne respecte pas cette normalisation ; avec ce point de vue il faut alors remplacer $((\gamma R_Y)P^{-\bullet}\mathcal{O}^d, S_Y)$ par l'unique module de coordonnées normalisé $((\gamma R_Y\Gamma^{-1})P^{-\bullet}\mathcal{O}^d, S_Y\Gamma^{-1})$ qui lui soit isomorphe (où Γ est un élément uniquement déterminé de $({}^t\mathcal{B}\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S)^\times = \mathcal{O}_S[[{}^tP]]^\times$).

Finalement, la donnée de descente à la Weil est le morphisme associant à $(M_{\bullet,Y} = R_Y \cdot P^{-\bullet}\mathcal{O}^d \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{O}_S, S_{n,Y}) \in \breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n}(S)$ le couple $(M_{\bullet+1,Y} = R_Y P^{-\bullet-1}, PS_{n,Y}P^{-1}) \in \breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n}(S[\tau])$, comme on le voit en remarquant que le module de coordonnées gradué de Y *envisagé comme un* $\mathcal{O}_D$*-module formel sur* $S[\tau]$ est $(M_{i+1,Y})_i$ –il en est de même du module de coordonnées gradué de $\pi^{-n}\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_D$ (*cf.* [**G**, IV. 1]) mais le module de coordonnées gradué de $\mathbb{Y}_{S_0}$ n'est en revanche pas décalé car $\mathbb{Y}_{S_0}$ provient de $\iota : \breve{\mathcal{O}} \to S$, ce qui annule le décalage ! (pour plus de précision, voir [**G**], ch. IV, 1.2 et 1.3.4). Cette donnée de descente envoie elle aussi l'ouvert affinoïde $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n,\underline{\Delta}}$ de $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n}$ sur l'ouvert $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n,\underline{\Delta}[1]}$.

Remarque 2.3.7. — Soit $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}$ le normalisé de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ dans $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n}$ (cette notation a déjà été introduite dans le paragraphe 1.5). Soit S un $\breve{\mathcal{O}}$-schéma formel π-adique[(8)] muni d'un système compatible $((R_Y P^{-\bullet}\mathcal{O}^d \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{O}_S, S_{n,Y}) \in \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}(S))_n$. On s'intéresse plus particulièrement aux cas suivants

– $S = \mathrm{Spf}\, \widehat{\mathcal{O}}_L$, où $\widehat{\mathcal{O}}_L$ est le complété π-adique de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_L$ d'une extension algébrique (nécessairement infinie) L de $\breve{K}$

– $S = \mathrm{Spf}\, \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$, où $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ est le complété π-adique de $A_{\mathcal{D}r,\infty} = \varinjlim_n A_{\mathcal{D}r,n}$.

La matrice $S_Y = \varprojlim S_{n,Y} \in (\mathcal{B}\,\widehat{\otimes}\,(\mathcal{O}_S[\pi^{-1}]))^\times$ est alors à coefficients dans $\mathcal{O}\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{O}_S$. On peut donc considérer le produit $T_Y = S_Y R_Y^{-1} \in M_d(K \,\widehat{\widehat{\otimes}}\, \mathcal{O}_S)$ analogue à celui de la remarque 2.2.4. Cette matrice T_Y vérifie l'équation $PT_Y = {}^\tau T_Y$, l'action de $(\gamma, \delta) \in \mathrm{GL}_d(K) \times D^\times$ sur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}$ envoie T_Y sur $\delta_z T_Y \gamma_z^{-1}$ et la donnée de

(8) Voire, un $\breve{K}$-espace rigide-analytique généralisé au sens de [**Far1**, ch. IV] si l'on veut éviter de recourir à des modèles entiers.

descente à la Weil envoie T_Y sur PT_Y –ces formules sont les transposées de celles qui apparaissent dans la remarque 2.2.4.

Soit $T_Y = S'R'^{-1}$ (où $R' \in \mathrm{GL}_d(K \,\widehat{\widehat{\otimes}}\, \mathcal{O}_S)$ et $S' \in M_d(\mathcal{O} \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{O}_S) \cap \mathrm{GL}_d(\mathcal{O} \,\widehat{\otimes}\, (\mathcal{O}_S[\pi^{-1}]))$ est triangulaire supérieure modulo z) une autre décomposition de T_Y. On a alors $R' = R_Y b$ et $S' = S_Y b$, où $b \in (\mathcal{B} \,\widehat{\otimes}\, (\mathcal{O}_S[\pi^{-1}]))^\times \cap \mathrm{GL}_d(K \,\widehat{\widehat{\otimes}}\, \mathcal{O}_S) = (\mathcal{B} \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{O}_S)^\times$. Les systèmes compatibles $(M_{\bullet,Y} = R_Y \cdot P^{-\bullet}\mathcal{O}^d \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{O}_S, S_{n,Y})_n$ et $(R'P^{-\bullet}, S'_n \equiv S' \text{ (modulo } z^n\mathcal{B} \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{O}_S))_n$ sont donc isomorphes. Si R_Y et R' appartiennent toutes deux à $(\underline{U}^-)\widehat{\ }(S) = \varprojlim_m (S/(\pi^m)) = (\mathrm{Id}_d + P^{-1}\,\mathrm{diag}(\mathcal{O}_s^d)[P^{-1}]\widehat{\ })^\times$, on a même $b = 1$ et la décomposition est donc unique.

En se limitant pour l'instant au cas d'une base $S = \mathrm{Spf}\,\widehat{\mathcal{O}}_L$ comme ci-dessus, on peut alors donner une première idée de la construction de l'isomorphisme des deux tours. Lorsque $T_X = S_X R_X^{-1} \in \mathrm{GL}_d(K \,\widehat{\widehat{\otimes}}\, \widehat{\mathcal{O}}_L)$ est une matrice provenant de la tour de Lubin-Tate (comme dans la remarque 2.2.4) on démontrera dans la section 5 qu'il existe une décomposition ${}^tT_X = S_Y R_Y^{-1}$, donnant naissance à un point $(R_Y P^{-\bullet}\mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \widehat{\mathcal{O}}_L, S_Y)$ de la tour de Drinfeld à valeurs dans $\widehat{\mathcal{O}}_L$; réciproquement, on démontrera aussi que lorsque $T_Y = S_Y R_Y^{-1}$ provient comme ci-dessus de la tour de Drinfeld, il existe une (unique) décomposition ${}^tT_Y = S_X R_X^{-1}$, où $S_X \in ({}^t\mathcal{B} \,\widehat{\otimes}\, \widehat{L})^\times$ et $R_X \in (\mathrm{Id}_d + {}^tP^{-1}\,\mathrm{diag}(\widehat{\mathcal{O}}_L^d)[{}^tP^{-1}]\widehat{\ })^\times$, donnant naissance à un point (R_X, S_X) de la tour de Lubin-Tate à valeurs dans $\widehat{\mathcal{O}}_L$.

2.3.3. Le recouvrement mentionné en 1.5, associé aux simplexes de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_d(K)$. — Les simplexes de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_d(K)$ sont simplement les classes d'équivalence de simplexes de l'immeuble étendu de $GL_d(K)$, pour la relation d'équivalence induite par le décalage. En associant à un tel simplexe les ouverts $\coprod_{h\in\mathbb{Z}} \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\underline{\Lambda}[h]}$ et $\coprod_{h\in\mathbb{Z}} \breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n,\underline{\Lambda}[h]}$ de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ et $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n}$, on définit donc des recouvrements de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ et $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n}$ indexés par l'ensemble des simplexes de l'immeuble de Bruhats-Tits de $\mathrm{PGL}_d(K)$. Les ouverts de ces recouvrements sont visiblement stables sous l'action de $D^\times$ et de la donnée de descente à la Weil ; $\gamma \in \mathrm{GL}_d(K)$ envoie l'ouvert associé à un simplexe $\underline{\Lambda}$ sur celui associé à $\gamma\underline{\Lambda}$.

A partir de maintenant, pour éviter de confondre les deux recouvrements, on notera $(\breve{\mathcal{M}}^0_{\mathcal{D}r,\underline{\Lambda}})_{\underline{\Lambda}\in\mathcal{I}^{\text{ét}}}$ l'« ancien » recouvrement, indexé par l'ensemble $\mathcal{I}^{\text{ét}}$ des simplexes de l'immeuble étendu, et $(\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\underline{\Lambda}})_{\underline{\Lambda}\in\mathcal{I}}$ le « nouveau » recouvrement, indexé par l'ensemble $\mathcal{I}$ des simplexes de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_d(K)$ –on a bien sûr $\mathcal{I}^{\text{ét}} = \mathcal{I} \times \mathbb{Z}$, puisque chaque classe de décalage contient un unique représentant tel que $[\Lambda_i : \mathcal{O}^d] = i, \forall i \in I(\underline{\Lambda})$.

3. Tour de Lubin-Tate et domaines fondamentaux

3.1. Décomposition cellulaire de la tour. — Soit C une extension de $\breve{K}$ munie d'une valuation à valeurs réelles (encore notée v) étendant celle de $\breve{K}$ et complète pour la topologie v-adique. On note $\mathcal{O}_C = \{x \in C; v(x) \geq 0\}$ l'anneau des entiers de C et $\mathfrak{M}_C$ l'idéal de $\mathcal{O}_C$ formé des éléments de valuation strictement positive.

Soit (X, ρ) un point de $\mathcal{M}_{\mathcal{LT}}$ à valeurs dans $\mathcal{O}_C$. Il existe alors un unique $(d-1)$-uplet $(u_1, \cdots, u_{d-1})$ tel que le $\mathcal{O}$-module formel X soit isomorphe à $\widehat{\mathbb{G}}_a$ muni de l'action de $\mathcal{O}$ définie par l'action évidente de $\mathbb{F}_q$ et par $X(\pi) = \pi + u_1\tau + \cdots + u_{d-1}\tau^{d-1} + \tau^d$ (voir [**D1**], [**HG1**] ou le début de 2.2).

On suppose que $\mathcal{O}_C$ contient tous les points de torsion de X. On définit alors le module de Tate entier $T(X) = \mathrm{Hom}(K/\mathcal{O}, X)$ et le module de Tate rationnel $V(X) = T(X) \otimes_{\mathcal{O}} K = \{s \in \mathrm{Hom}(K, X); s(\pi^N \mathcal{O}) = 0 \text{ pour } N \gg 0\}$; en posant $s_i = s(\pi^{-i-1})$ ces modules de Tate $V(X)$ et $T(X)$ s'identifient respectivement à $\{(s_i)_{i\in\mathbb{Z}}, s_i \in \mathfrak{M}_C, s_i = 0 \text{ pour } i \ll 0, X(\pi)s_{i+1} = s_i\}$ et à $\{(s_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in V(X), s_{-1} = 0\}$. Le module de Tate entier $T(X)$ est un $\mathcal{O}$-module libre de rang d et le module de Tate rationnel $V(X)$ est donc un K-espace vectoriel de dimension d.

Proposition 3.1.1. — *Il existe $N \in \mathbb{N}$, ne dépendant que des valuations des u_i, tel que pour tout $s = (s_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in V(X) - \{0\}$ et pour tout $i \geq N + \inf(\{j \in \mathbb{Z}, s_j \neq 0\})$, on ait $v(s_{i+1}) = v(s_i)/q^d$.*

Démonstration. — Soit $i_0 = \inf(\{j \in \mathbb{Z}, s_j \neq 0\})$. On a $X(\pi)s_{i_0} = 0$, donc $v(s_{i_0})$ est une pente du polygône de Newton de $X(\pi)$, donc $v(s_{i_0}) < 1/(q-1)$. Pour tout $i \geq i_0$, on a donc $v(s_i) \leq 1/((q-1)q^{i-i_0})$. En effet, $v(s_{i+1})$ est une pente du polygône de Newton de $X(\pi) - s_i$ et est donc $\leq v(s_i)/q$ puisque le point $(1,1)$ est situé au-dessus de ce polygône de Newton. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $1/((q-1)q^N) \leq \min(q^d v(u_1)/(q^d - q), \cdots, q^d v(u_{d-1})/(q^d - q^{d-1}))$. Pour $i \geq i_0 + N$, le polygône de Newton de $X(\pi) - s_i$ est alors le segment d'extrémités $(0, v(s_i))$ et $(q^d, 0)$; on a donc $v(s_{i+1}) = v(s_i)/q^d$. $\square$

Définition 3.1.2. — La valuation stabilisée de $s = (s_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in V(X)$ est

$$\mathcal{V}(s) = \frac{1}{d}\log_q v(s_n) + n$$

pour n assez grand.

On voit facilement que $\mathcal{V}$ est une « norme additive » (*cf.* [**T**]) sur le K-espace vectoriel $V(X)$.

La donnée d'un point de $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\infty}$ à valeurs dans C (c'est-à-dire, d'un système compatible $x = (x_n \in \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n}(\mathcal{O}_C) = \breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},n}(C))_n)$ équivaut à celle d'un point de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}}$ à valeurs dans $\mathcal{O}_C$ comme-ci-dessus muni d'un isomorphisme de $\mathcal{O}$-modules $\mathcal{O}^d \to T(X)$. Pour tout point x de $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\infty}$ à valeurs dans C on obtient ainsi une valuation sur K^d, et donc [**GI**] un point $[x]$ dans la réalisation géométrique de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_d(K)$.

Définition 3.1.3. — Si $\underline{\Delta}$ est une facette [(9)] de l'immeuble, on pose

$$\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\infty,\underline{\Delta}}(C)=\{x\in\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\infty}(C),[x]\in\underline{\Delta}\}.$$

On notera $\underline{\Delta}_0$ la chambre de l'immeuble dont les sommets sont les classes d'homothétie des réseaux $P^j\mathcal{O}^d$ pour $j\in\mathbb{Z}$.

Proposition 3.1.4. — *– 1) On a*

$$\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\infty,\underline{\Delta}}(C)\cap\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\infty,\underline{\Delta}'}(C)=\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\infty,\underline{\Delta}\cap\underline{\Delta}'}(C)$$

et $\quad(\gamma,\delta)\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\infty,\underline{\Delta}}(C)=\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\infty,\gamma\underline{\Delta}}(C)$ *pour* $(\gamma,\delta)\in\mathrm{GL}_d(K)\times D^\times$.

- *2)* $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\infty,\underline{\Delta}_0}(C)$ *est l'ensemble des points à valeurs dans C de l'image inverse de l'ouvert affinoïde* $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times,\underline{\Delta}_0}$ *de* $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times}$ *formé des* $(x_1,\cdots,x_d)$ *tels que* $v(x_i^q/x_{i+1})\geq 0$ *pour tout* $i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. *Notant* $(\underline{\Delta}_0)_j$ *la facette de* $\underline{\Delta}_0$ *obtenue en omettant le sommet* $P^{-j}\mathcal{O}^d$, *le sous-ensemble* $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\infty,(\underline{\Delta}_0)_j}(C)\subset\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\infty,\underline{\Delta}_0}(C)$ *est celui défini par la condition* $v(x_j^q/x_{j+1})=0$.
- *3) Plus généralement, pour toute facette* $\underline{\Delta}$, $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\infty,\underline{\Delta}}(C)$ *est l'ensemble des points à valeurs dans C de l'image inverse d'un ouvert affinoïde* $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},n_{\mathcal{LT}}(\underline{\Delta}),\underline{\Delta}}$ *de* $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},n_{\mathcal{LT}}(\underline{\Delta})}$, *où* $n_{\mathcal{LT}}(\underline{\Delta})$ *est le plus petit entier* $n\in\mathbb{N}^*$ *tel que* $(1+\pi^n M_d(\mathcal{O}))^\times$ *stabilise* $\underline{\Delta}$.
- *4) L'image inverse dans* $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\infty}$ *de tout ouvert affinoïde connexe* $\mathcal{U}\subset\mathcal{M}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT}}$ *est incluse dans une réunion finie d'ouverts* $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\infty,\underline{\Delta}}$.
- *5) Le recouvrement admissible* $(\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\infty,\underline{\Delta}})_{\underline{\Delta}\in\mathcal{I}}$ *de la tour de Lubin-Tate est pur (au sens de la définition 1.5.2).*

Démonstration. — Le premier point est évident. Pour démontrer le deuxième, on se donne un point x de $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\infty,\underline{\Delta}_0}(C)$ et on note $(x_1,\cdots,x_d)$ son image dans $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times}(C)\simeq\mathfrak{M}_C^d$ (*cf.* 2.2). La première partie du point 2) résulte alors de l'équivalence des assertions suivantes :

– (i) x appartient à $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\infty,\underline{\Delta}_0}(C)$.

[(9)] Dans la mesure où on travaille dans ce paragraphe avec la réalisation géométrique de l'immeuble, pour éviter des confusions avec le point de vue (simplicial) de la section 2, on préferera y parler de *facettes* et de *chambres* plutôt que de *simplexes* et de *simplexes maximaux.*

– (ii) il existe $V_1, \cdots, V_d \in \mathbb{R}$, avec $V_1 \geq V_2 \geq \cdots \geq V_d \geq V_1 - 1$, tels que pour tout $s \in V(X)$ non nul, $\mathcal{V}(s) = i + V_j$, où $i = \inf(\{i \in \mathbb{Z}, s_i \neq 0\})$ et $j = \inf(\{j \in \{1, \cdots, d\}, (\tau - x_j) \cdots (\tau - x_1)s_i = 0\})$.
– (iii) il existe une suite périodique $(w_i)_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, avec $qw_i \geq w_{i+1}$ pour tout i, telle que pour tout point de torsion non nul y de X, $v(y) = w_i/q^i$ où i est le plus petit entier tel que $(\tau - x_i) \cdots (\tau - x_1)y = 0$.
– (iiii) On a $v(x_i^q/x_{i+1}) \geq 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

On verra de plus que $w_i = qv(x_i)/(q-1)$ et pour $k \in \{1, \cdots, d\}$, on a $V_k = (\log_q(w_k) - k)/d$, ce qui entrainera le complément concernant $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\infty,(\underline{\Delta}_0)_j}(C)$.

L'équivalence entre (i) et (ii) résulte de la définition de la valuation normalisée : les entiers i et j associés à s dans (ii) sont tels que l'image de s dans K^d appartienne à $P^{d(i+1)-j}\mathcal{O}^d$ mais pas à $P^{d(i+1)-j+1}\mathcal{O}^d$. De plus $V_1 - V_2, \cdots, V_d - V_1 + 1$ sont simplement les coordonnées barycentriques de $[x]$ dans $\underline{\Delta}_0$ –vu comme enveloppe convexe des sommets $P^{-1}\mathcal{O}^d, \cdots, P^{-d}\mathcal{O}^d = \mathcal{O}^d$, *pris dans cet ordre.*

Il est facile de voir que (iii) implique (ii). Pour démontrer que (ii) implique (iii), on se donne y comme dans (iii) et on écrit $i = nd + k$, avec $k \in \{1, \cdots, d\}$ et $n \in \mathbb{N}$. Il résulte de (ii) et de l'uniformité de N dans la proposition 3.1.1 que pour m assez grand tous les antécédents z de y par $X(\pi)^m$ vérifient $\log_q(v(z)) = d(V_k - n - m)$. En effet $z = s_m$ pour un certain $s \in V(X)$ tel que $s_0 = y$. Alors $d\mathcal{V}(s) = \log_q(v(z)) + md$ est aussi égal par (ii) à $d(-n + V_k)$. Comme y est le produit de ses antécédents par $X(\pi)^m$, on a $\log_q(v(y)) = d(V_k - n) = \log_q(w_k) - k - nd = \log_q(w_i) - i$.

Supposons (iii) et démontrons (iiii). Soit $i \in \{1, \cdots, d\}$ et a non nul dans le noyau de $\tau - x_i$. On a $x_i = a^{q-1}$ et donc $v(x_i) = (q-1)v(a)$. Pour tout $y \in \mathfrak{M}_C$ tel que $(\tau - x_{i-1}) \cdots (\tau - x_1)y = a$ on a $v(y) = w_i/q^i$. Comme a est le produit de ses antécédents par $(\tau - x_{i-1}) \cdots (\tau - x_1)$, on a $v(a) = w_i/q$, et donc $v(x_i) = (q-1)w_i/q$.

