

K-THÉORIE BIVARIANTE POUR LES ALGÈBRES DE BANACH, GROUPOÏDES ET CONJECTURE DE BAUM–CONNES. AVEC UN APPENDICE D’HERVÉ OYONO-OYONO

VINCENT LAFFORGUE

*Institut de Mathématiques de Jussieu, 175, rue de Chevaleret,
75013 Paris, France* (vlafforg@math.jussieu.fr)

(Reçu le 27 juillet 2005 ; accepté le 19 janvier 2006)

Résumé Nous construisons une *KK*-théorie pour les algèbres de Banach équivariante par l’action d’un groupoïde et nous montrons la conjecture de Baum–Connes à coefficients commutatifs pour les groupes hyperboliques et pour les groupoïdes de Poincaré des feuilletages à base compacte qui peuvent être munis d’une métrique riemannienne longitudinale à courbure sectionnelle strictement négative.

Abstract We construct a *KK*-theory for Banach algebras, equivariant with respect to the action of a groupoid. We prove the Baum–Connes conjecture with commutative coefficients for hyperbolic groups and for the Poincaré groupoids of foliations with a compact base and a longitudinal Riemannian metrics with negative sectional curvature.

Mots clés : théorie de Kasparov ; conjecture de Baum–Connes ; algèbres de Banach ; groupes hyperboliques

Keywords: Kasparov theory; Baum–Connes conjecture; Banach algebras; hyperbolic groups

AMS 2000 *Mathematics subject classification*: Primary 19K35; 20F67; 46L80

Introduction

Dans la première partie, nous posons les fondements de la *KK*-théorie pour les algèbres de Banach équivariante par l’action d’un groupoïde, en utilisant une propriété de décomposition en *KK*-théorie (pour les C^* -algèbres) équivariante par l’action d’un groupoïde, établie en appendice par Hervé Oyono-Oyono. Grâce à la stabilité par calcul fonctionnel holomorphe de certaines sous-algèbres de C^* -algèbres réduites de groupoïdes, établie dans le §3, nous montrons, dans le §4, la conjecture de Baum–Connes à coefficients commutatifs pour les groupes hyperboliques et pour les groupoïdes de Poincaré des feuilletages à base compacte qui peuvent être munis d’une métrique riemannienne longitudinale à courbure sectionnelle strictement négative.

1. *K*-théorie bivariante pour les algèbres de Banach et groupoïdes

Dans [Gal94, Gal97, Gal99] Le Gall a construit une théorie de Kasparov équivariante par rapport à des actions de groupoïdes et cette théorie a été utilisée dans [Tu99]. Nous

nous proposons d'étendre cette théorie à la catégorie des algèbres de Banach, de même que nous l'avons fait dans [Laf02] pour la théorie de Kasparov équivariante par rapport aux actions de groupes. Cependant nous ne savons pas construire le produit de Kasparov dans ce cadre.

Nous donnons une application à la conjecture de Baum–Connes pour les groupoïdes.

1.1. Champs continus

Pour les notions d'algèbres de Banach, de paires et de bimodules de Banach on se réfère à [Laf02].

1.1.1. Champs continus généraux

Pour simplifier nous dirons toujours champ au lieu de champ continu. Les premières définitions sont classiques et se trouvent dans [Dix64], à ceci près que nous considérons des champs dont les sections continues ont une norme semi-continue supérieurement et non pas continue. Cependant les démonstrations de Dixmier auxquelles nous renvoyons restent valables.