Supposons (iiii) et démontrons (iii), avec $w_i = qv(x_i)/(q-1)$. Soit y tel que $(\tau - x_i) \cdots (\tau - x_1)y = 0$ mais tel que $z_1 = (\tau - x_{i-1}) \cdots (\tau - x_1)y$ soit non nul. On a $z_1^{q-1} = x_i$ et donc $v(z_1) = v(x_i)/(q-1)$. De plus $z_2 = (\tau - x_{i-2}) \cdots (\tau - x_1)y$ vérifie $z_2^q - x_{i-1}z_2 = z_1$ et le polygône de Newton est un segment de pente $v(z_1)/q$ car $v(x_{i-1}) \geq v(x_i)/q = (q-1)v(z_1)/q$. Donc $v(z_2) = v(x_i)/(q-1)q$. Alors $z_3 = (\tau - x_{i-3}) \cdots (\tau - x_1)y$ vérifie $z_3^q - x_{i-2}z_3 = z_2$ et le polygône de Newton est un segment de pente $v(z_2)/q$ car $v(x_{i-2}) \geq v(x_i)/q^2 = (q-1)v(z_2)/q$. Donc $v(z_3) = v(x_i)/((q-1)q^2)$. On continue ainsi jusqu'à $z_i = y$ et on trouve $v(y) = v(x_i)/((q-1)q^{i-1}) = w_i/q^i$.

Le point (3) de la proposition résulte simplement de l'énoncé d'équivariance du point (1) (et du fait que l'image inverse de l'affinoïde $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times,\underline{\Delta}_0}$ par le morphisme d'oubli $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},n} \to \breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times}$ est affinoïde).

Pour démontrer le point (4) on se donne un ouvert affinoïde $\mathcal{U}$ de $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT}}$ et on va vérifier que lorsque x parcourt l'image inverse de $\mathcal{U}$ dans $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\infty}(C)$, le point

$[x]$ de l'immeuble reste à une distance bornée de $\underline{\Lambda}_0$. D'abord les valuations des u_i sont bornées inférieurement par $\varepsilon > 0$ sur $\mathcal{U}$. Dans la proposition 3.1.1 l'entier N peut donc être fixé lorsque x varie. Il reste donc à démontrer que pour $s \in T(X)$ tel que $s_0 \neq 0$, $v(s_N)$ est bornée inférieurement par $\delta > 0$ lorsque x varie. Mais on a $X(\pi)s_{i+1} = s_i$, d'où

$$v(s_{i+1}) \geq \min(v(s_i)/q^d, 1/(q^d-1), v(u_1)/(q^d-q), \cdots, v(u_{d-1})/(q^d-q^{d-1}))$$

pour $i = 0, \cdots, N-1$, et

$$v(s_0) \geq \min(1/(q^d-1), v(u_1)/(q^d-q), \cdots, v(u_{d-1})/(q^d-q^{d-1})).$$

Le dernier point est une conséquence immédiate des deux premiers. □

En appliquant au recouvrement admissible pur $(\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\infty,\underline{\Lambda}})_{\underline{\Lambda}\in\mathcal{I}}$ de la tour de Lubin-Tate la construction qui suit la définition 1.5.2, on obtient le $\breve{\mathcal{O}}$-schéma formel $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,\mathcal{I}}$ annoncé dans le paragraphe 1.5. Ce schéma formel est alors, par construction, muni du recouvrement ouvert $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,\mathcal{I}} = \bigcup_{\underline{\Lambda}\in\mathcal{I}} \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,\underline{\Lambda}}$.

Remarque 3.1.5. — Laurent Fargues a obtenu un résultat beaucoup plus fort que le point (2) de la proposition ci-dessus (voir [**Far2**], propositions 8.2 et 8.12, ainsi que la figure 10 pour une illustration en rang $d = 3$). Pour l'énoncer, on considère une $\mathcal{B}$-orbite $\mathcal{B}\underline{\Lambda}$ dans l'ensemble des facettes de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_d(K)$ et l'ouvert $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},N,\mathcal{B}\underline{\Lambda}} = \bigcup_{b\in\mathcal{B}^\times} \breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},N,b\underline{\Lambda}}$, défini pour $N \geq n_{\mathcal{LT}}(b\underline{\Lambda}), \forall b \in \mathcal{B}^\times$. Cet ouvert provient en fait d'un ouvert $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times,\mathcal{B}\underline{\Lambda}}$ de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times}$, qu'on peut aussi voir comme l'image par la correspondance de Hecke associée à une certaine double-classe $\mathcal{B}^\times \operatorname{diag}(\pi^{n_1}, \cdots, \pi^{n_d})\mathcal{B}^\times$ de l'ouvert $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times,\underline{\Lambda}'}$ associé, comme dans 3.1.4.2, à une facette $\underline{\Lambda}'$ de la chambre $\underline{\Lambda}_0$.

Laurent Fargues construit une décomposition simpliciale $\Delta = \bigcup_{\underline{\Lambda}} \Delta(\underline{\Lambda})$ du simplexe ouvert $\Delta = \{(v_1, \cdots, v_d); v_i > 0, \forall i \text{ et } v_1 + \cdots + v_d = 1\}$ des valuations des d-uplets $(x_1, \cdots, x_d)$, indexée par l'ensemble des facettes de l'appartement de l'immeuble de $\mathrm{PGL}_d(K)$ associé au tore des matrices diagonales –ou, ce qui revient au même, par l'ensemble des orbites $\mathcal{B}^\times\underline{\Lambda}$ comme ci-dessus. Une conséquence de sa proposition 8.12 est que l'ouvert $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times,\mathcal{B}\underline{\Lambda}}$ est simplement celui défini par la condition $(v(x_1), \cdots, v(x_d)) \in \Delta(\underline{\Lambda})$ –le simplexe $\Delta(\underline{\Lambda}_0)$ de sa décomposition n'est autre que le simplexe $\{qv_i - v_{i+1} \geq 0, \forall i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}\} \subset \Delta$ qui apparaît dans le deuxième point de la proposition 3.1.4, si bien que ce résultat de L. Fargues en est une généralisation.

Variante : le recouvrement associé à l'immeuble étendu. — Comme en 2.3 (voir en particulier 2.3.3 pour les notations) on peut aussi définir un recouvrement $(\breve{\mathcal{M}}^{0,\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\infty,\underline{\Lambda}})_{\underline{\Lambda}\in\mathcal{I}^{\text{ét}}}$ de la tour de Lubin-Tate indexé par l'ensemble $\mathcal{I}^{\text{ét}}$ des simplexes de l'immeuble étendu de $\mathrm{GL}_d(K)$. Il suffit pour cela de se rappeler que la donnée d'un simplexe de l'immeuble étendu équivaut à celle d'un entier h et d'un simplexe

$\underline{\Lambda}$ de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_d(K)$. On associe alors simplement à ce couple la partie ouverte et fermée $\breve{\mathcal{M}}^{0,\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},n,(\underline{\Lambda},h)}$ de $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},n,\underline{\Lambda}}$ (pour $n \geq n_{\mathcal{LT}}(\underline{\Lambda})$) sur laquelle la hauteur de la quasi-isogénie ρ est h. Ce recouvrement a bien sûr encore les propriétés énoncées dans la proposition 3.1.4. Le schéma formel $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,\mathcal{I}}$ est aussi évidemment muni d'un recouvrement ouvert $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,\mathcal{I}} = \bigcup_{\underline{\Lambda}\in\mathcal{I}^{\text{ét}}} \breve{\mathcal{M}}^{0}_{\mathcal{LT},\infty,\underline{\Lambda}}$ analogue.

3.2. Le domaine fondamental. — Notant $\breve{K}\{X_1,\cdots,X_n\}$ la $\breve{K}$-algèbre des séries en les variables $X_1,\cdots,X_n$ convergentes sur le polydisque fermé $\{v(X_i) \geq 0, \forall i \in \{1,\cdots,n\}\}$, l'affinoïde $\mathcal{V} = \{v(x_i^q/x_{i+1}) \geq 0, \forall i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}\} \subset \operatorname{Spf} \breve{\mathcal{O}}[[x_1,\cdots,x_d]]/(x_1\cdots x_d - (-1)^d\pi)^{\mathrm{rig}}$ s'écrit aussi

$$\operatorname{Spm} \breve{K}\{x_1,\cdots,x_d,z_1,\cdots,z_d\}/(x_1\cdots x_d - (-1)^d\pi, (z_i x_{i+1} - x_i^q)_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}).$$

En utilisant le monoïde $\mathbb{M}$ de 2.3.1 et en envoyant $e^{(q-1)e_i}$ sur x_i, $e^{(q-1)(qe_i-e_{i+1})}$ sur $z_i = x_i^q/x_{i+1}$ et π sur $(-1)^d e^{(q-1)(e_1+\cdots+e_d)}$, la complétée $e^{(q-1)(e_1+\cdots+e_d)}$-adique de la $\overline{\mathbb{F}}_q$-algèbre $\overline{\mathbb{F}}_q[(q-1)\mathbb{M}]$ fournit un modèle entier $\operatorname{Spf} \overline{\mathbb{F}}_q[(q-1)\mathbb{M}]^{\wedge}$ de $\mathcal{V}$. Ce modèle entier est normal d'après le lemme 2.3.6, et $\overline{\mathbb{F}}_q[(q-1)\mathbb{M}]^{\wedge}$ s'identifie donc à la $\breve{\mathcal{O}}$-sous-algèbre de $\breve{K}\{x_1,\cdots,x_d,z_1,\cdots,z_d\}/(x_1\cdots x_d - (-1)^d\pi, (z_i x_{i+1} - x_i^q)_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}})$ formée des fonctions prenant des valeurs entières en tout point de $\mathcal{V}$.

Comme du côté Drinfeld (*cf.* 2.3.1) on pose $A_{\mathcal{LT}} = \overline{\mathbb{F}}_q[(q-1)\mathbb{M}]^{\wedge}$ et on définit $A_{\mathcal{LT},n}$ comme la normalisation de $A_{\mathcal{LT}}$ dans

$$A_{\mathcal{LT}}[(s_{i,j})_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z},0\leq j\leq nd-1},\pi^{-1}]/\mathcal{I}_{\mathcal{LT},n},$$

où l'on note $\mathcal{I}_{\mathcal{LT},n}$ l'idéal engendré par les $s_{i,j}^q - x_{i-j}s_{i,j} - s_{i,j-1}$ pour $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, 1 \leq j \leq nd-1$ et par les $s_{i,0}^{q-1} - x_i$ pour $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Utilisant la variante [10] $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}_n^\times}$ introduite dans la remarque 2.2.3, le $\breve{\mathcal{O}}$-schéma formel $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}_n^\times,\underline{\Delta}_0} = \coprod_{h\in\mathbb{Z}} \operatorname{Spf} A_{\mathcal{LT},n}$ est alors le modèle entier affine normal de $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}_n^\times,\underline{\Delta}_0} = \breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}_n^\times} \times_{\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times}} \breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times,\underline{\Delta}_0}$ obtenu par normalisation de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times,\underline{\Delta}_0} = \coprod_{h\in\mathbb{Z}} \operatorname{Spf} A_{\mathcal{LT}}$ dans $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}_n^\times}$. La composante $(h, \operatorname{Spf} A_{\mathcal{LT}}) \subset \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}_n^\times,\underline{\Delta}_0}$ n'est autre que l'ouvert $\breve{\mathcal{M}}^{0}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}_n^\times,P^{-\bullet-h}\mathcal{O}^d}$ associée au simplexe $P^{-\bullet-h}\mathcal{O}^d$ de l'immeuble étendu de $\mathrm{GL}_d(K)$.

Comme en 2.3.1, on observe que $\mathcal{B}_n^\times = (\mathrm{Id}_d + \mathcal{B}P^{nd})^\times$ et $A_{\mathcal{LT},n}$ ont en fait un sens lorsque n est seulement un multiple entier de $1/d$; la $\breve{\mathcal{O}}$-algèbre $A_{\mathcal{LT},1/d}$ n'est autre que la complétée π-adique de $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}]$.

---

[10] On rappelle que cette variante est intermédiaire entre $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n}$ et $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n+1}$. Comme on s'intéresse en fait à $A_{\mathcal{LT},\infty} = \bigcup_n A_{\mathcal{LT},n}$, le choix de cette variante de la tour $(\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n})_n$ est parfaitement inoffensif.

4. Réduction aux domaines fondamentaux

Dans cette section, nous allons d'abord énoncer un théorème établissant l'existence d'un isomorphisme $\varphi_{\mathrm{Fond.}} = \varphi_{P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}$ des domaines fondamentaux des tours de Lubin-Tate et de Drinfeld ayant certaines propriétés –il sera facile de vérifier qu'il peut exister au plus un isomorphisme ayant ces propriétés. Admettant momentanément ce théorème, dont la démonstration sera donnée dans la section 5, on construira ensuite par recollement l'isomorphisme du théorème 1.5.3 en utilisant la propriété d'unicité de l'isomorphisme $\varphi_{\mathrm{Fond.}}$.

4.1. Enoncé du théorème. — Soient $A_{\mathcal{LT},\infty} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\mathcal{LT},n}$, $A_{\mathcal{D}r,\infty} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\mathcal{D}r,n}$ et $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ et $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ leurs complétées π-adiques respectives.

On dispose donc, du côté Lubin-Tate (*cf.* 2.2)

– d'une matrice

$$R_{\mathcal{LT}} = R_X = \mathrm{Id}_d + \sum_{j\geq 1} \mathrm{diag}(r_{1,j}^{\mathcal{LT}}, \cdots, r_{d,j}^{\mathcal{LT}})\, {}^tP^{-j},$$

à coefficients dans $K \mathbin{\widehat{\widehat{\otimes}}} A_{\mathcal{LT},0}$ (et *a fortiori*, dans $K \mathbin{\widehat{\widehat{\otimes}}} \widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$) et possédant une matrice inverse $R_{\mathcal{LT}}^{-1}$ appartenant elle aussi au complété π-adique $(\mathrm{Id}_d + \mathrm{diag}(A_{\mathcal{LT},0}^d)[{}^tP^{-1}]\,{}^tP^{-1})^{\wedge}$

– d'une matrice

$$S_{\mathcal{LT}} = S_X = \sum_{j\geq 0} \mathrm{diag}(s_{1,j}^{\mathcal{LT}}, \cdots, s_{d,j}^{\mathcal{LT}})\, {}^tP^{j}$$

à coefficients dans $\mathcal{O} \mathbin{\widehat{\otimes}} A_{\mathcal{LT},\infty}$, possédant une matrice inverse $S_{\mathcal{LT}}^{-1}$ à coefficients dans $\mathcal{O} \mathbin{\widehat{\otimes}} (A_{\mathcal{LT},\infty}[\pi^{-1}])$ qui est elle aussi triangulaire inférieure modulo z

– du produit $T_{\mathcal{LT}} = S_{\mathcal{LT}} R_{\mathcal{LT}}^{-1}$ que l'on a déjà considéré dans la remarque 2.2.4 ; c'est une matrice à coefficients dans $K \mathbin{\widehat{\widehat{\otimes}}} \widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$.

De même, du côté Drinfeld, on dispose (*cf.* 2.3)

– d'une matrice

$$R_{\mathcal{D}r} = R_X = \mathrm{Id}_d + \sum_{j\geq 1} P^{-j}\, \mathrm{diag}(r_{1,j}^{\mathcal{D}r}, \cdots, r_{d,j}^{\mathcal{D}r}),$$

à coefficients dans $K \mathbin{\widehat{\widehat{\otimes}}} A_{\mathcal{D}r,0}$ (et *a fortiori*, dans $K \mathbin{\widehat{\widehat{\otimes}}} \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$) et possédant une matrice inverse $R_{\mathcal{D}r}^{-1}$ appartenant elle aussi au complété π-adique $(\mathrm{Id}_d + \mathrm{diag}(A_{\mathcal{D}r,0}^d)[P^{-1}]P^{-1})^{\wedge}$

– d'une matrice

$$S_{\mathcal{D}r} = S_X = \sum_{j\geq 0} P^{j}\, \mathrm{diag}(s_{1,j}^{\mathcal{D}r}, \cdots, s_{d,j}^{\mathcal{D}r})$$

à coefficients dans $\mathcal{O} \mathbin{\widehat{\otimes}} A_{\mathcal{D}r,\infty}$, possédant une matrice inverse $S_{\mathcal{D}r}^{-1}$ à coefficients dans $\mathcal{O} \mathbin{\widehat{\otimes}} (A_{\mathcal{D}r,\infty}[\pi^{-1}])$ qui est elle aussi triangulaire supérieure modulo z

– du produit $T_{\mathcal{D}r} = S_{\mathcal{D}r} R_{\mathcal{D}r}^{-1}$ que l'on a déjà considéré dans la remarque 2.3.7 ; c'est une matrice à coefficients dans $K \,\widehat{\widehat{\otimes}}\, \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$.

Pour tout simplexe $\underline{\Delta}$ de l'immeuble étendu de $\mathrm{GL}_d(K)$, on note $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,\underline{\Delta}} = \varprojlim_n \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n,\underline{\Delta}}$ et $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,\underline{\Delta}} = \varprojlim_n \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n,\underline{\Delta}}$ les limites projectives complétées.

On a alors le résultat suivant, dont la démonstration est reportée à la section 5 (sauf pour la partie concernant l'unicité).

Théorème 4.1.1. — *1) Il existe un unique isomorphisme de $\breve{\mathcal{O}}$-schémas formels*

$$\varphi_{P^{-\bullet}\mathcal{O}^d} : \breve{\mathcal{M}}^{0}_{\mathcal{LT},\infty,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d} = \mathrm{Spf}\, \widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty} \to \mathrm{Spf}\, \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty} = \breve{\mathcal{M}}^{0}_{\mathcal{D}r,\infty,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}$$

tel que $\varphi^*_{P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}(T_{\mathcal{D}r}) = {}^t T_{\mathcal{LT}}$.

2) Cet isomorphisme fait se correspondre les sous-schémas fermés de $\mathrm{Spf}\, \widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ *et* $\mathrm{Spf}\, \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ *d'équations respectives $(x_i^q/x_{i+1} = 0)$ et $(y_i^{q-1} = 0)$ et induit donc un isomorphisme $\varphi_{(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_i} : \breve{\mathcal{M}}^{0}_{\mathcal{LT},\infty,(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_i} =$* $\mathrm{Spf}\, A_{\mathcal{LT},\infty}[(x_i^q/x_{i+1})^{-1}]^\wedge \to \mathrm{Spf}\, A_{\mathcal{D}r,\infty}[y_i^{-1}]^\wedge = \breve{\mathcal{M}}^{0}_{\mathcal{D}r,\infty,(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_i}$, *pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ ($^\wedge$ désigne bien sûr la complétion π-adique ; voir le théorème 2.3.2(5) et la proposition 3.1.4(2) pour les deux égalités et pour la notation $(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_i$).*

On va maintenant s'intéresser à l'unicité de ce morphisme (et à celle du morphisme des sous-schémas formels ouverts complémentaires résultant du point (2) du théorème) et à ses conséquences.

4.2. Unicité de $\varphi_{P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}$ et de ses localisés, équivariance et recollement. — Soient $I \subsetneq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et $(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_I = \bigcap_{i\in I}(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_i$ le simplexe de l'immeuble étendu obtenu à partir de $P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$ en omettant les sommets $P^{-i}\mathcal{O}^d$ pour $i \in I$ (modulo d). On considère le morphisme $\varphi_{(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_I} : \breve{\mathcal{M}}^{0}_{\mathcal{LT},\infty,(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_I} =$ $\mathrm{Spf}\, A_{\mathcal{LT},\infty}[(x_i^q/x_{i+1})^{-1}_{i\in I}]^\wedge \to \mathrm{Spf}\, A_{\mathcal{D}r,\infty}[(y_i^{-1})_{i\in I}]^\wedge = \breve{\mathcal{M}}^{0}_{\mathcal{D}r,\infty,(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_I}$ induit par le deuxième point du théorème 4.1.1.

Pour alléger les notations on note encore $R_{\mathcal{LT}}, \cdots$ les matrices à coefficients dans $K \,\widehat{\widehat{\otimes}}\, A_{\mathcal{LT},\infty}[(x_i^q/x_{i+1})^{-1}_{i\in I}]^\wedge$ (resp. $K \,\widehat{\widehat{\otimes}}\, A_{\mathcal{D}r,\infty}[(y_i^{-1})_{i\in I}]^\wedge$) obtenues par l'extension des scalaires $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty} \to A_{\mathcal{LT},\infty}[(x_i^q/x_{i+1})^{-1}_{i\in I}]^\wedge$ (resp. $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty} \to A_{\mathcal{D}r,\infty}[(y_i^{-1})_{i\in I}]^\wedge$). On a donc encore $\varphi^*_{(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_I}(T_{\mathcal{D}r}) = {}^t T_{\mathcal{LT}}$.

Il résulte de la proposition suivante que le morphisme $\varphi_{(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_I}$ est l'unique morphisme vérifiant cette propriété. La démonstration qu'on en donnera reprend (et précise) une partie de la remarque 2.3.7.

Proposition 4.2.1. — *Soit S est un $\breve{\mathcal{O}}$-schéma formel muni d'une matrice $T \in M_d(K \,\widehat{\widehat{\otimes}}\, \mathcal{O}_S)$. Il existe au plus un morphisme $\psi : S \to \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\infty,(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_I}$ tel que $\psi^*(T_{\mathcal{D}r}) = T$.*

Pour démontrer cette proposition, on va d'abord s'intéresser à la croissance des normes π-adiques des coefficients $r_{i,j}^*$ et $s_{i,j}^*$ des matrices R_* et S_* (pour $* = \mathcal{LT}$ ou $\mathcal{D}r$), ainsi qu'à celle des coefficients analogues (notés $\widetilde{r}_{i,j}^*$ et $\widetilde{s}_{i,j}^*$) pour les matrices $\widetilde{R}_* = R_*^{-1}$ et $\widetilde{S}_* = S_*^{-1}$.

Pour toute $\breve{\mathcal{O}}$-algèbre A plate et intégralement close dans $A[\pi^{-1}]$, on note $\nu : A[\pi^{-1}] \to \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$ la « semi-norme additive » de $A[\pi^{-1}]$ définie par

$$\nu(a) = \sup \{V \in \mathbb{Q} \ ; \ \pi^{-nV} a^n \in \widehat{A}_{*,\infty}, \forall n \in \mathbb{N} \cap V^{-1}\mathbb{N}\} \ ;$$

c'est une norme additive lorsque A ne possède pas d'élément non nul divisible par π^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou, de manière équivalente, lorsque A est séparée pour la topologie π-adique).

Pour tous $\nu_1 \leq \nu_2$ (avec $\nu_1 \in \mathbb{Q} \cup \{-\infty\}$ et $\nu_2 \in \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$) on considère les $A[\pi^{-1}]$-sous-modules $\mathcal{H}(]\nu_1, \nu_2[, A)$ et $\mathcal{H}(]\nu_1, +\infty], A)$ de

$$A[\pi^{-1}][[z, z^{-1}]] = \{a(z) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j z^j ; a_j \in \widehat{A}_{*,\infty}[\pi^{-1}], \forall j \in \mathbb{Z}\}$$

définis par

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(]\nu_1, \nu_2[, A) &= \{a(z) \, ; \ \varliminf_{j\to+\infty} \frac{\nu(a_j)}{j} \geq -\nu_1 \text{ et } \varliminf_{j\to-\infty} \frac{\nu(a_j)}{j} \geq -\nu_2\} \\ \text{et} \qquad \mathcal{H}(]\nu_1, +\infty], A) &= \{a(z) \, ; \ \varliminf_{j\to+\infty} \frac{\nu(a_j)}{j} \geq -\nu_1 \text{ et } a_j = 0, \forall j \leq 0\} \,. \end{aligned}$$

Lorsque A est l'anneau des entiers $\mathcal{A}^{\text{ent}} = \{a \in \mathcal{A}; \nu(a) \geq 0\}$ d'une algèbre de Tate $\mathcal{A}(= A[\pi^{-1}])$, le $\mathcal{A}$-module $\mathcal{H}(]\nu_1, +\infty], A)$ est celui des fonctions holomorphes sur le disque ouvert $\{\nu_1 < v(z)\}$ au-dessus de $\operatorname{Spm} \mathcal{A}$ et le $\mathcal{A}$-module $\mathcal{H}(]\nu_1, \nu_2[, A)$ est celui des fonctions holomorphes sur la couronne ouverte $\{\nu_1 < v(z) < \nu_2\}$ au-dessus de $\operatorname{Spm} \mathcal{A}$, ce qui justifie la notation adoptée.

Lorsque A est séparée et complète pour la topologie π-adique, la série $\sum_{j=j_1+j_2} a_{j_1} b_{j_2}$ définissant les coefficients du produit de deux séries $a(z), b(z) \in \mathcal{H}(]\nu_1, \nu_2[, A)$ converge, ce qui munit $\mathcal{H}(]\nu_1, \nu_2[, A)$ d'une structure de $A[\pi^{-1}]$-algèbre associative et commutative.

On se donne maintenant un point $(R_{\mathcal{LT}}, S_{\mathcal{LT}})$ de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}$ à valeurs dans A ou un point $(R_{\mathcal{D}r} P^{-\bullet}\mathcal{O}^d, S_{\mathcal{D}r})$ de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\infty,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}$ à valeurs dans A.

Proposition 4.2.2. — *Les matrices R_* et S_* (avec $* = \mathcal{LT}$ ou $\mathcal{D}r$) vérifient*
- *la matrice R_* est à coefficients dans $\mathcal{H}(]0, 1[, A)$*
- *la matrice S_* est à coefficients dans $\mathcal{O} \widehat{\otimes} A$ et a fortiori dans $\mathcal{H}(]0, +\infty], A)$*
- *la matrice R_* a une matrice inverse R_*^{-1} à coefficients dans $\mathcal{H}(]0, +\infty[, A)$*
- *la matrice S_* a une matrice inverse S_*^{-1} à coefficients dans $\mathcal{H}(]\frac{1}{q}, +\infty], A)$.*

En particulier, les quatre matrices R_*, S_*, R_*^{-1} et S_*^{-1} sont toutes à coefficients dans la $A[\pi^{-1}]$-algèbre $\mathcal{H}(]\frac{1}{q}, 1[, A)$.

Démonstration. — La partie de l'énoncé concernant les matrices S_* est évidente. On va maintenant démontrer celle concernant les matrices R_*^{-1}.

On sait déjà que R_* admet un matrice inverse à coefficients dans $K\widehat{\widehat{\otimes}}A$ et on veut démontrer que cette matrice inverse est en fait à coefficients dans $\mathcal{H}(]0,+\infty[,A)$. Du côté Lubin-Tate, cela résulte du fait que la matrice

$$[(\Phi_{\mathcal{LT}}\,{}^tP^{-1})({}^tP\,{}^{\tau}\Phi_{\mathcal{LT}}\,{}^tP^{-2})\cdots({}^tP^{nd-1}\,{}^{\tau^{nd-1}}\Phi_{\mathcal{LT}}\,{}^tP^{-nd})]$$

a ses coefficients dans $A\oplus Az^{-1}\oplus\cdots\oplus Az^{-n}$, qu'elle est congrue à $R_{\mathcal{LT}}^{-1}$ modulo $(x_1,\cdots,x_d)^{q^{nd}}$ et que $\nu(x_i)\geq(q-1)/(q^d-1),\forall i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Du côté Drinfeld, on a $R_{\mathcal{D}r}^{-1}\equiv\mathrm{Id}_d+\sum_{1\leq j\leq d-1}P^{-j}\,\mathrm{diag}(\widetilde{r}_{i,j})_{1\leq i\leq d}\pmod{\pi}$ (on rappelle qu'on a $P^{-i+d-1}\mathcal{O}^d\,\widehat{\widehat{\otimes}}\,(A/\pi A)\subset RP^{-i}\mathcal{O}^d\,\widehat{\widehat{\otimes}}\,(A/\pi A)$, voir 2.3). La matrice

$$[\Phi_{\mathcal{D}r}\,{}^{\tau}\Phi_{\mathcal{D}r}\cdots\,{}^{\tau^{nd-1}}\Phi_{\mathcal{D}r}(\mathrm{Id}_d+\sum_{1\leq j\leq d-1}P^{-j}\,\mathrm{diag}(\widetilde{r}_{i,j}^{\,q^{nd}})_{1\leq i\leq d})]$$

est donc congrue à R^{-1} modulo $\pi^{q^{nd}}$. Elle a ses coefficients dans $A\oplus Az^{-1}\oplus\cdots\oplus Az^{-n-1}$; la propriété de l'énoncé pour $R_{\mathcal{D}r}^{-1}$ en résulte.

Du côté Lubin-Tate comme du côté Drinfeld, on a $\det R_*^{-1}=(1-\pi/z)(1-\pi^q/z)\cdots$, comme il résulte de l'équation $(1-\pi/z)\;{}^{\tau}\!\det R_*^{-1}=\det R_*^{-1}$ et du fait que $\det R_*^{-1}$ est congrue à 1 (modulo $(x_1,\cdots,x_d)$ du côté Lubin-Tate ; modulo π du côté Drinfeld). La proposition pour R_* en résulte en développant $(1-\pi^{q^n}/z)^{-1}$ en puissances de z^{-1} et en exprimant R_* comme produit de $\det R_*$ et de la transposée de la matrice des cofacteurs de R_*^{-1}.

Enfin, notant $\det S_*^{-1}=\sum_{j\in\mathbb{N}}\widetilde{s}_jz^j$, on a $\nu(\widetilde{s}_j)=-(q-1)^{-1}-jq^{-1}$, comme on le voit en considérant l'équation $(-1)^{d-1}\pi\widetilde{s}_j^{\,q}+\widetilde{s}_j=(-1)^{d-1}\widetilde{s}_{j-1}^{\,q}$ qui résulte elle-même de l'équation $(-1)^{d-1}(z-\pi)\,{}^{\tau}\!\det S_*^{-1}=\det S_*^{-1}$ (on rappelle que $\widetilde{s}_0=(s_{1,0}^*\cdots s_{d,0}^*)^{-1}$ est inversible dans $A[\pi^{-1}]$). La propriété pour S_* en résulte en exprimant S_*^{-1} comme produit de $\det S_*^{-1}$ et de la transposée de la matrice des cofacteurs de S_*. □

Remarque 4.2.3. — On obtient en fait l'énoncé plus fort suivant : les coefficients des matrices R_* et S_*^{-1} sont des fonctions méromorphes sur le disque épointé $\{0<v(z)<+\infty\}$ au-dessus de la fibre générique (au sens de Raynaud-Fargues, [**Far1**, ch. IV]) de $\mathrm{Spf}\,A$, dont les pôles sont simples et situés respectivement en $z=\pi,\pi^q,\pi^{q^2},\cdots$ et en $z=\cdots,\pi^{q^{-2}},\pi^{q^{-1}}$ (ceci a un sens car π admet alors des racines q^n-ièmes dans A, pour tout $n\in\mathbb{N}$).

Démonstration de la proposition 4.2.1. — Si ψ et ψ' sont deux morphismes vérifiant cette propriété, on a l'égalité $\psi'^*(S_{\mathcal{D}r}^{-1})\psi^*(S_{\mathcal{D}r})=\psi'^*(R_{\mathcal{D}r}^{-1})\psi^*(R_{\mathcal{D}r})$ dans la $\mathcal{O}_S[\pi^{-1}]$-algèbre (associative) $M_d(\mathcal{H}(]\frac{1}{q},1[,\mathcal{O}_S))$. Le premier membre de cette égalité est de la forme $\sum_{j\geq0}\mathrm{diag}(a_{i,j})_iP^j$ alors que le second membre est de la forme $\mathrm{Id}_d+\sum_{j\geq1}\mathrm{diag}(b_{i,j})_iP^{-j}$, ce qui force les deux membres à être la matrice identité ; on a donc $\psi^*(S_{\mathcal{D}r})=\psi'^*(S_{\mathcal{D}r})$ et $\psi^*(R_{\mathcal{D}r})=\psi'^*(R_{\mathcal{D}r})$. Les points ψ et ψ' de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\infty,(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_I}$ à valeurs dans S coïncident donc. □

Remarque 4.2.4. — Dans la démonstration d'unicité ci-dessus, il est vraiment nécessaire d'utiliser la convergence sur une couronne commune résultant de la proposition 4.2.2, comme on s'en convainc en considérant l'exemple des deux développements

$$\begin{array}{rrcl} & (z-\pi)^{-1}_{]1,+\infty]} & = & -\pi^{-1}(1+z/\pi+(z/\pi)^2+\cdots)\in\mathcal{H}(]1,+\infty],\mathcal{O}) \\ \text{et} & (z-\pi)^{-1}_{]0,1[} & = & z^{-1}(1+\pi/z+(\pi/z)^2+\cdots)\in\mathcal{H}(]0,1[,\mathcal{O}) \end{array}$$

de $(z-\pi)^{-1}$ et des deux décompositions distinctes

$$(z-\pi)(1-\pi/z)^{-1}_{]0,1[}=z=(z+\pi)(1+\pi/z)^{-1}_{]0,1[}\,.$$

En fait lorsqu'on essaie d'appliquer à ces deux décompositions le raisonnement ci-dessus, on rencontre une simplification « illégitime » du type suivant.

On considère l'égalité $(z-\pi)\sum_{j\in\mathbb{Z}}z^j\pi^{-j-1}=0$ dans le $\mathcal{O}$-module $\mathcal{O}[[z,z^{-1}]]$. On ne peut pas simplifier cette égalité en la multipliant par l'un des deux développements de $(z-\pi)^{-1}$ ci-dessus car le produit partiel (c'est-à-dire, non partout défini) $a,b\in\mathcal{O}[[z,z^{-1}]]\mapsto ab$ ne vérifie pas l'identité $(ab)c=a(bc)$ sur son domaine de définition.

On note respectivement $W_{\mathcal{LT}}$ et $W_{\mathcal{D}r}$ les données de descente de Weil du côté Lubin-Tate et du côté Drinfeld. On rappelle que ces données de descente agissent par le décalage $\underline{\Lambda}\mapsto\underline{\Lambda}[1]$ sur l'ensemble $\mathcal{I}^{\text{ét}}$ des simplexes de l'immeuble étendu de $\mathrm{GL}_d(K)$ et que $\delta\in D^\times$ agit aussi sur $\mathcal{I}^{\text{ét}}$ par le décalage $\underline{\Lambda}\mapsto\underline{\Lambda}[v(\mathrm{Nr}\,\delta)]$ (où Nr désigne bien sûr la norme réduite). La proposition 4.2.1 admet alors le corollaire suivant.

Corollaire 4.2.5. — *Soient $I\subsetneq\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, $J\subsetneq\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et $(\gamma,\delta,n)\in\mathrm{GL}_d(K)\times D^\times\times\mathbb{Z}$ tel que $\gamma(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_I[n+v(\mathrm{Nr}\,\delta)]=(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_J$. Le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc} \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_I}[\tau^{-n}] & \xrightarrow{(\gamma,\delta)\circ W^n_{\mathcal{LT}}} & \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\infty,(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_J} \\ \varphi_{(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_I}\downarrow & & \varphi_{(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_J}\downarrow \\ \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_I}[\tau^{-n}] & \xrightarrow{(\gamma,\delta)\circ W^n_{\mathcal{D}r}} & \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\infty,(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_J} \end{array}$$

est alors commutatif –on rappelle que les $\breve{\mathcal{O}}$-schémas formels $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_I}$ et $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_I}[\tau^{-n}]$ (resp. $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\infty,(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_I}$ et $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\infty,(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_I}[\tau^{-n}]$) ont le même $\breve{\mathcal{O}}$-schéma formel sous-jacent, ce qui donne un sens à la flèche verticale de gauche.

Démonstration. — Il résulte des formules du paragraphe 2.2.1 donnant l'action de $\mathrm{GL}_d(K)\times D^\times$ et de $W_{\mathcal{LT}}$ sur la tour de Lubin-Tate que l'on a $((\gamma,\delta)\circ W^n_{\mathcal{LT}})^*T_{\mathcal{LT}}={}^t\gamma_z^{-1}T_{\mathcal{LT}}\,{}^tP^n\,{}^t\delta_z$ (voir la remarque 2.2.4). Il résulte aussi des formules du paragraphe 2.3.1 donnant l'action de $\mathrm{GL}_d(K)\times D^\times$ et de $W_{\mathcal{D}r}$ sur la tour de Drinfeld que l'on a $((\gamma,\delta)\circ W^n_{\mathcal{D}r})^*T_{\mathcal{D}r}=\delta_zP^nT_{\mathcal{D}r}\gamma^{-1}$ (voir la remarque 2.3.7). Le corollaire en résulte en appliquant la proposition 4.2.1 aux deux morphismes de

$\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_I}$ vers $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\infty,(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_J}[\tau^n]$ obtenus à partir du diagramme ci-dessus et à la matrice $T = {}^t({}^t\gamma_z^{-1} T_{\mathcal{LT}}\, {}^tP^n\, {}^t\delta_z) = \delta_z P^n\, {}^tT_{\mathcal{LT}}\gamma^{-1}$. □

On considère maintenant un simplexe arbitraire $\underline{\Lambda}$ de l'immeuble de Bruhat-Tits étendu de $\mathrm{GL}_d(K)$ et on choisit un triplet $(\gamma,\delta,n) \in \mathrm{GL}_d(K)\times D^\times \times \mathbb{Z}$ tel que $\gamma\underline{\Lambda}[n+v(\mathrm{Nr}\,\delta)]$ soit un sous-simplexe $(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_I$ du simplexe maximal fondamental $P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$. Il résulte du corollaire ci-dessus que

$$\varphi_{\underline{\Lambda}} = W_{\mathcal{D}r}^{-n}\circ(\gamma,\delta)^{-1}\circ\varphi_{(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_I}\circ(\gamma,\delta)\circ W_{\mathcal{LT}}^n : \breve{\mathcal{M}}^0_{\mathcal{LT},\infty,\underline{\Lambda}} \to \breve{\mathcal{M}}^0_{\mathcal{D}r,\infty,\underline{\Lambda}}$$

ne dépend pas du choix du triplet (γ,δ,n). On obtient de cette manière un morphisme $\mathrm{GL}_d(K)\times D^\times$-équivariant $(\varphi_{\underline{\Lambda}} : \breve{\mathcal{M}}^0_{\mathcal{LT},\infty,\underline{\Lambda}} \to \breve{\mathcal{M}}^0_{\mathcal{D}r,\infty,\underline{\Lambda}})_{\underline{\Lambda}\in\mathcal{I}^{\text{ét}}}$, compatible aux données de descente de Weil [(11)].

Pour achever la construction de l'isomorphisme φ du théorème 1.5.3 à partir de l'isomophisme $\varphi_{P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}$ du théorème 4.1.1, il reste encore à vérifier que les morphismes $\varphi_{\underline{\Lambda}}$ sont compatibles aux immersions ouvertes $\breve{\mathcal{M}}^0_{\mathcal{LT},\infty,\underline{\Lambda}'} \hookrightarrow \breve{\mathcal{M}}^0_{\mathcal{LT},\infty,\underline{\Lambda}'}$ et $\breve{\mathcal{M}}^0_{\mathcal{D}r,\infty,\underline{\Lambda}'} \hookrightarrow \breve{\mathcal{M}}^0_{\mathcal{D}r,\infty,\underline{\Lambda}'}$ associées à une inclusion $\underline{\Lambda}' \subset \underline{\Lambda}$ de simplexes de l'immeuble étendu. En utilisant l'action de $\mathrm{GL}_d(K)\times D^\times$, on se ramène immédiatement au cas où $\underline{\Lambda}$ est un sous-simplexe du simplexe fondamental $P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$, pour lequel cette compatibilité est tautologique !

On achève ce paragraphe sur une remarque triviale mais rassurante.

Remarque 4.2.6. — En rang $d=1$ les tours de Drinfeld coïncident *a priori* puisque les notions de $\mathcal{O}$-module formel de hauteur d et de $\mathcal{O}_D$-module formel spécial de hauteur d^2 se réduisent toutes deux à celle de $\mathcal{O}$-module formel de hauteur 1. Il résulte immédiatement de la proposition 4.2.1 que dans ce cas, l'isomorphisme φ est l'identité !

5. Démonstration du théorème 4.1.1

Dans cette section, nous « couperons en deux » la construction de l'isomorphisme $\varphi_{P^{-\bullet}\mathcal{O}^d} : \mathrm{Spf}\,\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty} \to \mathrm{Spf}\,\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ en introduisant (5.1) un $(\overline{\mathbb{F}}_q)$-schéma formel affine intermédiaire $\mathrm{Spf}\,A_{\mathcal{I}nt}$ « classifiant » les matrices $T_{\mathcal{D}r} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} P^j\,\mathrm{diag}(t_{i,j})$ vérifiant l'équation $PT_{\mathcal{D}r} = {}^\tau T_{\mathcal{D}r}$ et certaines conditions supplémentaires. Ces conditions supplémentaires seront destinées à garantir qu'elles proviennent de $\mathrm{Spf}\,\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ et (après transposition) de $\mathrm{Spf}\,\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$; elles seront en fait « dictées » par l'observation des propriétés des morphismes de produit ci-dessous.

---

(11) On n'a donc pas procédé exactement comme annoncé dans 1.5, puisqu'on a travaillé avec l'immeuble étendu de $\mathrm{GL}_d(K)$ au lieu de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_d(K)$. Pour rester fidèle à la démarche annoncée dans 1.5, il faudrait d'abord induire $\varphi_{(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_I}$ à la classe de décalage de $(P^{-\bullet}\mathcal{O}^d)_I$ puis induire de ces classes de décalage à l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{PGL}_d(K)$. Cela revient évidemment au même !