Definition 1.1.1. Soit T un espace topologique. On appelle *champ d'espaces de Banach* sur T un couple $E = ((E_t)_{t \in T}, \Gamma)$, où pour tout $t \in T$, E_t est un espace de Banach, dont la norme est notée $\|\cdot\|_{E_t}$ et $\Gamma \subset \prod_{t \in T} E_t$, de sorte que les conditions suivantes soient satisfaites :

- (C1) Γ est un sous-espace vectoriel complexe de $\prod_{t \in T} E_t$;
- (C2) pour tout $t \in T$, l'application $ev_t : x \rightarrow x(t)$ de Γ dans E_t est d'image dense ;
- (C3) pour tout $x \in \Gamma$, l'application $t \rightarrow \|x(t)\|_{E_t}$ de T dans \mathbb{R}_+ est semi-continue supérieurement ;
- (C4) si $x \in \prod_{t \in T} E_t$, et si on suppose que pour tout $s \in T$ et pour tout $\epsilon > 0$ il existe un élément y de Γ et un voisinage \mathcal{V} de s dans T de sorte que pour tout $t \in \mathcal{V}$, $\|y(t) - x(t)\|_{E_t} \leq \epsilon$, alors x appartient à Γ .

On appelle section de E un élément x de $\prod_{t \in T} E_t$. On dit qu'une section x est continue en $s \in T$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un élément y de Γ et un voisinage \mathcal{V} de s , tels que pour tout $t \in \mathcal{V}$, on ait $\|y(t) - x(t)\|_{E_t} \leq \epsilon$. On dit qu'une section est continue si elle est continue en tout point de T , si bien que la condition (C4) exprime que Γ est l'ensemble des sections continues de E sur T . Une section $x \in \prod_{t \in T} E_t$ est dite bornée si $\sup_{t \in T} \|x(t)\|_{E_t} < +\infty$.

Le lemme suivant est immédiat.

Lemme 1.1.2. *L'espace vectoriel des sections continues bornées d'un champ E d'espaces de Banach sur T , muni de la norme du sup, est un espace de Banach.*

Exemple. Soit T un espace topologique et E un espace de Banach. Posons $E_t = E$ pour tout $t \in T$ et prenons pour Γ l'ensemble des applications continues de T dans E . On obtient ainsi un champ, appelé *champ trivial* sur T de fibre E , et noté E_T .

Exemple. Soient E et F des espaces de Banach et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire continue de norme inférieure ou égale à 1. On appelle *cône* de f le champ $G = ((G_t)_{t \in T}, \Gamma)$ d'espaces de Banach sur $[0, 1]$ tel que $G_0 = E$, $G_t = F$ si $t \in]0, 1]$ et $\Gamma = E \oplus C_0(]0, 1], F)$ en précisant qu'un élément $e \in E$ correspond à la section suivante de $G : x(0) = e$, $x(t) = f(e)$ si $t \in]0, 1]$ et qu'un élément $y \in C_0(]0, 1], F)$ correspond à la section suivante de $G : x(0) = 0$, $x(t) = y(t)$ si $t \in]0, 1]$.

La proposition suivante, pour laquelle nous renvoyons à [Dix64, 10.1.9, p. 188], est très simple.

Proposition 1.1.3. Soit $E = ((E_t)_{t \in T}, \Gamma)$ un champ d'espaces de Banach sur T . Soient $y \in \Gamma$ et $g : T \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors gy (défini par $gy(t) = g(t)y(t)$) appartient à Γ .

La proposition suivante est aussi démontrée par Dixmier [Dix64, 10.2.3, p. 192].

Proposition 1.1.4. Soit T un espace topologique, $(E_t)_{t \in T}$ une famille d'espaces vectoriels sur \mathbb{C} munis de normes $\|\cdot\|_{E_t}$ qui en font des espaces de Banach, et Λ un sous-espace vectoriel de $\prod_{t \in T} E_t$ vérifiant les conditions (C1)–(C3). Alors il existe un sous-ensemble Γ de $\prod_{t \in T} E_t$ et un seul contenant Λ et satisfaisant aux conditions (C1)–(C4). Cet ensemble est

$$\Gamma = \left\{ x \in \prod_{t \in T} E_t, \forall s \in T, \forall \epsilon > 0, \exists y \in \Lambda, \right. \\ \left. \exists \mathcal{V} \text{ voisinage de } s, \forall t \in \mathcal{V}, \|y(t) - x(t)\|_{E_t} \leq \epsilon \right\}.$$

Définition 1.1.5. Soit $E = ((E_t)_{t \in T}, \Gamma)$ un champ d'espaces de Banach sur T . Un sous-ensemble Λ de Γ est dit *total* si le sous-espace vectoriel $\bar{\Lambda}$ engendré par Λ vérifie la condition (C2).