La construction de l'isomorphisme $\varphi_{P^{-\bullet}\mathcal{O}^d} : \mathrm{Spf}\,\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty} \to \mathrm{Spf}\,\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ se réduira alors à celle d'un diagramme

$$\mathrm{Spf}\,\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty} \underset{\text{décomposition}}{\overset{\text{produit}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Spf}\,A_{\mathcal{I}nt} \underset{\text{produit}}{\overset{\text{décomposition}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Spf}\,\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}.$$

tel que les composées de deux flèches superposées soient l'identité. Les morphismes de produit seront construits en 5.2 et les morphismes de décomposition le seront en 5.3.

En fait, comme nous l'avons déjà souligné ci-dessus, $A_{\mathcal{I}nt}$ est a priori seulement une $\overline{\mathbb{F}}_q$-algèbre topologique et il restera à vérifier que les deux structures de $\breve{\mathcal{O}}$-algèbre sur $A_{\mathcal{I}nt}$ induites par les deux morphismes de décomposition coïncident. Ceci résultera de considérations sur les déterminants des matrices R_*, S_* et T_* (voir 5.4).

Enfin, nous donnerons une démonstration du point (2) du théorème 4.1.1 dans le très court paragraphe 5.5.

5.1. L'anneau intermédiaire. — Lorsque la matrice $T_{\mathcal{D}r} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} P^j \operatorname{diag}(t_{i,j})$ vérifie l'équation $PT_{\mathcal{D}r} = {}^{\tau}T_{\mathcal{D}r}$, on a $t_{i,j-1} = t_{i,j}^q, \forall i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}$ et donc $t_{i,j} = t_{i,0}^{q^{-j}}$. Abandonnant l'indice 0, on notera t_i l'élément $t_{i,0}$.

On introduit alors le monoïde $\mathbb{M}[q^{-1}]$ formé des éléments de $\mathbb{Q}^d$ dont le produit par une puissance de q est dans $\mathbb{M}$ et la $\overline{\mathbb{F}}_q$-algèbre $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]$. On note t_i l'élément $e^{e_i} = e^{(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)}$ de cette algèbre, de sorte que l'on a aussi $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]] = \overline{\mathbb{F}}_q[t_i^{q^{-j}}, (t_i^q/t_{i+1})^{q^{-j}}]_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j\in\mathbb{N}}$. On introduit encore le complété $(t_1\cdots t_d)$-adique $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^{\wedge}$ de $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]$. La matrice $T_{\mathcal{D}r} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} P^j \operatorname{diag}(t_1^{q^{-j}}, \cdots, t_d^{q^{-j}})$ et la matrice $T_{\mathcal{LT}} = {}^tT_{\mathcal{D}r}$ sont alors à coefficients dans le complété $(t_1\cdots t_d)$-adique de $K \mathbin{\widehat{\otimes}} \overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]$ –ou, ce qui revient au même, dans $K \mathbin{\widehat{\widehat{\otimes}}} \overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^{\wedge}$.

Un calcul facile montre que $\det T_{\mathcal{LT}} = \det T_{\mathcal{D}r} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} t^{q^{-j}}((-1)^{d-1}z)^j$ où t est donné par la formule suivante

$$t = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\bar\sigma) \prod_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} t_i^{q^{\sigma(i)-i}},$$

où

- la somme porte sur l'ensemble des applications $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que $i \mapsto (\sigma(i) - i)$ soit périodique de période d et que $\sum_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}(\sigma(i) - i) = 0$
- on note $\bar\sigma : \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ l'application quotient et $\operatorname{sgn}(\bar\sigma)$ sa signature –on convient qu'elle est nulle si $\bar\sigma$ n'est pas une permutation.

Dans cette somme on remarque en particulier le terme $t_1\cdots t_d$, qui correspond à $\sigma = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$. On vérifiera dans le paragraphe suivant que $t/(t_1\cdots t_d)$ appartient à $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^{\wedge}$.

On pose alors $A_{\mathcal{I}nt} = \overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^{\wedge}[(t/(t_1\cdots t_d))^{-1}]^{\wedge}$. Dans le paragraphe suivant, on donnera une définition équivalente de $A_{\mathcal{I}nt}$.

5.1.1. Etude de $A_{\mathcal{I}nt}$. — Si $(\alpha_1,\cdots,\alpha_d)\in\mathbb{M}[q^{-1}]$, dans $\overline{\mathbb{F}}_q[(q^d-1)^{-1}\mathbb{M}[q^{-1}]]^{\frown}$ on a $t_1^{\alpha_1}\cdots t_d^{\alpha_d}=\prod_{i=1}^d (t_i^q/t_{i+1})^{\beta_i}$, où les β_i sont déterminés de façon unique par les équations $q\beta_i-\beta_{i-1}=\alpha_i$. Plus explicitement on a

$$\beta_i=\frac{q^{d-1}\alpha_i+q^{d-2}\alpha_{i-1}+\cdots+\alpha_{i-(d-1)}}{q^d-1}.$$

Si $\gamma_1,..,\gamma_d$ appartiennent à $\mathbb{N}[1/q]$, et si pour tout $i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, on a $\gamma_i\le\beta_i$, alors $t_1^{\alpha_1}\cdots t_d^{\alpha_d}$ est divisible dans $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^{\frown}$ par $\prod_{i=1}^d (t_i^q/t_{i+1})^{\gamma_i}$.

Pour montrer que $t/(t_1\cdots t_d)$ appartient à $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^{\frown}$ nous allons établir que pour chaque σ dans l'ensemble des $\sigma:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ tel que $i\mapsto(\sigma(i)-i)$ soit périodique de période d, $\bar\sigma:\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ soit une permutation, et $\sum_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}(\sigma(i)-i)=0$, $\prod_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} t_i^{q^{\sigma(i)-i}}/(t_1\cdots t_d)$ appartient à $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^{\frown}$, et tend vers 0 quand σ sort des parties finies de cet ensemble.

Pour cela nous écrivons

$$\prod_{i=1}^d t_i^{q^{\sigma(i)-i}}/(t_1\cdots t_d)=\prod_{i=1}^d (t_i^q/t_{i+1})^{\beta_i},$$

où

$$(q^d-1)\beta_d=(q^{\sigma(d)-1}+q^{\sigma(d-1)-1}+\cdots+q^{\sigma(1)-1})-(q^{d-1}+q^{d-2}+\cdots+1)$$

et les autres β_i s'obtiennent à partir de cette formule en conjuguant σ par une translation de i dans $\mathbb{Z}$. Grâce à l'hypothèse que $\bar\sigma$ est une permutation et que $\sum_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}(\sigma(i)-i)=0$ on voit facilement que $\beta_i\ge 0$ pour tout $i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et par conséquent l'expression ci-dessus appartient bien à $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^{\frown}$. De plus, quand σ sort des parties finies de l'ensemble des $\sigma:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ tels que $i\mapsto(\sigma(i)-i)$ soit périodique de période d, $\bar\sigma:\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ soit une permutation, et $\sum_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}(\sigma(i)-i)=0$, les β_i tendent vers $+\infty$ et donc l'expression ci-dessus tend vers 0.

Dans la suite on notera toujours C une constante dans $\mathbb{N}^*[1/q]$ ne dépendant que de d, mais pouvant varier d'une inégalité à l'autre.

On voit facilement, par stricte convexité de la fonction $t\mapsto q^t$, que $\beta_d\ge C$ pour tout σ tel que $\sigma(\{1,2,\cdots,d\})\ne\{1,2,\cdots,d\}$. De même on peut vérifier que pour $i\in\{1,\cdots,d\}$, $\beta_i\ge C$ pour tout σ tel que $\sigma(\{i+1-d,i+2-d,\cdots,i\})\ne\{i+1-d,i+2-d,\cdots,i\}$.

Par conséquent, modulo l'idéal de $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^{\frown}$ engendré par $(t_d^q/t_1)^C$, on a l'égalité :

$$t/(t_1\cdots t_d)=\det\begin{pmatrix} t_1 & t_1^q & \cdots & t_1^{q^{d-1}}\\ t_2^{q^{-1}} & t_2 & \cdots & t_2^{q^{d-2}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ t_d^{q^{-(d-1)}} & t_d^{q^{-(d-2)}} & \cdots & t_d\end{pmatrix}/(t_1\cdots t_d).$$

5.1.2. Intermède : le déterminant de Moore. — Nous rencontrerons par la suite de nombreux déterminants du type de celui ci-dessus. De façon générale, nous appelons

$$\mathrm{Moore}(X_1,\cdots,X_k)=\det\begin{pmatrix} X_1 & X_1^q & \cdots & X_1^{q^{k-1}} \\ X_2 & X_2^q & \cdots & X_2^{q^{k-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_k & X_k^q & \cdots & X_k^{q^{k-1}} \end{pmatrix}.$$

On a

$$\mathrm{Moore}(X_1,\cdots,X_k)=c\prod_{[\alpha_1,\cdots,\alpha_k]\in\mathbb{P}^{k-1}(\mathbb{F}_q)}(\alpha_1X_1+\cdots+\alpha_kX_k),$$

où $c\in\mathbb{F}_q^\times$ dépend du choix des relèvements à $\mathbb{F}_q^k\backslash\{0\}$ des éléments de $\mathbb{P}^{k-1}(\mathbb{F}_q)$. De façon plus précise on a

$$\mathrm{Moore}(X_1,\cdots,X_k)=\prod_{i=1}^{k}\prod_{\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1}\in\mathbb{F}_q}(\alpha_1X_1+\alpha_2X_2+\cdots+\alpha_{i-1}X_{i-1}+X_i).$$

5.1.3. Fin de l'étude de $A_{\mathcal{I}nt}$. — Donc, modulo l'idéal de $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$ engendré par $(t_d^q/t_1)^C$, on a l'égalité :

$$t/(t_1\cdots t_d)=\mathrm{Moore}(t_1,t_2^{q^{-1}},\cdots,t_d^{q^{-(d-1)}})/(t_1\cdots t_d).$$

De même, pour tout $i\in\{1,\cdots,d\}$, on a, modulo l'idéal de $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$ engendré par $(t_i^q/t_{i+1})^C$:

$$t/(t_1\cdots t_d)=\mathrm{Moore}(t_{i+1},t_{i+2}^{q^{-1}},\cdots,t_i^{q^{-(d-1)}})/(t_1\cdots t_d).$$

Notons, pour tout $i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} w_i &= \Big(\prod\nolimits_{\alpha_1,\cdots,\alpha_{d-1}\in\mathbb{F}_q}\frac{t_i+\alpha_1t_{i-1}^q+\cdots+\alpha_{d-1}t_{i-d+1}^{q^{d-1}}}{t_i}\Big)^{q^{-(d-1)}} \\ &= \Big(\prod\nolimits_{\alpha_1,\cdots,\alpha_{d-1}\in\mathbb{F}_q}(1+\alpha_1(t_{i-1}^q/t_i)+\alpha_2(t_{i-2}^q/t_{i-1})^q(t_{i-1}^q/t_i)+\cdots \\ &\qquad \cdots+\alpha_{d-1}(t_{i-d+1}^q/t_{i-d+2})^{q^{d-2}}\cdots(t_{i-1}^q/t_i))\Big)^{q^{-(d-1)}}\in\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge. \end{aligned}$$

On en déduit facilement

$$w_i=\Big(\prod_{\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1}\in\mathbb{F}_q}\frac{t_i+\alpha_1t_{i-1}^q+\cdots+\alpha_{i-1}t_1^{q^{i-1}}}{t_i}\Big)^{q^{-(i-1)}}$$

modulo l'idéal de $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$ engendré par $(t_d^q/t_1)^C$.

D'où $w_1\cdots w_d=\mathrm{Moore}(t_1,t_2^{q^{-1}},\cdots,t_d^{q^{-(d-1)}})/(t_1\cdots t_d)$ modulo l'idéal de $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$ engendré par $(t_d^q/t_1)^C$.

Or on a vu que $\mathrm{Moore}(t_1,t_2^{q^{-1}},\cdots,t_d^{q^{-(d-1)}})/(t_1\cdots t_d)$ est égal à $t/(t_1\cdots t_d)$ modulo l'idéal de $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$ engendré par $(t_d^q/t_1)^C$.

Par conséquent on a l'égalité $w_1 \cdots w_d = t/(t_1 \cdots t_d)$ modulo l'idéal de $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\frown$ engendré par $(t_d^q/t_1)^C$.

Par permutation circulaire, cette même égalité a lieu modulo l'idéal de $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\frown$ engendré par $(t_i^q/t_{i+1})^C$, pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

On obtient ainsi une nouvelle définition de $A_{\mathcal{I}nt}$:

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{I}nt} &= \overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\frown[(w_1 \cdots w_d)^{-1}]^\frown \\ &= \overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\frown[((t_i + \alpha_1 t_{i-1}^q + \cdots + \alpha_{d-1} t_{i-d+1}^{q^{d-1}})/t_i)^{-1}_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, \alpha_1, \cdots, \alpha_{d-1} \in \mathbb{F}_q}]^\frown, \end{aligned}$$

où $^\frown$ désigne encore la complétion pour la topologie $t_1 \cdots t_d$-adique.

Comme $t_i^{q^d - 1}$ est divisible par $(t_1 \cdots t_d)^C$ dans $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\frown$, on voit facilement que $A_{\mathcal{I}nt}$ est encore égal à

$$\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\frown[((t_i + \alpha_1 t_{i-1}^q + \cdots + \alpha_k t_{i-k}^{q^k})/t_i)^{-1}_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}, \alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{F}_q}]^\frown.$$

5.2. Produit. — On se propose maintenant de construire des morphismes d'anneaux $A_{\mathcal{I}nt} \to \widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ et $A_{\mathcal{I}nt} \to \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ tels que les $t_i^{q^j}$ aient pour images les coefficients de $S_{\mathcal{LT}} R_{\mathcal{LT}}^{-1}$ et de $S_{\mathcal{D}r} R_{\mathcal{D}r}^{-1}$.

Dans ce paragraphe on écrira souvent des quotients d'éléments de $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ ou de $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$, ce qui pose *a priori* un problème, puisqu'on ne sait pas encore que ces algèbres sont intègres (on le saura seulement lorsqu'on aura achevé la démonstration du théorème 4.1.1 !). En fait, les $\breve{\mathcal{O}}$-algèbres $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ et $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ sont plates par construction et les dénominateurs de ces quotients seront toujours des diviseurs de π. Ces quotients auront donc un sens bien déterminé ; ce seront en fait des éléments de $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}[\pi^{-1}]$ ou de $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}[\pi^{-1}]$.

5.2.1. Le produit côté Lubin-Tate. — Comme dans la section 4, on pose $T_{\mathcal{LT}} = S_{\mathcal{LT}} R_{\mathcal{LT}}^{-1}$. La matrice $T_{\mathcal{LT}}$ vérifie l'équation ${}^\tau T_{\mathcal{LT}} = T_{\mathcal{LT}}\, {}^t P$ et est donc de la forme

$$T_{\mathcal{LT}} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \operatorname{diag}(t_1^{q^{-j}}, \cdots, t_d^{q^{-j}})\, {}^t P^j$$

où les $t_i^{q^{-j}}$ appartiennent à $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ et sont des racines q^j-ièmes des t_i. Plus précisément, en notant $R_{\mathcal{LT}}^{-1} = \mathrm{Id}_d + \sum_{j \geq 1} \operatorname{diag}(\widetilde{r}_{i,j})_{1 \leq i \leq d}\, {}^t P^{-j}$ et $\widetilde{r}_{i,0} = 1, \forall i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ on a, pour $j \geq 0$:

$$\begin{aligned} t_i^{q^{-j}} &= s_{i,j} + s_{i,j+1} \widetilde{r}_{i-j-1,1} + s_{i,j+2} \widetilde{r}_{i-j-2,2} + \cdots \\ \text{et} \quad t_i^{q^j} &= s_{i,0} \widetilde{r}_{i,j} + s_{i,1} \widetilde{r}_{i-1,j+1} + \cdots \end{aligned}$$

Lemme 5.2.1. — *Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, $\dfrac{s_{i,j}^{q^j}}{s_{i,0}}$ est une unité de $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$.*

Démonstration. — Commençons par démontrer que $s_{i,1}^q / s_{i,0}$ est une unité de $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$. On a l'équation : $s_{i,1}^q - x_{i-1} s_{i,1} = s_{i,0}$ et on sait que $x_{i-1} = s_{i-1,0}^{q-1}$ et par construction $s_{i-1,0}^q / s_{i,0}$ est entier dans $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$. Dans $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}[\pi^{-1}]$, on a

$(s_{i,1}^q/s_{i,0})^q - (s_{i-1,0}^q/s_{i,0})^{q-1}(s_{i,1}^q/s_{i,0}) = 1$. Comme $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ est intégralement clos dans $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}[\pi^{-1}]$, on obtient aussitôt que $(s_{i,1}^q/s_{i,0})$ et $(s_{i,1}^q/s_{i,0})^{-1}$ appartiennent à $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$.

Démontrons maintenant par récurrence sur j que $s_{i,j}^{q^j}/s_{i,0}$ est une unité de $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$. On a $s_{i,j}^{q^{j+1}} - s_{i-j,0}^{q^j(q-1)} s_{i,j}^{q^j} = s_{i,j-1}^{q^j}$. D'où

$$(s_{i,j}^{q^j}/s_{i,0})^q - (s_{i-j,0}^{q^j}/s_{i,0})^{q-1}(s_{i,j}^{q^j}/s_{i,0}) = (s_{i,j-1}^{q^{j-1}}/s_{i,0})^q.$$

Or $s_{i-j,0}^{q^j}/s_{i,0} = (s_{i-j,0}^q/s_{i-j+1})^{q^{j-1}}(s_{i-j+1,0}^q/s_{i-j+2})^{q^{j-2}}\cdots(s_{i-1,0}^q/s_i)$ appartient à $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ et par hypothèse de récurrence $s_{i,j-1}^{q^{j-1}}/s_{i,0}$ est une unité dans $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ donc $s_{i,j}^{q^j}/s_{i,0}$ est une unité de $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$. Donc le lemme est démontré. □

En utilisant l'expression pour $t_i^{q^{-j}}$ $(j \geq 0)$ et le fait que les $\widetilde{r}_{i,j}$ $(j \geq 1)$ appartiennent à l'idéal topologiquement nilpotent $(x_1, \cdots, x_d) = (s_{1,0}^{q-1}, \cdots, s_{d,0}^{q-1})$ (puisque $R_{\mathcal{LT}}$ est congrue à Id_d modulo cet idéal), il en résulte facilement que $t_i = \lim_{j\to+\infty} s_{i,j}^{q^j}$ dans $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$.

Pour un usage futur (*cf.* 5.5) notons en la conséquence évidente :

Proposition 5.2.2. — *L'élément $t_i/s_{i,0}$ est une unité dans $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$.*

Il découle de cette proposition que t_i^q/t_{i+1} appartient à $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$. On définit ainsi un morphisme de $\overline{\mathbb{F}}_q$-algèbres $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]] \to \widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ en envoyant $t_i \in \overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]$ sur $t_i \in \widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$. Ce morphisme est continu (pour la topologie $(t_1\cdots t_d)$-adique sur $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]$ et la topologie π-adique sur $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$), car $\dfrac{(t_1\cdots t_d)^{q-1}}{\pi}$ est une unité de $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$, et il se prolonge donc en un morphisme continu de $\overline{\mathbb{F}}_q$-algèbres topologiques $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge \to \widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$.

Par ailleurs, on a $\det(T_{\mathcal{LT}}) = \det(S_{\mathcal{LT}})\det(R_{\mathcal{LT}})^{-1}$. Mais $R_{\mathcal{LT}}$ est congrue à Id_d modulo π et $\det(R_{\mathcal{LT}})$ est donc congru à 1 modulo π. L'image de t par le morphisme ci-dessus est donc congrue à $\prod_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} s_{i,0}$ modulo π. Par conséquent l'image de $t/(t_1\cdots t_d)$ dans $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ est une unité. Le morphisme $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge \to \widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ se prolonge donc en un morphisme continu de $\overline{\mathbb{F}}_q$-algèbres topologiques $A_{\mathcal{I}nt} \to \widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$.

5.2.2. Le produit côté Drinfeld. — Comme dans la section 4, on pose $T_{\mathcal{D}r} = S_{\mathcal{D}r}R_{\mathcal{D}r}^{-1}$. La matrice $T_{\mathcal{D}r}$ vérifie l'équation ${}^\tau T_{\mathcal{D}r} = PT_{\mathcal{D}r}$ et est donc de la forme

$$T_{\mathcal{D}r} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} P^j \operatorname{diag}(t_1^{q^{-j}}, \cdots, t_d^{q^{-j}})$$

où les $t_i^{q^{-j}}$ appartiennent à $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ ainsi que toutes leurs racines q^j-ièmes des t_i. Plus précisément, en notant $R_{\mathcal{D}r}^{-1} = \mathrm{Id}_d + \sum_{j\geq 1} P^{-j}\operatorname{diag}(\widetilde{r}_{i,j})_{1\leq i\leq d}$ et $\widetilde{r}_{i,0} = 1, \forall i \in$

$\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ on a, pour $j \geq 0$:

$$\begin{aligned} t_i^{q^{-j}} &= s_{i,j} + s_{i+1,j+1}\widetilde{r}_{i,1} + s_{i+2,j+2}\widetilde{r}_{i,2} + \cdots \\ \text{et} \quad t_i^{q^j} &= s_{i+j,0}\widetilde{r}_{i,j} + s_{i+j+1,1}\widetilde{r}_{i,j+1} + \cdots \end{aligned}$$

Lemme 5.2.3. — *Pour $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{N}$, $s_{i,j}^{q^j}/s_{i,0}$ appartient à $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$.*

Contrairement au côté Lubin-Tate, ce n'est pas nécessairement une unité.

Démonstration. — On commence par démontrer le lemme pour $s_{i,1}$. On a les équations

$$\begin{array}{rcl} s_{i,1}^{q^d} - y_i^{q^{d-1}} s_{i+1,1}^{q^{d-1}} &=& s_{i,0}^{q^{d-1}} \\ s_{i+1,1}^{q^{d-1}} - y_{i+1}^{q^{d-2}} s_{i+2,1}^{q^{d-2}} &=& s_{i+1,0}^{q^{d-2}} \\ s_{i+2,1}^{q^{d-2}} - y_{i+2}^{q^{d-3}} s_{i+3,1}^{q^{d-3}} &=& s_{i+2,0}^{q^{d-3}} \\ &\vdots& \\ s_{i+d-1,1}^{q} - y_{i+d-1} s_{i,1} &=& s_{i+d-1,0}\,. \end{array}$$

On ajoute alors la première, la deuxième multipliée par $y_i^{q^{d-1}}$, la troisième multipliée par $y_i^{q^{d-1}} y_{i+1}^{q^{d-2}}$, ... , la dernière multipliée par $y_i^{q^{d-1}} y_{i+1}^{q^{d-2}} \cdots y_{i+d-2}^{q}$.

On obtient alors

$$\begin{aligned} s_{i,1}^{q^d} - (y_i^{q^{d-1}} y_{i+1}^{q^{d-2}} \cdots y_{i+d-1}) s_{i,1} = s_{i,0}^{q^{d-1}} + y_i^{q^{d-1}} s_{i+1,0}^{q^{d-2}} + y_i^{q^{d-1}} y_{i+1}^{q^{d-2}} s_{i+2,0}^{q^{d-3}} + \cdots \\ \cdots + y_i^{q^{d-1}} y_{i+1}^{q^{d-2}} \cdots y_{i+d-2}^{q} s_{i+d-1,0}\,. \end{aligned}$$

Or on a

$$y_i^{q^{d-1}} y_{i+1}^{q^{d-2}} \cdots y_{i+d-1} = s_{i,0}^{q^d-1}$$

et

$$\begin{array}{rcl} y_i^{q^{d-1}} s_{i+1,0}^{q^{d-2}} &=& s_{i,0}^{q^{d-1}} y_i^{q^{d-2}(q-1)} \\ y_i^{q^{d-1}} y_{i+1}^{q^{d-2}} s_{i+2,0}^{q^{d-3}} &=& s_{i,0}^{q^{d-1}} (y_i^{q^{d-2}} y_{i+1}^{q^{d-3}})^{q-1} \\ &\vdots& \\ y_i^{q^{d-1}} \cdots y_{i+d-2}\, s_{i+d-1,0} &=& s_{i,0}^{q^{d-1}} (y_i^{q^{d-2}} \cdots y_{i+d-2})^{q-1}\,. \end{array}$$

D'où

$$(s_{i,1}^{q}/s_{i,0})^{q^d} - s_{i,0}^{(q^d-1)(q-1)} (s_{i,1}^{q}/s_{i,0}) \in \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty},$$

et comme $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ est intégralement clos dans $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}[\pi^{-1}]$, $s_{i,1}^{q}/s_{i,0}$ appartient à $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$.

En général, on obtient par un calcul analogue que

$$s_{i,j}^{q^d} - s_{i,0}^{q^d-1} s_{i,j} = s_{i,j}^{q^d} - (y_i^{q^{d-1}} y_{i+1}^{q^{d-2}} \cdots y_{i+d-1}) s_{i,j} = s_{i,j-1}^{q^{d-1}} + y_i^{q^{d-1}} s_{i+1,j-1}^{q^{d-1}} + \cdots$$

et donc $(s_{i,j}^{q^j}/s_{i,0})^{q^d} - s_{i,0}^{(q^d-1)(q^j-1)}(s_{i,j}^{q^j}/s_{i,0})$ appartient à $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$. Comme $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ est intégralement clos dans $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}[\pi^{-1}]$, $s_{i,j}^{q^j}/s_{i,0}$ appartient donc á $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$; le lemme est donc démontré. □

Montrons que $t_i/s_{i,0}$ appartient à $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$. On a $t_i = \sum_{j=0}^{\infty} s_{i+j,j}\widetilde{r}_{i,j}$ et il suffit donc de vérifier que pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{N}$, $s_{i+j,j}\widetilde{r}_{i,j}/s_{i,0}$ appartient à $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$. On a

$$s_{i+j,j}^{q^j}/s_{i+j,0} \in \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$$

$$\text{et} \quad s_{i,0}^{q^j}/s_{i+j,0} = (s_{i,0}^q/s_{i+1,0})^{q^{j-1}}(s_{i+1,0}^q/s_{i+2,0})^{q^{j-2}} \cdots (s_{i+j-1,0}^q/s_{i+j,0}) \ ;$$

par conséquent

$$s_{i,j}^{q^j}/s_{i,0}^{q^j} \in [(s_{i,0}^q/s_{i+1,0})^{q^{j-1}}(s_{i+1,0}^q/s_{i+2,0})^{q^{j-2}} \cdots (s_{i+j-1,0}^q/s_{i+j,0})]^{-1}\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty} \,.$$

Or $\widetilde{r}_{i,j}/(y_i \cdots y_{i+j-1}) = \widetilde{r}_{i,j}/(s_{i,0}^q/s_{i+1,0})(s_{i+1,0}^q/s_{i+2,0})(s_{i+j-1,0}^q/s_{i+j,0})$ appartient à $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$, comme on le voit en remarquant que l'on a

$$r_{i,j-i} = (-1)^{j-i}[(1 - r_{i,j-i}^{q-1})(1 - r_{i+1,j-i-1}^{q-1}) \cdots (1 - r_{j-1,1}^{q-1})]^{-1} y_i \cdots y_{j-1}$$

et qu'en écrivant $R^{-1} = \mathrm{Id}_d + \sum_{k \geq 1}(-1)^k(\sum_{j\geq 1} P^j \operatorname{diag}(r_{i,j}))^k$ on a

$$\widetilde{r}_{i,j-i} = \sum_{k\geq 1}(-1)^k \sum_{i=i_0<\cdots<i_k=j} r_{i,i_1-i} \cdots r_{i_{k-1},j-i_{k-1}} \quad \text{pour } j > i\,.$$

Il en résulte que $(s_{i+j,j}\widetilde{r}_{i,j}/s_{i,0})^{q^j}$ appartient à $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$; il en est alors de même de $s_{i+j,j}\widetilde{r}_{i,j}/s_{i,0}$.

Cela ne définit pas encore un morphisme continu $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge \to \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$, mais on obtient déjà un morphisme (continu car $t_i/s_{i,0}$ et donc aussi $(t_1 \cdots t_d)^{q-1}/\pi$ appartiennent à $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$) $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{N}^d[q^{-1}]]^\wedge \to \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$. En particulier, on sait définir l'image de $t \in A_{\mathcal{I}nt}$ dans $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$. Pour prolonger ce morphisme à $A_{\mathcal{I}nt}$ (et aussi en vue d'un usage futur, *cf.* 5.5), on va démontrer :

Proposition 5.2.4. — *1) L'élément $t_i/s_{i,0}$ est une unité de $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.*

2) L'élément $t/(t_1 \cdots t_d)$ est une unité de $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$.

Démonstration. — Les arguments de 5.1.1 montrent que, modulo π, t est égal dans $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ à une somme sur un ensemble fini de $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ d'expressions $\operatorname{sgn}(\bar{\sigma}) \prod_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} t_i^{q^{\sigma(i)-i}}$. Pour k assez grand (en fonction des termes qui apparaissent) $(\prod_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} t_i^{q^{\sigma(i)-i}})^{q^k}$ s'écrit comme le produit d'un élément de $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ par $\prod_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}(t_i/s_{i,0}) \prod_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} s_{i,0}^{q^{\sigma(i)-i}}$. Mais par les arguments du paragraphe 5.1.1 (comme $s_{i,0}^q/s_{i+1,0}$ appartient à $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$), $\prod_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} s_{i,0}^{q^{\sigma(i)-i}}$ est le produit d'un élément de $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ par $\prod_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} s_{i,0}$. Donc t^{q^k} est le produit d'un élément de $\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ par $\prod_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}(t_i/s_{i,0})\Big(\prod_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} s_{i,0}\Big)^{q^k}$.

Par ailleurs on a $\det(T_{\mathcal{D}r}) = \det(S_{\mathcal{D}r})\det(R_{\mathcal{D}r})^{-1}$. Mais $\det(R_{\mathcal{D}r}) = (1-\pi/z)^{-1}(1-\pi^q/z)^{-1}\cdots$ –comme on le voit en considérant le cas particulier $d=1$– et $\det(R_{\mathcal{D}r})$ est donc congru à 1 modulo π. Donc l'image de t par le morphisme ci-dessus est égale à $\prod_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} s_{i,0}$ modulo π. □

Utilisant successivement les deux parties de cette proposition, on prolonge le morphisme continu $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{N}^d[q^{-1}]]^\frown \to \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ à $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\frown$ puis à $A_{\mathcal{I}nt}$ tout entier.

5.3. Décomposition. — Pour construire les morphismes de décomposition, nous allons représenter les matrices $R_{\mathcal{LT}},\cdots$ comme des matrices de taille infinie, dont les lignes et les colonnes seront indexées par $\mathbb{Z}$ et dont les diagonales parallèles à la diagonale principale seront périodiques de période d. Contrairement à $M_d(K \widehat{\widehat{\otimes}} A_{\mathcal{I}nt})$, le $A_{\mathcal{I}nt}$-module $M_\infty(A_{\mathcal{I}nt})$ des matrices de taille infinie « $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ » n'est pas une $A_{\mathcal{I}nt}$-algèbre car le produit n'y est pas partout défini ; cette représentation sera cependant compatible au produit partiel évident sur $M_\infty(A_{\mathcal{I}nt})$.

En fait, ces représentations ne seront pas les mêmes du côté Lubin-Tate et du côté Drinfeld.

Du côté Lubin-Tate, on associera à toute matrice $M\in M_d(K\widehat{\widehat{\otimes}}A_{\mathcal{I}nt})$ la matrice de taille infinie (encore notée M dans 5.3.2) de l'action de M sur $K^d\widehat{\widehat{\otimes}}A_{\mathcal{I}nt}$ vis-à-vis de la base (topologique) $(E_j = {}^tP^{j-1}e_1)_{j\in\mathbb{Z}}$. En particulier, ${}^tP$ sera représentée par la matrice obtenue en décalant Id_∞ d'un cran vers le bas, $\mathrm{diag}(a_1,\cdots,a_d)$ par la matrice diagonale périodique $\mathrm{diag}(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et on écrira

$$R_{\mathcal{LT}} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 1 & r_{i-1,1} & r_{i-1,2} & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & r_{i,1} & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\text{et}\quad S_{\mathcal{LT}} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & s_{i-1,0} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & s_{i,1} & s_{i,0} & 0 & \cdots \\ \cdots & s_{i+1,2} & s_{i+1,1} & s_{i+1,0} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

les matrices à coefficients dans $A_{\mathcal{I}nt}$ obtenues en décomposant la matrice

$$T_{\mathcal{LT}} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & t_{i-1} & t_{i-1}^{q} & t_{i-1}^{q^2} & \cdots \\ \cdots & t_i^{q^{-1}} & t_i & t_i^{q} & \cdots \\ \cdots & t_{i+1}^{q^{-2}} & t_{i+1}^{q^{-1}} & t_{i+1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

sous la forme $S_{\mathcal{LT}} R_{\mathcal{LT}}^{-1}$ (dans l'écriture de ces trois matrices, on convient que le terme central est situé sur la i-ème ligne et la i-ème colonne).

Du côté Drinfeld, on associera à toute matrice $M \in M_d(K \widehat{\widehat{\otimes}} A_{\mathcal{I}nt})$ la matrice de taille infinie (encore notée M dans 5.3.3) de l'action de M sur $K^d \widehat{\widehat{\otimes}} A_{\mathcal{I}nt}$ vis-à-vis de la base (topologique) $(E'_j = P^{-j+1}e_1)_{j \in \mathbb{Z}}$ –on peut d'ailleurs noter que cette représentation diffère de celle adoptée côté Lubin-Tate par une *double* transposition, portant à la fois sur les matrices de taille finie d et sur les matrices de taille infinie [(12)]. En particulier, P sera représentée par la matrice obtenue en décalant Id_∞ d'un cran vers le haut, $\mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_d)$ par la matrice diagonale périodique $\mathrm{diag}(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ et on écrira

$$R_{\mathcal{D}r} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & r_{i-1,1} & 1 & 0 & \cdots \\ \cdots & r_{i-1,2} & r_{i,1} & 1 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad S_{\mathcal{D}r} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & s_{i-1,0} & s_{i,1} & s_{i+1,2} & \cdots \\ \cdots & 0 & s_{i,0} & s_{i+1,1} & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & s_{i+1,0} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

(12) Le lecteur que cette double transposition rebuterait peut donc choisir un côté –il est plus logique de choisir la représentation (5.3.2) adaptée au côté Lubin-Tate car le paragraphe 5.3.1 (lemmes techniques) est écrite en privilégiant ce côté– et transposer systématiquement de l'autre côté. Ce point de vue a cependant aussi ses désavantages, en particulier lorsqu'on introduira une topologie sur le $A_{\mathcal{I}nt}$-module des matrices infinies.

les matrices à coefficients dans $A_{\mathcal{I}nt}$ obtenues en décomposant la matrice

$$T_{\mathcal{D}r} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & t_{i-1} & t_i^{q^{-1}} & t_{i+1}^{q^{-2}} & \cdots \\ \cdots & t_{i-1}^{q} & t_i & t_{i+1}^{q^{-1}} & \cdots \\ \cdots & t_{i-1}^{q^2} & t_i^{q} & t_{i+1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

sous la forme $S_{\mathcal{D}r} R_{\mathcal{D}r}^{-1}$ (dans l'écriture de ces trois matrices, on convient là encore que le terme central est situé sur la i-ème ligne et la i-ème colonne).

Si I et J sont des parties de $\mathbb{Z}$ on note, pour toute matrice M dont les lignes et les colonnes sont indexées par $\mathbb{Z}$, $M_{I,J}$ la matrice extraite de M dont les indices de ligne sont dans I et les indices de colonnes sont dans J, en ordonnant par ordre croissant les éléments de I et de J. De plus, pour $j, k \in \mathbb{Z}$, on note $[j, k]$ l'ensemble $\{j, j+1, \cdots, k\}$ si $j \leq k$ et l'ensemble vide sinon.

Pour obtenir ces décompositions, du côté Lubin-Tate comme du côté Drinfeld, nous allons extraire de la matrice T_* (avec $* = \mathcal{LT}$ ou $\mathcal{D}r$) la matrice de taille finie $T_{*,[a,b],[a,b]}$ (pour $a \leq b$ entiers) et décomposer $T_{*,[a,b],[a,b]}$ sous la forme $S_*^{a,b}(R_*^{a,b})^{-1}$, où $R_{\mathcal{LT}}^{a,b}$ et $S_{\mathcal{D}r}^{a,b}$ sont triangulaires supérieures, $S_{\mathcal{LT}}^{a,b}$ et $R_{\mathcal{D}r}^{a,b}$ sont triangulaires inférieures, et les matrices $R_*^{a,b}$ ont une diagonale principale formée de 1. Les formules donnant les coefficients des matrices issues de ces décompositions (voir 5.3.2 pour le côté Lubin-Tate et 5.3.3 pour le côté Drinfeld) les expriment comme des quotients de déterminants de matrices extraites de la matrice $T_{*,[a,b],[a,b]}$. Les coefficients des matrices $(R_*^{a,b})^{-1}$ et $(S_*^{a,b})^{-1}$ sont aussi donnés par des formules du même type.

Les dénominateurs de ces quotients seront en fait tous de la forme

$$\text{(puissance fractionnaire de } t_1 \cdots t_d) \times \text{ (unité de } A_{\mathcal{I}nt}).$$

Ces quotients définiront donc des matrices inversibles $R_*^{a,b}$ et $S_*^{a,b}$ à coefficients dans $A_{\mathcal{I}nt}[(t_1 \cdots t_d)^{-1}]$ vérifiant $T_{*,[a,b],[a,b]} R_*^{a,b} = S_*^{a,b}$.

Nous obtiendrons des majorations des normes $t_1 \cdots t_d$-adiques des coefficients des matrices $R_*^{a,b}$, $S_*^{a,b}$ et de leurs inverses. Pour certaines de ces matrices ($S_{\mathcal{LT}}^{a,b}$ et son inverse pour le côté Lubin-Tate ; $R_{\mathcal{D}r}^{a,b}$ et son inverse pour le côté Drinfeld) nous obtiendrons même des estimées plus précises de ces coefficients. Il en résultera en particulier que les matrices $R_*^{a,b}$, $S_*^{a,b}$ et $(R_*^{a,b})^{-1}$ sont à coefficients dans $A_{\mathcal{I}nt}$.

Nous ferons ensuite tendre a vers $-\infty$ et b vers $+\infty$ et démontrerons que les coefficients des matrices $R_*^{a,b}$ et $S_*^{a,b}$ admettent tous une limite et que ces limites fournissent une solution de notre problème de décomposition.

Plus précisément, prolongeant $R_*^{a,b}$ et $S_*^{a,b}$ par 0 pour les considérer de nouveau comme des matrices infinies, la convergence $R_*^{a,b} \to R_*^{-\infty,+\infty}$ aura lieu pour la topologie de la convergence uniforme sur les colonnes alors que la convergence

$S_*^{a,b} \to S_*^{-\infty,+\infty}$ aura lieu pour la topologie de la convergence simple des coefficients. L'application $R \mapsto TR$ est continue sur son domaine de définition vis-à vis de ces topologies (on rappelle que la norme de $A_{\mathcal{I}nt}$ est ultramétrique). L'égalité $T_* R_*^{a,b} = S_*^{a,b}$ founira alors par passage à la limite l'égalité $T_* R_*^{-\infty,+\infty} = S_*^{-\infty,+\infty}$ qui est le but de la construction. Il sera ensuite assez facile de démontrer que $R_* = R_*^{-\infty,+\infty}$ et $S_* = S_*^{-\infty,+\infty}$ sont dans l'image de $M_d(K \hat{\hat{\otimes}} A_{\mathcal{I}nt})$ par la représentation (5.2.$*$).

Enfin, en utilisant les estimées des coefficients des matrices R_*, S_* et de leurs inverses mentionnées ci-dessus, nous démontrerons que le couple (R_*, S_*) définit un point de $\breve{\mathcal{M}}_{*,\infty,P^\bullet\mathcal{O}^d}$ à valeurs dans $A_{\mathcal{I}nt}$.

Pour réaliser ce programme, nous aurons besoin des lemmes techniques suivants, concernant les déterminants de matrices extraites de $T_{\mathcal{LT}}$ et $T_{\mathcal{D}r}$.

5.3.1. Lemmes techniques. — On va se concentrer sur le côté Lubin-Tate. Dans tous les lemmes qui vont suivre, on pose donc $T = T_{\mathcal{LT}}$. Pour utiliser les lemmes techniques de ce paragraphe du côté Drinfeld, il faudra donc au préalable transposer la matrice de taille infinie T.

On rappelle

$$T = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & t_{i-1} & t_{i-1}^{q} & t_{i-1}^{q^2} & \cdots \\ \cdots & t_i^{q^{-1}} & t_i & t_i^{q} & \cdots \\ \cdots & t_{i+1}^{q^{-2}} & t_{i+1}^{q^{-1}} & t_{i+1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Pour toute matrice carrée M, on note $\det(M)$ son déterminant et $\prod_{\mathrm{diag}}(M)$ le produit de ses coefficients diagonaux.