Si Λ est total, $\bar{\Lambda}$ vérifie les conditions (C1)–(C3) et Γ est déterminé de manière unique par Λ , d'après la proposition 1.1.4.

Définissons les changements de base pour les champs. Soient S et T deux espaces topologiques et $\sigma : S \rightarrow T$ une application continue. Soit $E = ((E_t)_{t \in T}, \Gamma)$ un champ d'espaces de Banach sur T . Notons Λ le sous-espace suivant de $\prod_{s \in S} E_{\sigma(s)} : \Lambda = \{x \circ \sigma, x \in \Gamma\}$. Alors Λ vérifie les conditions (C1)–(C3), donc par la proposition 1.1.4 il existe un unique sous-ensemble Δ de $\prod_{s \in S} E_{\sigma(s)}$ contenant Λ et vérifiant (C1)–(C4). On note $\sigma^*(E) = ((E_{\sigma(s)})_{s \in S}, \Delta)$. Parfois on notera aussi σ^*E au lieu de $\sigma^*(E)$. Lorsque S est une partie fermée de T et σ l'inclusion de S dans T , en supposant de plus T paracompact, Dixmier (voir [Dix64, 10.1.12, p. 190]) montre que $\Delta = \{x \circ \sigma, x \in \Gamma\}$. Dans le cas où S est un point, cela signifie que pour tout champ continu $E = ((E_t)_{t \in T}, \Gamma)$ d'espaces de Banach sur T , avec T paracompact, pour tout $t \in T$, l'évaluation $ev_t : \Gamma \rightarrow E_t$ est surjective. Pour ce cas particulier la preuve de Dixmier se simplifie et on peut affaiblir l'hypothèse sur T . Nous dirons qu'un espace topologique T est uniformisable si pour tout $t \in T$ et tout voisinage \mathcal{V} de t , il existe une fonction continue de T dans $[0, 1]$, à support inclus dans \mathcal{V} , et valant 1 en t (voir [Bou74, 9.5, théorème 2]). Il est clair que

tout espace métrique est uniformisable. Plus généralement tout espace paracompact est uniformisable.

Proposition 1.1.6. *Soient T un espace topologique uniformisable, et $E = ((E_t)_{t \in T}, \Gamma)$ un champ d'espaces de Banach sur T . Alors pour tout $t \in T$, l'évaluation $ev_t : \Gamma \rightarrow E_t$ est non seulement d'image dense, mais surjective.*

En effet pour tout $y \in ev_t(\Gamma)$ il existe $x \in \Gamma$ tel que $x(t) = y$. Il existe un voisinage \mathcal{V} de t dans T tel que $\|x(s)\|_{E_s} \leq 2\|y\|_{E_t}$ pour tout $s \in \mathcal{V}$. Comme T est uniformisable il existe une application continue $\chi : T \rightarrow [0, 1]$ à support dans \mathcal{V} et telle que $\chi(t) = 1$. Alors χx vérifie $(\chi x)(t) = y$ et $\sup_{s \in T} \|(\chi x)(s)\|_{E_s} \leq 2\|y\|_{E_t}$. Comme $ev_t(\Gamma)$ est dense dans E_t , la proposition résulte alors du lemme 1.1.2.

Definition 1.1.7. Soient T un espace topologique et $E = ((E_t)_{t \in T}, \Gamma)$ et $F = ((F_t)_{t \in T}, \Delta)$ deux champs d'espaces de Banach sur T . On appelle *champ de morphismes* de E vers F sur T la donnée de $f = (f_t)_{t \in T}$, où, pour tout $t \in T$, f_t est une application linéaire continue de E_t vers F_t , de sorte que pour tout $x \in \Gamma$, $(f_t(x(t)))_{t \in T}$ appartienne à Δ .

Par exemple, si E et F sont des espaces de Banach et E_T et F_T les champs triviaux sur T de fibres E et F , cette condition exprime que $(t \mapsto f_t)$ est une application continue de T dans $\mathcal{L}(E, F)$ muni de la topologie forte.