Lemme 5.3.1. — *Soient I et J deux parties finies de $\mathbb{Z}$ de même cardinal. Alors $\det(T_{I,J})/\prod_{\mathrm{diag}}(T_{I,J})$ appartient à $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\wedge$.*

Démonstration. — On commence par établir le lemme quand I et J ont pour cardinal 2. On pose $I = \{i_1, i_2\}$ et $J = \{j_1, j_2\}$, avec $i_1 < i_2$ et $j_1 < j_2$. On a alors

$$T_{I,J} = \begin{pmatrix} t_{i_1}^{q^{j_1-i_1}} & t_{i_1}^{q^{j_2-i_1}} \\ t_{i_2}^{q^{j_1-i_2}} & t_{i_2}^{q^{j_2-i_2}} \end{pmatrix}.$$

D'où $\det(T_{I,J})/\prod_{\mathrm{diag}}(T_{I,J}) = 1 - (t_{i_1}^{q^{-i_1}}/t_{i_2}^{q^{-i_2}})^{q^{j_2}-q^{j_1}}$. En remarquant qu' on a $t_{i_1}^{q^{-i_1}}/t_{i_2}^{q^{-i_2}} = \prod_{i=i_1}^{i_2-1}(t_i^q/t_{i+1})^{q^{-(i+1)}}$, on obtient donc déjà ce cas particulier du lemme.

En général, soit k le cardinal de I et de J. Ecrivons $I = \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ et $J = \{j_1, j_2, \cdots, j_k\}$, avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ et $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$. On note $\mathfrak{S}_k$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \cdots, k\}$. On a bien sûr

$$\det(T_{I,J}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{a=1}^{k} t_{i_a}^{q^{j_{\sigma(a)} - i_a}}.$$

On se propose donc de démontrer que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, le quotient

$$(\prod_{a=1}^{k} t_{i_a}^{q^{j_{\sigma(a)} - i_a}})/(\prod_{a=1}^{k} t_{i_a}^{q^{j_a - i_a}})$$

appartient à $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\frown$. En fait, en écrivant σ comme un produit de transpositions d'éléments adjacents, cela résulte du calcul ci-dessus lorsque $k = 2$.

On va cependant en donner une autre démonstration qui a l'avantage de montrer que le quotient ci-dessus est non seulement entier mais très petit si σ est très différent de l'identité.

Tout d'abord, un calcul simple montre que

$$(\prod_{a=1}^{k} t_{i_a}^{q^{j_{\sigma(a)} - i_a}})/(\prod_{a=1}^{k} t_{i_a}^{q^{j_a - i_a}}) = \prod_{i \in \mathbb{Z}} (t_i^q / t_{i+1})^{\big(\sum_{a \in \{1,2,\cdots,d\}\,,\, i_a \le i} (q^{j_{\sigma(a)}} - q^{j_a}) \big)/q^{i+1}}.$$

On note que le produit sur $i \in \mathbb{Z}$ est fini car l'expression est nulle pour $i \notin [i_1, i_d - 1]$. Comme $t \mapsto q^t$ est strictement croissante, il est évident que $\sum_{a \in \{1,2,\cdots,d\}\,,\, i_a \le i} (q^{j_{\sigma(a)}} - q^{j_a}) \ge 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, ce qui démontre le lemme. $\square$

Au cours de la démonstration ci-dessus on a aussi obtenu le complément suivant :

Complément au lemme 5.3.1. — *L'élément* $(\prod_{a=1}^{k} t_{i_a}^{q^{j_{\sigma(a)} - i_a}})/(\prod_{a=1}^{k} t_{i_a}^{q^{j_a - i_a}})$ *est divisible par*

$$\prod_{a \in \{1,\cdots,k-1\} \textit{ tel que } \sigma(\{1,\cdots,a\}) \neq \{1,\cdots,a\}} \; \prod_{i=i_a}^{i_{a+1}-1} (t_i^q / t_{i+1})^{(q^{j_{a+1}} - q^{j_a})/q^{i+1}}$$

dans la $\overline{\mathbb{F}}_q$*-algèbre* $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\frown$.

Lemme 5.3.2. — *Soient* $j, k \in \mathbb{Z}$ *avec* $j \le k$ *et* I *une partie de* $\mathbb{Z}$ *de cardinal* $k - j + 1$. *Alors* $\det(T_{I,[j,k]}) / \prod_{\mathrm{diag}} (T_{I,[j,k]})$ *est une unité dans* $A_{\mathcal{I}nt}$.

Démonstration. — On rappelle la formule :

$$\mathrm{Moore}(X_1, \cdots, X_k) = \prod_{i=1}^{k} \prod_{\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1} \in \mathbb{F}_q} (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_{i-1} X_{i-1} + X_i).$$

Or, si $I = \{i_j, i_{j+1}, \cdots, i_k\}$ avec $i_j < i_{j+1} < \cdots < i_k$,

$$\det(T_{I,[j,k]}) = \Big(\mathrm{Moore}(t_{i_j}^{q^{-i_j}}, t_{i_{j+1}}^{q^{-i_{j+1}}}, \cdots, t_{i_k}^{q^{-i_k}}) \Big)^{q^j}.$$

On en déduit

$$\frac{\det(T_{I,[j,k]})}{\prod\limits_{\mathrm{diag}}(T_{I,[j,k]})} = \Big(\prod_{i=j}^{k}\prod_{\alpha_j,\cdots,\alpha_{i-1}\in\mathbb{F}_q}((\alpha_j t_{i_j}^{q^{-i_j}} + \alpha_{j+1}t_{i_{j+1}}^{q^{-i_{j+1}}} + \cdots + t_{i_i}^{q^{-i_i}})/t_{i_i}^{q^{-i_i}})\Big)^{q^j}.$$

Or on a vu que chaque expression $(\alpha_j t_{i_j}^{q^{-i_j}} + \alpha_{j+1}t_{i_{j+1}}^{q^{-i_{j+1}}} + \cdots + t_{i_i}^{q^{-i_i}})/t_{i_i}^{q^{-i_i}}$ est une unité dans $A_{\mathcal{I}nt}$. Donc le lemme est démontré. □

Lemme 5.3.3. — *Soient $i \in \mathbb{Z}$ et I_1, I_2, J_1, J_2 des parties finies de $[-\infty, i-1]$ telles que I_1 et J_1 aient même cardinal, ainsi que I_2 et J_2. Pour raccourcir l'expression qui suit, on note $H_\alpha(i,k)$ (avec $\alpha = 1$ ou 2) le couple $(I_\alpha \cup [i,k], J_\alpha \cup [i,k])$. Alors*

$$\frac{\det(T_{H_1(i,k)})\det(T_{H_2(i,k+1)}) - \det(T_{H_1(i,k+1)})\det(T_{H_2(i,k)})}{\prod\limits_{\mathrm{diag}}(T_{[i,k],[i,k]})\prod\limits_{\mathrm{diag}}(T_{[i,k+1],[i,k+1]})}$$

est entier et tend vers 0 dans $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\frown$ quand k tend vers $+\infty$ dans $\{i, i+1, \cdots\}$.

Démonstration. — Il résulte trivialement du lemme 5.3.1 que l'expression ci-dessus est entière. Nous allons utiliser les estimées du complément au lemme 5.3.1 pour montrer qu'elle tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Nous devons montrer que pour k assez grand,

$$\frac{\det(T_{H_1(i,k)})\det(T_{H_2(i,k+1)}) - \det(T_{H_1(i,k+1)})\det(T_{H_2(i,k)})}{\prod\limits_{\mathrm{diag}}(T_{[i,k],[i,k]})\prod\limits_{\mathrm{diag}}(T_{[i,k+1],[i,k+1]})}$$

est divisible par $(t_b^q/t_{b+1})^n$ dans $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\frown$. Pour $\alpha, \beta \in \{1,2\}$ notons $S_{\alpha,\beta}^{n,k}$ l'ensemble des bijections $\sigma : I_\alpha \cup [i, k+\beta-1] \to J_\alpha \cup [i, k+\beta-1]$ telles que le nombre de $j \in [i, k-1]$ congrus à b modulo d, et tels que $\sigma(I_\alpha \cup [i,j]) \neq J_\alpha \cup [i,j]$ soit inférieur ou égal à $nq/(q-1)$. Il résulte des estimées de la démonstration du lemme 5.3.1 que, pour tout $\alpha, \beta \in \{1,2\}$,

$$\det(T_{I_\alpha\cup[i,k+\beta-1],J_\alpha\cup[i,k+\beta-1]})/\prod_{\mathrm{diag}}(T_{[i,k+\beta-1],[i,k+\beta-1]})$$

est égal modulo l'idéal de $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\frown$ engendré par $(t_b^q/t_{b+1})^n$ à

$$\Big(\sum_{\sigma\in S_{\alpha,\beta}^{n,k}}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{j\in I_\alpha\cup[i,k+\beta-1]}t_j^{q^{\sigma(j)}-q^j}\Big)/\prod_{\mathrm{diag}}(T_{[i,k+\beta-1],[i,k+\beta-1]}).$$

Pour conclure, il nous suffit de remarquer que, pour k assez grand en fonction de n,

$$\begin{aligned}&\Big(\sum_{\sigma\in S_{1,1}^{n,k}}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{j\in I_1\cup[i,k]}t_j^{q^{\sigma(j)}-q^j}\Big)\Big(\sum_{\sigma\in S_{2,2}^{n,k}}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{j\in I_2\cup[i,k+1]}t_j^{q^{\sigma(j)}-q^j}\Big)\\ =\ &\Big(\sum_{\sigma\in S_{1,2}^{n,k}}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{j\in I_1\cup[i,k+1]}t_j^{q^{\sigma(j)}-q^j}\Big)\Big(\sum_{\sigma\in S_{2,1}^{n,k}}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{j\in I_2\cup[i,k]}t_j^{q^{\sigma(j)}-q^j}\Big).\end{aligned}$$

Ceci résulte de l'existence d'une bijection $S_{1,1}^{n,k} \times S_{2,2}^{n,k} \to S_{1,2}^{n,k} \times S_{2,1}^{n,k}$ telle que les termes se correspondent deux à deux. On la construit de la façon suivante : étant donnés $\sigma_{1,1} \in S_{1,1}^{n,k}$ et $\sigma_{2,2} \in S_{2,2}^{n,k}$, on considère le plus petit $j \in [i, k-1]$ congru à b modulo d, et tel que $\sigma_{1,1}(I_1 \cup [i,j]) = J_1 \cup [i,j]$ et $\sigma_{2,2}(I_2 \cup [i,j]) = J_2 \cup [i,j]$. Un tel j existe car k est assez grand en fonction de n. On pose alors

$$\begin{array}{rcl} \sigma_{1,2}|_{I_1 \cup [i,j]} & = & \sigma_{1,1}|_{I_1 \cup [i,j]} \,, \\ \sigma_{1,2}|_{[j+1,k+1]} & = & \sigma_{2,2}|_{[j+1,k+1]} \,, \\ \sigma_{2,1}|_{I_2 \cup [i,j]} & = & \sigma_{2,2}|_{I_2 \cup [i,j]} \,, \\ \sigma_{2,1}|_{[j+1,k]} & = & \sigma_{1,1}|_{[j+1,k]} \,, \end{array}$$

ce qui fournit la bijection voulue. □

On démontre de manière analogue le lemme suivant :

Lemme 5.3.4. — *Soient $i \in \mathbb{Z}$ et I_1, I_2, J_1, J_2 des parties finies de $[i+1, +\infty]$ telles que I_1 et J_1 aient même cardinal, ainsi que I_2 et J_2. Alors (en reprenant la notation H_α du lemme précédent)*

$$\frac{\det(T_{H_1(k,i)}) \det(T_{H_2(k-1,i)}) - \det(T_{H_1(k-1,i)}) \det(T_{H_2(k,i)})}{\prod\limits_{\text{diag}} (T_{[k,i],[k,i]}) \prod\limits_{\text{diag}} (T_{[k-1,i],[k-1,i]})}$$

est entier et tend vers 0 dans $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\frown$ quand k tend vers $-\infty$ dans $\{\cdots, i-1, i\}$.

5.3.2. Décomposition côté Lubin-Tate. — On continue à noter $T = T_{\mathcal{LT}}$. On note aussi R et S au lieu de $R_{\mathcal{LT}}$ et $S_{\mathcal{LT}}$. Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, avec $a \leq b$, nous allons montrer que $T_{[a,b],[a,b]}$ s'écrit (de manière unique bien sûr) comme un produit $S^{a,b}(R^{a,b})^{-1}$ où $S^{a,b}$ est une matrice triangulaire inférieure à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\frown$ et $R^{a,b}$ est une matrice triangulaire supérieure à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^\frown$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1. En conformité avec les notations déjà introduites pour les coefficients de $R_{\mathcal{LT}}$ et $S_{\mathcal{LT}}$, on écrit les matrices $R^{a,b}$ et $S^{a,b}$ sous la forme

$$R^{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & r_{a,i-1-a}^{a,b} & r_{a,i-a}^{a,b} & r_{a,i+1-a}^{a,b} & \cdots & r_{a,b-a}^{a,b} \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & r_{i-1,1}^{a,b} & r_{i-1,2}^{a,b} & \cdots & r_{i-1,b-i+1}^{a,b} \\ \vdots & & \ddots & 1 & r_{i,1}^{a,b} & \cdots & r_{i,b-i}^{a,b} \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \cdots & r_{i+1,b-i-1}^{a,b} \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S^{a,b} = \begin{pmatrix} s^{a,b}_{a,0} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ s^{a,b}_{i-1,i-a-1} & \cdots & s^{a,b}_{i-1,0} & \ddots & & & \vdots \\ s^{a,b}_{i,i-a} & \cdots & s^{a,b}_{i,1} & s^{a,b}_{i,0} & \ddots & & \vdots \\ s^{a,b}_{i+1,i+1-a} & \cdots & s^{a,b}_{i+1,2} & s^{a,b}_{i+1,1} & s^{a,b}_{i+1,0} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ s^{a,b}_{b,b-a} & \cdots & s^{a,b}_{b,b-i+1} & s^{a,b}_{b,b-i} & s^{a,b}_{b,b-i-1} & \cdots & s^{a,b}_{b,0} \end{pmatrix}$$

On pose $\widetilde{R}^{a,b} = (R^{a,b})^{-1}$ et $\widetilde{S}^{a,b} = (S^{a,b})^{-1}$; on indexe les coefficients $\widetilde{r}^{a,b}_{i,j}$ et $\widetilde{s}^{a,b}_{i,j}$ des matrices $\widetilde{R}^{a,b}$ et $\widetilde{S}^{a,b}$ comme ceux de $R^{a,b}$ et de $S^{a,b}$.

On rappelle que l'on note $E_i = {}^tP^{j-1}e_1$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Les relations $T_{[a,b],[a,b]}R^{a,b} = S^{a,b}$ et ${}^tT_{[a,b],[a,b]}\,{}^t\widetilde{S}^{a,b} = {}^t\widetilde{R}^{a,b}$, que l'on souhaite obtenir, impliquent les égalités

$$\begin{aligned} T_{[a,b],[a,b]}(E_i) + r^{a,b}_{i-1,1}T_{[a,b],[a,b]}(E_{i-1}) + \cdots + r^{a,b}_{a,i-a}T_{[a,b],[a,b]}(E_a) \\ = s^{a,b}_{i,0}E_i + s^{a,b}_{i+1,1}E_{i+1} + \cdots + s^{a,b}_{b,b-i}E_b \end{aligned}$$

et $$\begin{aligned} \widetilde{s}^{a,b}_{i,0}\,{}^tT_{[a,b],[a,b]}(\check{E}_i) + \widetilde{s}^{a,b}_{i,1}\,{}^tT_{[a,b],[a,b]}(\check{E}_{i-1}) + \cdots + \widetilde{s}^{a,b}_{i,i-a}\,{}^tT_{[a,b],[a,b]}(\check{E}_a) \\ = \check{E}_i + \widetilde{r}^{a,b}_{i,1}\check{E}_{i+1} + \cdots + \widetilde{r}^{a,b}_{i,b-i}\check{E}_b\,. \end{aligned}$$

En considérant successivement le produit extérieur de la première de ces deux égalités

- à gauche, par $\bigwedge_{k\in[a,i-1]} T_{[a,b],[a,b]}(E_k)$ et à droite, par $\bigwedge_{k\in[i,b]-\{i+j\}} E_k$
- à gauche, par $\bigwedge_{k\in[a,i-1]-\{i-j\}} T_{[a,b],[a,b]}(E_k)$ et à droite, par $\bigwedge_{k\in[i,b]} E_k$

puis le produit extérieur de la deuxième

- à gauche, par $\bigwedge_{k\in[a,i]-\{i-j\}} {}^tT_{[a,b],[a,b]}(\check{E}_k)$ et à droite, par $\bigwedge_{k\in[i+1,b]-\{i+j\}} \check{E}_k$
- à gauche, par $\bigwedge_{k\in[a,i]-\{i-j\}} {}^tT_{[a,b],[a,b]}(\check{E}_k)$ et à droite, par $\bigwedge_{k\in[i+1,b]-\{i+j\}} \check{E}_k$

on obtient

$$s_{i+j,j}^{a,b} = \frac{\det(T_{[a,i-1]\cup\{i+j\},[a,i]})}{\det(T_{[a,i-1],[a,i-1]})}$$

$$r_{i-j,j}^{a,b} = (-1)^{j+1}\frac{\det(T_{[a,i-1],[a,i]-\{i-j\}})}{\det(T_{[a,i-1],[a,i-1]})}$$

$$\widetilde{s}_{i,j}^{a,b} = (-1)^{j+1}\frac{\det(T_{[a,i]-\{i-j\},[a,i-1]})}{\det(T_{[a,i],[a,i]})}.$$

$$\text{et}\qquad \widetilde{r}_{i,j}^{a,b} = \frac{\det(T_{[a,i],[a,i-1]\cup\{i+j\}})}{\det(T_{[a,i],[a,i]})}$$

Il résulte du lemme 5.3.2 que les dénominateurs de ces expressions sont le produit par une unité d'une puissance fractionnaire de $t_1\cdots t_d$. On obtient donc des matrices $R^{a,b}$ et $S^{a,b}$ appartenant à $\mathrm{GL}_{b-a+1}(A_{\mathcal{I}nt}[(t_1\cdots t_d)^{-1}])$. La proposition suivante entraîne en particulier que $R^{a,b}$, $S^{a,b}$ et $(R^{a,b})^{-1}$ sont en fait à coefficients dans $A_{\mathcal{I}nt}$.

Proposition 5.3.5. — *Les quotients*

$$\frac{s_{i+j,j}^{a,b}}{t_{i+j}^{q^{-j}}}\ ,\ \widetilde{s}_{i,j}^{a,b}\frac{t_{i-j}\cdots t_i}{t_{i-j+1}^{q^{-1}}\cdots t_i^{q^{-1}}}\ ,\ \frac{r_{i-j,j}^{a,b}}{(t_{i-j}\cdots t_{i-1})^{q-1}}\quad \text{et}\quad \widetilde{r}_{i,j}^{a,b}t_i^{1-q^j}$$

appartiennent à $A_{\mathcal{I}nt}$; les deux premiers sont même dans $A_{\mathcal{I}nt}^{\times}$.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate des formules ci-dessus et des lemmes 5.3.1 et 5.3.2. □

On remarque que $r_{i-j,j}^{a,b}$, $s_{i+j,j}^{a,b}$, $\widetilde{r}_{i,j}^{a,b}$ et $\widetilde{s}_{i,j}^{a,b}$ ne dépendent pas de b.

Il résulte du lemme 5.3.3 que $r_{i-j,j}^{a,b}$, $s_{i+j,j}^{a,b}$, $\widetilde{r}_{i,j}^{a,b}$ et $\widetilde{s}_{i,j}^{a,b}$ admettent une limite dans $A_{\mathcal{I}nt}[(t_1\cdots t_d)^{-1}]$ quand a tend vers $-\infty$. On pose alors

$$\begin{array}{ccc} r_{i-j,j} = \lim_{a\to-\infty} r_{i-j,j}^{a,b}\ , & & s_{i+j,j} = \lim_{a\to-\infty} s_{i+j,j}^{a,b}\ , \\ \widetilde{r}_{i,j} = \lim_{a\to\infty} \widetilde{r}_{i,j}^{a,b} & \text{et} & \widetilde{s}_{i,j} = \lim_{a\to-\infty} \widetilde{s}_{i,j}^{a,b} \end{array}$$

Remarque 5.3.6. — On aurait envie de poser

$$r_{i-j,j} = (-1)^{j+1}\frac{\det(T_{]-\infty,i-1],]-\infty,i]-\{i-j\}})}{\det(T_{]-\infty,i-1],]-\infty,i-1]})}.$$

On peut sans doute interpréter les déterminants infinis $\det(T_{]-\infty,i-1],]-\infty,i]-\{i-j\}})$ et $\det(T_{]-\infty,i-1],]-\infty,i-1]})$ comme des fonctions theta, c'est-à-dire comme des sections d'un certain fibré en droites (dépendant de $i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$) sur la variété de drapeaux affine $\mathcal{D}$ de la section 2 (voir [**BL**] , [**Fal2**] ou [**PS**]).

Utilisant les coefficients $r_{i-j,j}$, $s_{i+j,j}$, $\widetilde{r}_{i,j}$ et $\widetilde{s}_{i,j}$ on forme des matrices R, S, $\widetilde{R}$ et $\widetilde{S}$. On va maintenant vérifier que les égalités $R^{a,b}\widetilde{R}^{a,b} = \widetilde{R}^{a,b}R^{a,b} = \mathrm{Id}_{b-a+1}$, $S^{a,b}\widetilde{S}^{a,b} = \widetilde{S}^{a,b}S^{a,b} = \mathrm{Id}_{b-a+1}$ et $T_{[a,b],[a,b]}R^{a,b} = S^{a,b}$ passent à la limite et fournissent des égalités $R\widetilde{R} = \widetilde{R}R = \mathrm{Id}_\infty$, $S\widetilde{S} = \widetilde{S}S = \mathrm{Id}_\infty$ et $TR = S$.

En prolongeant $R^{a,b}$ (resp. $\cdots$) par 0 on considère ces quatres matrices comme des matrices de taille infinie, vérifiant les égalités $R^{a,b}\widetilde{R}^{a,b} = \widetilde{R}^{a,b}R^{a,b} = \mathrm{Id}_{[a,b]}$, $S^{a,b}\widetilde{S}^{a,b} = \widetilde{S}^{a,b}S^{a,b} = \mathrm{Id}_{[a,b]}$ et $TR^{a,b} = S^{a,b}$ –on peut aussi remarquer qu'en utilisant l'indépendance de b on forme des matrices $R^{a,+\infty}$ (resp.$\cdots$) vérifiant les égalités $R^{a,+\infty}\widetilde{R}^{a,+\infty} = \widetilde{R}^{a,+\infty}R^{a,+\infty} = \mathrm{Id}_{[a,+\infty[}$, $S^{a,+\infty}\widetilde{S}^{a,+\infty} = \widetilde{S}^{a,b}S^{a,b} = \mathrm{Id}_{[a,+\infty[}$ et $TR^{a,+\infty} = S^{a,+\infty}$; on pourrait aussi appliquer à ces matrices le raisonnement qui va suivre.

Lorsque a tend vers $-\infty$ et b vers $+\infty$ les matrices $R^{a,b}$, $S^{a,b}$, $\widetilde{R}^{a,b}$, $\widetilde{S}^{a,b}$ et $\mathrm{Id}_{[a,b]}$ convergent repectivement vers R, S, $\widetilde{R}$, $\widetilde{S}$ et Id_∞ pour la topologie de la convergence simple des coefficients. Les deux premières égalités $R^{a,b}\widetilde{R}^{a,b} = \widetilde{R}^{a,b}R^{a,b} = \mathrm{Id}_{[a,b]}$ et $S^{a,b}\widetilde{S}^{a,b} = \widetilde{S}^{a,b}S^{a,b} = \mathrm{Id}_{[a,b]}$ passent à la limite sans problème puisque les coefficients d'un produit de matrices *de taille infinie* triangulaires supérieures (resp. inférieures) sont en fait donnés par des sommes finies (de longueur ne dépendant que de la distance de ce coefficient à la diagonale principale de la matrice produit). Pour passer à la limite dans la troisième égalité, on remarque qu'il résulte du fait que $r^{a,b}_{i-j,j}$ et $r_{i-j,j}$ sont tous deux divisibles par $(t_{i-j}\cdots t_{i-1})^{q-1}$ (*cf.* 5.3.5) et *a fortiori*, par $(t_1\cdots t_d)^{(q-1)[j/d]}$, que la i-ème colonne $(r^{a,b}_{j,-j+i})_{j\in\mathbb{Z}}$ (avec $r^{a,b}_{i+j,0} = 1$ et $r^{a,b}_{i+j,-j} = 0$ pour $j > 0$) de la matrice $R^{a,b}$ converge uniformément vers la i-ème colonne $(r_{j,-j+i})_{j\in\mathbb{Z}}$ de la matrice R. On a donc bien $TR = S$, par la propriété de continuité du produit à gauche par T mentionnée au début de 5.3.

Lorsque a est assez négatif pour que ces expressions aient un sens, on vérifie aisément que $r^{a+d,b}_{i+d,j} = r^{a+d,b}_{i+d,j}$, $s^{a,b}_{i,j} = s^{a+d,b}_{i+d,j}$, $\widetilde{r}^{a,b}_{i,j} = \widetilde{r}^{a+d,b}_{i+d,j}$ et $\widetilde{s}^{a,b}_{i,j} = \widetilde{s}^{a+d,b}_{i+d,j}$. Il en résulte que $r_{i,j}$, $s_{i,j}$, $\widetilde{r}_{i,j}$ et $\widetilde{s}_{i,j}$ ne dépendent que de $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. On peut donc déjà considérer R, S, R^{-1} et S^{-1} comme des éléments du $A_{\mathcal{I}nt}[(t_1\cdots t_d)^{-1}]$-module $\mathrm{diag}(A_{\mathcal{I}nt}[(t_1\cdots t_d)^{-1}]^d)[[{}^tP, {}^tP^{-1}]]$ ou, ce qui revient au même, comme des matrices de taille finie d à coefficients dans le $A_{\mathcal{I}nt}[(t_1\cdots t_d)^{-1}]$-module $A_{\mathcal{I}nt}[(t_1\cdots t_d)^{-1}][[z,z^{-1}]]$.

On munit $A_{\mathcal{I}nt}[(t_1\cdots t_d)^{-1}]$ de la norme additive $(t_1\cdots t_d)^{q-1}$-adique [13]

$$\nu : A_{\mathcal{I}nt} \to \mathbb{Q}\cup\{+\infty\}$$

et on utilise cette norme additive pour définir des $A_{\mathcal{I}nt}[(t_1\cdots t_d)^{-1}]$-algèbres $\mathcal{H}(]\nu_1,\nu_2[, A_{\mathcal{I}nt})$ comme dans le paragraphe 4.2. Il résulte alors de la proposition 5.3.5 que les matrices R, S, R^{-1} et S^{-1} ont elles aussi les propriétés énoncées dans

[13] définie comme la norme π-adique de 4.2 mais en remplaçant π par $(t_1\cdots t_d)^{q-1}$. En fait, le morphisme de décomposition munit $A_{\mathcal{I}nt}$ d'une structure de $\breve{\mathcal{O}}$-algèbre pour laquelle $\pi/(t_1\cdots t_d)^{q-1}$ est une unité (voir quelques lignes après le signe de renvoi de cette note) si bien qu'*a posteriori* cette norme est aussi la norme π-adique.

la proposition 4.2.2 et qu'en particulier elles ont toutes les quatre leurs coefficients dans la $A_{\mathcal{I}nt}[(t_1\cdots t_d)^{-1}]$-algèbre $\mathcal{H}(]\frac{1}{q},1[,A_{\mathcal{I}nt})$.

Soit $\Phi = R^{-1}\,{}^tPR$, considérée pour l'instant comme une matrice à coefficients dans $\mathcal{H}(]\frac{1}{q},1[,A_{\mathcal{I}nt})$. Il résulte de l'égalité $T\,{}^tP = {}^\tau T$ que l'on a $S\Phi = {}^\tau S$ et donc aussi $\Phi = S^{-1}\,{}^\tau S$ (on rappelle que les matrices S et T ont leurs coefficients dans $\mathcal{H}(]0,+\infty[,A_{\mathcal{I}nt})$). En particulier, le développement $\sum_j {}^tP^j \operatorname{diag}(\phi_{i,j})_{1\le i\le d}$ de la matrice $\Phi = S^{-1}\,{}^\tau S = R^{-1}\,{}^tPR$ ne fait intervenir que des termes de degré 0 et 1 et le terme de degré 0 est ${}^tP$. Pour retrouver les notations de 2.2, on renomme x_i l'élément $\phi_{i,0}$.

Il résulte de l'égalité $S\Phi = {}^\tau S$ que x_i n'est autre que $s_{i,0}^{q-1}$. En particulier, le produit $\pi = (-1)^{d-1}x_1\cdots x_d$ est le produit de $(t_1\cdots t_d)^{q-1}$ par une unité, ce qui munit $A_{\mathcal{I}nt}$ d'une structure de $\breve{\mathcal{O}}$-algèbre topologique. En remarquant que les éléments x_i, qui sont le produit de t_i^{q-1} par une unité, sont topologiquement nilpotents dans $A_{\mathcal{I}nt}$ on obtient donc déjà un point de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}}$ à valeurs dans $A_{\mathcal{I}nt}$. Reprenant les notations de (3.2), on définit donc un morphisme

$$\widehat{B}_{\mathcal{LT},\infty} = (\breve{\mathcal{O}}[[(x_i)_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}]][(s_{i,j})_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z},j\in\mathbb{N}}]/\mathcal{I}'_{\mathcal{D}r,\infty})^\frown \to A_{\mathcal{I}nt},$$

où l'on note $\mathcal{I}'_{\mathcal{D}r,\infty}$ l'idéal engendré par $\pi-(-1)^dx_1\cdots x_d$ et par les éléments $s_{i,0}^{q-1}-x_i$ et $s_{i,j}^q - x_{i-j}s_{i,j} - s_{i,j-1}$ ($i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, j\ge 1$), et où $^\frown$ désigne la complétion $(x_1,\cdots,x_d)$-adique.

La $\breve{\mathcal{O}}$-algèbre $\widehat{B}_{\mathcal{LT},\infty}$ est plate puisqu'elle s'obtient à partir de la réunion d'une tour d'algèbres finies localement libres sur la $\breve{\mathcal{O}}$-algèbre plate

$$B_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times} = \breve{\mathcal{O}}[[x_1,\cdots,x_d]]/(x_1\cdots x_d-(-1)^d\pi)$$

en prenant la complétion pour la topologie $(x_1,\cdots,x_d)$-adique. Les éléments x_i, qui divisent π, ne sont donc pas des diviseurs de zéro dans $\widehat{B}_{\mathcal{LT},\infty}$. Le morphisme évident $\widehat{B}_{\mathcal{LT},\infty}\to\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ est donc une injection et identifie $\widehat{B}_{\mathcal{LT},\infty}$ au complété π-adique de la sous-algèbre de $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ engendrée par les $s_{i,j}$ (les x_i sont nilpotents modulo π dans $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$).

Il reste à vérifier que ce morphisme s'étend à $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}\supset\widehat{B}_{\mathcal{LT},\infty}$. Pour cela on remarque que $s_{i,0}^q/s_{i+1,0}$ est le produit de t_i^q/t_{i+1} et d'une unité de $A_{\mathcal{I}nt}$ (on rappelle qu'on a plus généralement $s_{i+j,j}/t_{i+j}^{q^{-j}}\in A_{\mathcal{I}nt}^\times$), si bien que $s_{i,0}^q/s_{i+1,0}$ appartient à $A_{\mathcal{I}nt}$. Comme $A_{\mathcal{I}nt}$ est normal, le morphisme s'étend au normalisé et on obtient finalement le morphisme continu de $\overline{\mathbb{F}}_q$-algèbres topologiques

$$(\text{décomposition})^* : \widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}\to A_{\mathcal{I}nt}$$

annoncé –bien entendu, ce morphisme est même un morphisme de $\breve{\mathcal{O}}$-algèbres topologiques, mais il n'y a pas grand mérite à cela car on a défini la structure de $\breve{\mathcal{O}}$-algèbre sur $A_{\mathcal{I}nt}$ par transport de structures.

On va finalement démontrer que les morphismes

$$\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty} \underset{(\text{produit})^*}{\overset{(\text{décomposition})^*}{\rightleftarrows}} A_{\mathcal{I}nt}$$

sont des isomorphismes, inverses deux à deux.

On traite d'abord le cas du morphisme composé

$$C_{\mathcal{I}nt} : A_{\mathcal{I}nt} \overset{(\text{produit})^*}{\to} \widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty} \overset{(\text{décomposition})^*}{\to} A_{\mathcal{I}nt}\,.$$

Les matrices infinies R et S que l'on vient de construire satisfont l'identité $T_{\mathcal{LT}} = SR^{-1}$ (où $T_{\mathcal{LT}}$ est la matrice tautologique à valeurs dans $A_{\mathcal{I}nt}$). Le morphisme $C_{\mathcal{I}nt}$ est donc égal à l'identité sur les t_i. La $\overline{\mathbb{F}}_q$-algèbre $A_{\mathcal{I}nt}$ est intègre et le morphisme $C_{\mathcal{I}nt}$ est continu ; c'est donc l'identité.

On traite maintenant le cas du morphisme composé

$$C_{\mathcal{LT},\infty} : \widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty} \overset{(\text{décomposition})^*}{\to} A_{\mathcal{I}nt} \overset{(\text{produit})^*}{\to} \widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}\,.$$

Un raisonnement analogue à celui qu'on a fait dans la proposition 4.2.1 (unicité de la décomposition) démontre qu'en redécomposant le produit $T = SR^{-1}$, on réobtient les matrices R et S. Le morphisme $\widehat{B}_{\mathcal{LT},\infty} \to \widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ obtenu en composant $C_{\mathcal{LT},\infty}$ avec l'injection évidente $\widehat{B}_{\mathcal{LT},\infty} \to \widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ est donc encore cette injection évidente –en particulier le morphisme $C_{\mathcal{LT},\infty}$ est donc l'identité sur les $s_{i,j}$.

La $\breve{\mathcal{O}}$-algèbre $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ est plate, par définition (*cf.* 3.2). Les éléments x_i, qui divisent π, ne sont donc pas des diviseurs de zéro dans $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ et le morphisme $C_{\mathcal{LT},\infty}$ est donc aussi l'identité sur les éléments x_i^q/x_{i+1}. Soit $A'_{\mathcal{LT},\infty}$ la sous-algèbre de $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ engendrée par les $s_{i,j}$ et par les x_i^q/x_{i+1}. On rappelle (3.2) que $\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ s'obtient comme complétée d'une algèbre $A_{\mathcal{LT},\infty}$, qui n'est autre que la clôture intégrale de $A'_{\mathcal{LT},\infty}$ dans $A'_{\mathcal{LT},\infty}$. Le morphisme continu $C_{\mathcal{LT},\infty}$, qui prolonge l'injection évidente $A'_{\mathcal{LT},\infty} \to \widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ est donc l'identité, ce qui achève la démonstration.

5.3.3. Décomposition côté Drinfeld. — Dans ce paragraphe on note $T = T_{\mathcal{D}r}$, $R = R_{\mathcal{D}r}$ et $S = S_{\mathcal{D}r}$ et on les représente comme des matrices infinies sous la forme annoncée au début de (5.3).

On rappelle que

$$T = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & t_{i-1} & t_i^{q^{-1}} & t_{i+1}^{q^{-2}} & \cdots \\ \cdots & t_{i-1}^{q} & t_i & t_{i+1}^{q^{-1}} & \cdots \\ \cdots & t_{i-1}^{q^2} & t_i^{q} & t_{i+1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

(c'est donc la transposée de la matrice utilisée en 5.3.1).

Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, avec $a \leq b$, nous allons montrer que $T_{[a,b],[a,b]}$ s'écrit (de manière unique bien sûr) comme un produit $S^{a,b}(R^{a,b})^{-1}$ où $S^{a,b}$ est une matrice triangulaire supérieure à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^{\frown}$ et $R^{a,b}$ est une matrice triangulaire inférieure à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_q[\mathbb{M}[q^{-1}]]^{\frown}$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1. En conformité avec les notations déjà introduites, on écrit les matrices $R^{a,b}$ et $S^{a,b}$ sous la forme

$$R^{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ r^{a,b}_{a,i-a-1} & \cdots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ r^{a,b}_{a,i-a} & \cdots & r^{a,b}_{i-1,1} & 1 & \ddots & & \vdots \\ r^{a,b}_{a,i+1-a} & \cdots & r^{a,b}_{i-1,2} & r^{a,b}_{i,1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ r^{a,b}_{a,b-a} & \cdots & r^{a,b}_{i-1,b-i+1} & r^{a,b}_{i,b-i} & r^{a,b}_{i+1,b-i-1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$S^{a,b} = \begin{pmatrix} s^{a,b}_{a,0} & \cdots & s^{a,b}_{i-1,i-1-a} & s^{a,b}_{i,i-a} & s^{a,b}_{i+1,i+1-a} & \cdots & s^{a,b}_{b,b-a} \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & s^{a,b}_{i-1,0} & s^{a,b}_{i,1} & s^{a,b}_{i+1,2} & \cdots & s^{a,b}_{b,b-i+1} \\ \vdots & & \ddots & s^{a,b}_{i,0} & s^{a,b}_{i+1,1} & \cdots & s^{a,b}_{b,b-i} \\ \vdots & & & \ddots & s^{a,b}_{i+1,0} & \cdots & s^{a,b}_{b,b-i-1} \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & s^{a,b}_{b,0} \end{pmatrix}$$

On pose $\widetilde{R}^{a,b} = (R^{a,b})^{-1}$ et $\widetilde{S}^{a,b} = (S^{a,b})^{-1}$; on indexe les coefficients $\widetilde{r}^{a,b}_{i,j}$ et $\widetilde{s}^{a,b}_{i,j}$ des matrices $\widetilde{R}^{a,b}$ et $\widetilde{S}^{a,b}$ comme ceux des matrices $R^{a,b}$ et $S^{a,b}$.

On rappelle que l'on note $E'_j = P^{1-j}e_1$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Les relations $T_{[a,b],[a,b]}R^{a,b} = S^{a,b}$ et ${}^tT_{[a,b],[a,b]}\,{}^t\widetilde{S}^{a,b} = {}^t\widetilde{R}^{a,b}$, que l'on souhaite obtenir, impliquent les égalités

$$\begin{aligned} T_{[a,b],[a,b]}(E'_i) + r^{a,b}_{i,1}T_{[a,b],[a,b]}(E'_{i+1}) + \cdots + r^{a,b}_{i,b-i}T_{[a,b],[a,b]}(E'_b) \\ = s^{a,b}_{i,0}E'_i + s^{a,b}_{i,1}E'_{i-1} + \cdots + s^{a,b}_{i,i-a}E'_a \end{aligned}$$

$$\text{et} \qquad \begin{aligned} \widetilde{s}^{a,b}_{i,0}\,{}^tT_{[a,b],[a,b]}(\check{E}'_i) + \widetilde{s}^{a,b}_{i+1,1}\,{}^tT_{[a,b],[a,b]}(\check{E}'_{i+1}) + \cdots + \widetilde{s}^{a,b}_{b,b-i}\,{}^tT_{[a,b],[a,b]}(\check{E}'_b) \\ = \check{E}'_i + \widetilde{r}^{a,b}_{i-1,1}\check{E}'_{i-1} + \cdots + \widetilde{r}^{a,b}_{a,i-a}\check{E}'_a\,. \end{aligned}$$

En considérant successivement le produit extérieur de la première de ces deux égalités

– à gauche, par $\bigwedge_{k\in[a,i]-\{i-j\}} E'_k$ et à droite, par $\bigwedge_{k\in[i+1,b]} T_{[a,b],[a,b]}(E'_k)$

– à gauche, par $\bigwedge_{k\in[a,i]} E'_k$ et à droite, par $\bigwedge_{k\in[i+1,b]-\{i+j\}} T_{[a,b],[a,b]}(E'_k)$

puis le produit extérieur de la deuxième

– à gauche, par $\bigwedge_{k\in[a,i-1]} \check{E}'_k$ et à droite, par $\bigwedge_{k\in[i,b]-\{i+j\}} {}^tT_{[a,b],[a,b]}(\check{E}'_k)$

– à gauche, par $\bigwedge_{k\in[a,i-1]-\{i-j\}} \check{E}'_k$ et à droite, par $\bigwedge_{k\in[i,b]} {}^tT_{[a,b],[a,b]}(\check{E}'_k)$

on obtient

$$s^{a,b}_{i,j} = \frac{\det(T_{\{i-j\}\cup[i+1,b],[i,b]})}{\det(T_{[i+1,b],[i+1,b]})}$$

$$r^{a,b}_{i,j} = (-1)^{j+1}\frac{\det(T_{[i+1,b],[i,b]-\{i+j\}})}{\det(T_{[i+1,b],[i+1,b]})}$$

$$\widetilde{s}^{a,b}_{i+j,j} = (-1)^{j+1}\frac{\det(T_{[i,b]-\{i+j\},[i+1,b]})}{\det(T_{[i,b],[i,b]})}$$

$$\text{et}\qquad \widetilde{r}^{a,b}_{i-j,j} = \frac{\det(T_{[i,b],\{i-j\}\cup[i+1,b]})}{\det(T_{[i,b],[i,b]})}$$

Proposition 5.3.7. — *Les quotients*

$$\frac{r^{a,b}_{i,j}}{((t_i^q/t_{i+1})(t_{i+1}^q/t_{i+2})\cdots(t_{i+j-1}^q/t_{i+j}))},\ \widetilde{r}^{a,b}_{i-j,j}\frac{t_i}{t_{i-j}^{q^j}},\ \frac{s^{a,b}_{i,j}}{t_i^{q^{-j}}}\quad et\quad \widetilde{s}^{a,b}_{i+j,j}\frac{t_i\cdots t_{i+j}}{t_{i+1}^{q^{-1}}\cdots t_{i+j}^{q^{-1}}}$$

appartiennent à $A_{\mathcal{I}nt}$; les deux premiers sont même dans $A_{\mathcal{I}nt}^{\times}$.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate des formules ci-dessus et des lemmes 5.3.1 et 5.3.2. □

On remarque que $r^{a,b}_{i,j}$, $s^{a,b}_{i,j}$, $\widetilde{r}^{a,b}_{i-j,j}$ et $\widetilde{s}^{a,b}_{i+j,j}$ ne dépendent pas de a.

Il résulte du lemme 5.3.4 que $r^{a,b}_{i,j}$, $s^{a,b}_{i,j}$, $\widetilde{r}^{a,b}_{i-j,j}$ et $\widetilde{s}^{a,b}_{i+j,j}$ admettent une limite dans $A_{\mathcal{I}nt}$ quand b tend vers $+\infty$. On pose alors

$$\begin{aligned} r_{i,j} &= \lim\nolimits_{b\to+\infty} r^{a,b}_{i,j}, & s_{i,j} &= \lim\nolimits_{b\to+\infty} s^{a,b}_{i,j},\\ \widetilde{r}_{i-j,j} &= \lim\nolimits_{b\to+\infty} \widetilde{r}^{a,b}_{i-j,j} \quad\text{et} & s^{a,b}_{i+j,j} &= \lim\nolimits_{b\to+\infty} \widetilde{s}^{a,b}_{i+j,j}. \end{aligned}$$

Les quelques lignes qui vont suivre (jusqu'à la définition d'un point (Φ,R,S) de $\varprojlim_n \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}$ à valeurs dans la $\breve{\mathcal{O}}$-algèbre $A_{\mathcal{I}nt}$) sont parfaitement analogues à ce qu'on a déjà fait du côté Lubin-Tate ; on a donc un peu abrégé la formulation des arguments.

Utilisant les coefficients $r_{i,j}$, $s_{i,j}$, $\widetilde{r}_{i,j}$ et $\widetilde{s}_{i,j}$ on forme des matrices de taille infinie R, S, $\widetilde{R}$ et $\widetilde{S}$. On prolonge les matrices $R^{a,b}$ (resp. $\cdots$) par 0, ce qui permet de les considérer comme des matrices infinies telles que $R^{a,b}\widetilde{R}^{a,b} = \widetilde{R}^{a,b}R^{a,b} = \mathrm{Id}_{[a,b]}$, $S^{a,b}\widetilde{S}^{a,b} = \widetilde{S}^{a,b}S^{a,b} = \mathrm{Id}_{[a,b]}$ et $TR^{a,b} = S^{a,b}$. Les deux premières égalités passent à la limite et on a donc $\widetilde{R} = R^{-1}$ et $\widetilde{S} = S^{-1}$. Les estimées (5.3.7) pour $r_{i,j}^{a,b}$ et celles qui en découlent immédiatement pour $r_{i,j}$ entraînent que la i-ème colonne de la matrice $R^{a,b}$ converge uniformément vers celle de la matrice R pour tout $i \in \mathbb{Z}$; on a donc $T = RS$.

Les coefficients $r_{i,j}$, $s_{i,j}$, $\widetilde{r}_{i,j}$ et $\widetilde{s}_{i,j}$ ne dépendent en fait que de i modulo d, comme on le voit en utilisant l'identité $r_{i,j}^{a,b} = r_{i+d,j}^{a,b+d}$ (resp. $\cdots$), ce qui permet de considérer $R, \ldots, S^{-1}$ comme des matrices de taille d à coefficients dans le $A_{\mathcal{I}nt}[(t_1 \cdots t_d)^{-1}]$-module $A_{\mathcal{I}nt}[(t_1 \cdots t_d)^{-1}][[z, z^{-1}]]$. En utilisant la proposition 5.3.7, on vérifie que les matrices R, S, R^{-1} et S^{-1} ont en fait les propriétés énoncées dans la proposition 4.2.2 –à cela près qu'il faut remplacer la norme additive π-adique par la norme additive $(t_1 \cdots t_d)^{q-1}$-adique de $A_{\mathcal{I}nt}$. On vérifie alors en utilisant l'identité ${}^{\tau}T = PT$ que $\Phi = R^{-1}\,{}^{\tau}R$ est aussi égale à $S^{-1}P^{-1}\,{}^{\tau}S$ dans $\mathcal{H}(]\frac{1}{q}, 1[, A_{\mathcal{I}nt})$.

La matrice Φ s'écrit donc sous la forme $\mathrm{Id}_d + P^{-1}\,\mathrm{diag}(y_i)_{1 \leq i \leq d}$. On munit $A_{\mathcal{I}nt}$ d'une structure de $\breve{\mathcal{O}}$-algèbre topologique en posant $\pi = (-1)^d y_1 \cdots y_d$ –ce morphisme est continu car $\pi/(t_1 \cdots t_d)^{q-1}$ est une unité de $A_{\mathcal{I}nt}$; rien ne garantit pour l'instant que cette structure de $\breve{\mathcal{O}}$-algèbre coïncide avec celle définie de manière analogue du côté Lubin-Tate. Comme la $\breve{\mathcal{O}}$-algèbre $A_{\mathcal{I}nt}$ est normale, le triplet (Φ, R, S) définit déjà un point de la limite projective complétée $\varprojlim_n \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n}$ à valeurs dans la $\breve{\mathcal{O}}$-algèbre $A_{\mathcal{I}nt}$.

On va maintenant vérifier que ce point se factorise en fait à travers le sous-schéma formel ouvert $\breve{\mathcal{M}}^{0}_{\mathcal{D}r,\infty,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d} = \mathrm{Spf}\,\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$.

Il résulte déjà de (5.3.7) que $r_{i,j} \in \pi A_{\mathcal{I}nt}$ pour $j \geq d$.

Par ailleurs pour $\alpha \in \mathbb{F}_q^{\times}$, $1 \leq j \leq d-1$ et $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ on a, pour $a \leq i$ et $b = i+k$ avec $k \geq j$,

$$1 - \alpha r_{i,j}^{a,b} = \frac{\mathrm{Moore}(t_{i+1}, \cdots, t_{i+j}^{q^{-j+1}} - \alpha t_i^q, \cdots, t_{i+k}^{q^{-k+1}})}{\mathrm{Moore}(t_{i+1}, \cdots, t_{i+j}^{q^{-j+1}}, \cdots, t_{i+k}^{q^{-k+1}})}.$$

A une constante près dans $\mathbb{F}_q^{\times}$, ceci est égal à

$$\prod_{[\alpha_1, \cdots, \alpha_k] \in \mathbb{P}^{k-1}(\mathbb{F}_q)} \frac{\alpha_1 t_{i+1} + \cdots + \alpha_j (t_{i+j}^{q^{-j+1}} - \alpha t_i^q) + \cdots + \alpha_k t_{i+k}^{q^{-k+1}}}{\alpha_1 t_{i+1} + \cdots + \alpha_j t_{i+j}^{q^{-j+1}} + \cdots + \alpha_k t_{i+k}^{q^{-k+1}}}.$$

Or chaque terme est une unité dans $A_{\mathcal{I}nt}$, car t_i^q n'apparaît jamais en dernier. Donc, pour tout $\alpha \in \mathbb{F}_q^{\times}$, $1 - \alpha r_{i,j}^{a,b}$ est une unité de $A_{\mathcal{I}nt}$. En passant à la limite, on voit qu'il en va de même pour $1 - \alpha r_{i,j}$, ce qui achève la vérification du fait que le point (Φ, R, S) appartient à $\breve{\mathcal{M}}^{0}_{\mathcal{D}r,\infty,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d} = \mathrm{Spf}\,\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ –ou, de manière équivalente, définit un morphisme continu $A_{\mathcal{I}nt} \to \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$.

Enfin, les morphismes

$$\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty} \underset{(\text{produit})^*}{\overset{(\text{décomposition})^*}{\rightleftarrows}} A_{\mathcal{I}nt}$$

sont des isomorphismes, inverses deux à deux. La démonstration est exactement du même type que du côté Lubin-Tate. Elle sera donc omise.

5.4. Déterminants et structure de $\breve{\mathcal{O}}$-algèbre sur $A_{\mathcal{I}nt}$. — On va vérifier que les deux structures de $\breve{\mathcal{O}}$-algèbre sur $A_{\mathcal{I}nt}$ provenant des deux morphismes de décomposition coïncident et donner une formule pour l'élément $\pi \in A_{\mathcal{I}nt}$.

Pour cela, on va utiliser des morphismes déterminant analogues à celui de [**G**, ch. IV]. Ces morphismes déterminant envoient les tours de Lubin Tate et de Drinfeld en rang d vers les tours correspondantes en rang 1. On notera donc $A^d_{\mathcal{LT}}, A^d_{\mathcal{D}r}, \widehat{A}^d_{\mathcal{LT},\infty}, \widehat{A}^d_{\mathcal{D}r,\infty}$ et $A^d_{\mathcal{I}nt}$ les $\overline{\mathbb{F}}_q$-algèbres notées $A_{\mathcal{LT}}, A_{\mathcal{D}r}, \widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}, \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ et $A_{\mathcal{I}nt}$ jusqu' à présent.

Les déterminants des matrices Φ_X (2.2) et Φ_Y(2.3) sont respectivement $(-1)^{d-1}(z-\pi)$ et $1-\pi/z$ et le déterminant de P est $(-1)^{d-1}z$. Les déterminants $\det R_*$ ($* = \mathcal{LT}$ ou $\mathcal{D}r$) vérifient alors tous deux l'équation $\det R_* = (1 - \pi/z)\,{}^{\tau}\!\det R_*$ et sont donc tous deux égaux à $(1-\pi/z)^{-1}(1-\pi^q/z)^{-1}\cdots$ car ils sont congrus à 1 modulo π. On obtient ainsi un morphisme $\det : A^1_* \to A^d_*$, qui n'est autre que le morphisme structural $\breve{\mathcal{O}} \to A_*$ de la $\breve{\mathcal{O}}$-algèbre A_*.

Ceci permet déjà de vérifier que les deux structures de $\breve{\mathcal{O}}$-algèbre sur $A_{\mathcal{I}nt}$ induites par les deux morphismes de décomposition coïncident. En effet, $\det S_*$ s'écrit comme un série entière en z alors que $\det R_*$ s'écrit sous la forme $1 + z^{-1} \times$ (série entière en z^{-1}) ; on a ainsi évidemment $\det R_{\mathcal{LT}} = \det R_{\mathcal{D}r}$ et les deux structures de $\breve{\mathcal{O}}$-algèbre sur $A_{\mathcal{I}nt}$ coïncident donc.

Pour expliciter en termes intrinsèques la structure de $\breve{\mathcal{O}}$-algèbre ainsi obtenue, on pourrait utiliser (en rang 1) les formules de décomposition donnant R_* en fonction de S_*. Il est cependant plus commode d'utiliser celles donnant la matrice S_*, qui sont en fait plus simples. On remarque que l'on a $(-1)^{d-1}(z-\pi)\det S_* = {}^{\tau}\!\det S_*$ et $(-1)^{d-1}z\det T_* = {}^{\tau}\!\det T_*$. Choisissant une racine $(q-1)$-ème μ de -1 dans $\breve{\mathcal{O}}$, on obtient alors des morphismes déterminant

$$\begin{array}{ccc} \det_\mu : \operatorname{Spf} \widehat{A}^d_{*,\infty} \to \operatorname{Spf} \widehat{A}^1_{*,\infty} & \text{et} & \det_\mu : \operatorname{Spf} A^d_{\mathcal{I}nt} \to \operatorname{Spf} A^1_{\mathcal{I}nt} \\ (R_*, S_*) \mapsto (\det R_*, \mu \det S_*) & & T_* \mapsto \mu \det T_* \end{array}$$

compatibles aux morphismes de décomposition $\operatorname{Spf} A^d_{\mathcal{I}nt} \to \operatorname{Spf} \widehat{A}^d_{*,\infty}$ et $\operatorname{Spf} A^1_{\mathcal{I}nt} \to \operatorname{Spf} \widehat{A}^1_{*,\infty}$. En particulier, appliquant la décomposition du paragraphe 5.3 à $\det T_* = \sum_{j\in\mathbb{Z}} t^{q^{-j}}((-1)^{d-1}z)^j$, on trouve $\det S_* = s_0 + s_1 z + \cdots$ avec $s_0^{q-1} = \pi$.

Explicitement, la structure de $\breve{\mathcal{O}}$-algèbre sur $A_{\mathcal{I}nt}$ est la suivante :

$$\pi = \lim_{k \mapsto +\infty} (-1)^{d-1} \left(\frac{D_{k+1}(t)}{D_k(t)} \right)^{q-1} \quad , \quad \text{où}$$

$$D_k(t) = \det \begin{pmatrix} t & t^q & \cdots & t^{q^k} \\ t^{q^{-1}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t^q \\ t^{q^{-k}} & \cdots & t^{q^{-1}} & t \end{pmatrix}$$

On peut aussi caractériser π comme l'unique solution de valuation t-adique $q-1$ de l'équation $\sum_{j \in \mathbb{Z}} t^{q^{-j}} ((-1)^{d-1} z)^j = 0$ dans $A^1_{\mathcal{I}nt}$. En effet, la série $\sum_{j \in \mathbb{Z}} t^{q^{-j}} ((-1)^{d-1} z)^j$ converge sur le disque ouvert épointé de rayon 1 ; la série $\det R_*^{-1} = (1 - \pi/z)(1 - \pi^q/z)$ converge aussi sur ce disque ouvert épointé (et même au-delà...) et a des zéros en $z = \pi, \pi^q, \pi^{q^2} \cdots$ alors que la série $\det S_* = \mu^{-1}(s_0 + s_1 z + \cdots)$ converge sur le disque ouvert de rayon 1 et a des zéros en $z = \pi^{q^{-1}}, \pi^{q^{-2}} \cdots$ Il suffit alors de se rappeler que la valuation π-adique de t est $1/(q-1)$; la valuation t-adique de π est donc $q-1$.

Remarque 5.4.1. — La structure de $\overline{\mathbb{F}}_q$-algèbre de $A_{\mathcal{I}nt}$ est assez simple mais sa structure de $\breve{\mathcal{O}}$-algèbre est plus compliquée, comme la formule ci-dessus le montre. On peut rapprocher cela de la situation pour les espaces de modules avec structures de niveau $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n}$ (ou de ceux considérés dans la remarque 2.2.3). L'algèbre de fonctions du $\overline{\mathbb{F}}_q$-schéma formel affine $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n}$ (ou, plus précisément, de sa composante connexe $\{\mathrm{ht}\, \rho = 0\}$) est une $\overline{\mathbb{F}}_q$-algèbre de séries formelles, puisque $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{ht}=0}_{\mathcal{LT},n}$ est pro-artinienne et régulière [**D1**], mais l'élément π est là aussi donné par une formule un peu compliquée, faisant d'ailleurs elle aussi intervenir des déterminants de Moore comme ceux que l'on a rencontrés dans le paragraphe 5.1.

5.5. Démonstration de 4.1.1.2. — On va se placer dans $A_{\mathcal{I}nt}$ et considérer les éléments x_i^q / x_{i+1} et y_i comme des éléments de $A_{\mathcal{I}nt}$. On rappelle qu'on a $x_i = (s^{\mathcal{LT}}_{i,0})^{q-1}$ et $y_i = (s^{\mathcal{D}r}_{i,0})^q / s^{\mathcal{D}r}_{i+1,0}$. On rappelle aussi que $s^{\mathcal{LT}}_{i,0}/t_i$ et $s^{\mathcal{D}r}_{i,0}/t_i$ sont des unités de $A_{\mathcal{I}nt}$ (voir les propositions 5.2.2 et 5.2.4 et utiliser le fait que les morphismes de produit 5.2 sont des isomorphismes). L'élément $s^{\mathcal{LT}}_{i,0}/s^{\mathcal{D}r}_{i,0}$ est alors une unité et on a

$$x_i^q / x_{i+1} = (s^{\mathcal{LT}}_{i,0} / s^{\mathcal{D}r}_{i,0})^{q(q-1)} (s^{\mathcal{LT}}_{i+1,0} / s^{\mathcal{D}r}_{i+1,0})^{1-q} y_i^{q-1} \ ,$$

ce qui démontre la deuxième partie du théorème 4.1.1 et achève par conséquent la démonstration du théorème 1.5.3.

Références

[B] P. Berthelot. Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propre, première partie. *Prépublication 96-03, Université de Rennes 1.* Disponible sur le site `perso.univ-rennes1.fr/pierre.berthelot/`.

[BC] J.-F. Boutot et H. Carayol. Uniformisation p-adique des courbes de Shimuara : les théorèmes de Cherednik et de Drinfeld. *Courbes modulaires et courbes de Shimura (Orsay, 1987/1988)*, volume 196–197 de *Astérisque*, pages 45–149, 1991.

[BL] A. Beauville et Y. Laszlo. Conformal blocks and generalized theta functions. *Comm. Math. Phys.* 164(2), pages 385–419, 1994.

[C] H. Carayol. Nonabelian Lubin-Tate theory. *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. II (Ann Arbor, MI, 1988)*, volume 11 de *Perspect. Math.*, pages 15–39. Academic Press.

[D1] V. G. Drinfeld. Elliptic modules. *Mat. Sb. (N.S.)* 94(136), pages 594–62, 1974.

[D2] V. G. Drinfeld. Coverings of p-adic symmetric domains. *Funkcional. Anal. i Priložen.* 10(2), pages 29–40, 1976.

[Fal1] G. Faltings. A relation between two moduli spaces studied by V. G. Drinfeld. *Algebraic number theory and algebraic geometry*, volume 300 de *Contemp. Math.*, pages 115–129. 2002.

[Fal2] G. Faltings. Algebraic loop groups and moduli spaces of bundles. *J. Eur. Math. Soc.* 5(1), pages 41–68, 2003.

[Far1] L. Fargues. L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld. *Ce volume*, pages

[Far2] L. Fargues. Application de Hodge-Tate duale d'un groupe de Lubin-Tate, immeuble de Bruhat-Tits du groupe linéaire et filtrations de ramification. *Prépublication* `arXiv math.NT/0604252v1`, article soumis à *Duke Math. Journal*

[G] A. Genestier. Espaces symétriques de Drinfeld. *Astérisque* 234, 1996.

[GI] O. Goldman et N. Iwahori The space of $\mathfrak{p}$-adic norms. *Acta Math.* 109, pages 137–177, 1963.

[HG1] M. J. Hopkins et B. H. Gross. Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space. *Topology and representation theory (Evanston, IL, 1992)*, volume 158 de *Contemp. Math.*, pages 23–88. 1994.

[HG2] M. J. Hopkins et B. H. Gross. Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space (*la prépublication*).

[K] N. Katz. Serre-Tate local moduli. In *Algebraic surfaces (Orsay, 1976–78)*, volume 868 de *Lecture Notes in Math.*, pages 138–202. Springer, 1981.

[LT] J. Lubin et J. Tate. Formal moduli for one-parameter formal Lie groups. *Bull. Soc. Math. France* 94, pages 49–59, 1966.

[PS] A. Pressley et G. Segal. *Loop groups.* Oxford Mathematical Monographs. 1986.

[RZ] M. Rapoport et Th. Zink. *Period spaces for p-divisible groups*, volume 141 de *Annals of Mathematics Studies.* 1996.

[T] J. Tits. Reductive groups over local fields. *Automorphic forms, Representations and L-functions, part 1 (Corvallis, 1977)*, volume 33 de *Proceedings of symposia in pure mathematics*, pages 29–69. A.M.S.

[vdPV] M. van der Put et H. Voskuil. Symmetric spaces associated to split algebraic groups over a local field. *J. Reine Angew. Math.* 433, pages 69–100, 1992.

Alain Genestier et Vincent Lafforgue