Definition 1.1.8. Soient T un espace topologique et $E = ((E_t)_{t \in T}, \Gamma)$ et $F = ((F_t)_{t \in T}, \Delta)$ deux champs d'espaces de Banach sur T . Soit S une partie de T . On dit qu'un champ de morphismes $f = (f_t)_{t \in T}$ est borné sur S si $\sup_{t \in S} \|f_t\| < \infty$. On dit que f est borné s'il est borné sur T .

Proposition 1.1.9. *Soient T un espace métrisable et $E = ((E_t)_{t \in T}, \Gamma)$ et $F = ((F_t)_{t \in T}, \Delta)$ deux champs d'espaces de Banach sur T . Alors pour tout champ de morphismes $f = (f_t)_{t \in T}$ de E vers F et toute partie compacte K de T , f est borné sur K .*

Démonstration. Si f n'est pas borné sur K , il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $t_n \in K$, tendant vers $t_0 \in K$ de sorte que $\|f_{t_n}\|$ tende vers l'infini. On peut supposer les t_n et t_0 deux à deux distincts. Il existe une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $e_n \in E_{t_n}$, telle que $\|e_n\|_{E_{t_n}}$ tende vers 0 et que $\|f_{t_n}(e_n)\|_{F_{t_n}}$ tende vers l'infini, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, grâce à la proposition 1.1.6, il existe $x_n \in \Gamma$ tels que $x_n(t_n) = e_n$ dans E_{t_n} . Comme T est uniformisable il existe une suite $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions continues sur T à valeurs dans $[0, 1]$, telle que $\chi_n(t_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que si on pose $y_n = \chi_n x_n$ les éléments $y_n \in \Gamma$ soient à supports deux à deux disjoints, et vérifient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{t \in T} \|y_n(t)\|_{E_t} \leq 2\|e_n\|_{E_{t_n}}$. Comme $\|e_n\|_{E_{t_n}}$ tend vers 0, $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ appartient à Γ par le lemme 1.1.2, puisque $(\sum_{n=1}^p y_n)_{p \in \mathbb{N}^*}$ forme une suite de Cauchy dans l'espace de Banach des sections continues bornées de E sur T , muni de la norme du sup. On a $f_{t_n}(y(t_n)) = f_{t_n}(y_n(t_n)) = f_{t_n}(e_n)$ et $\|f_{t_n}(e_n)\|_{F_{t_n}}$ tend vers l'infini par hypothèse. Donc la fonction $t \mapsto \|f_t(y(t))\|_{F_t}$ n'est pas semi-continue supérieurement en t_0 , et $(f_t(y(t)))_{t \in T}$ n'appartient pas à Δ , ce qui est absurde. \square

Definition 1.1.10. Soit T un espace topologique. On appelle *champ d'algèbres de Banach* sur T un champ $B = ((B_t)_{t \in T}, \Theta)$ d'espaces de Banach, où chaque espace de Banach B_t est muni d'un produit qui en fait une algèbre de Banach, et où Θ est stable par produit : pour $a, b \in \Theta, (a(t)b(t))_{t \in T} \in \Theta$.

De plus on dit que B est un champ d'algèbres de Banach *non dégénérées* si pour tout $t \in T, B_t$ est une algèbre de Banach non dégénérée (c'est-à-dire que $B_t B_t$ est dense dans B_t , voir [Laf02, p. 11]).

Si T est un espace topologique, à toute algèbre de Banach B on peut associer le champ d'algèbres de Banach B_T qui est trivial de fibre B .

Definition 1.1.11. Soit T un espace topologique. On appelle *champ de C^* -algèbres* sur T un champ d'algèbres de Banach $B = ((B_t)_{t \in T}, \Theta)$ tel que, pour tout $t \in T, B_t$ soit muni d'une involution $*$ qui en fasse une C^* -algèbre, et que pour toute section continue b de B sur $T, (t \mapsto b(t)^*)$ soit une section continue de B sur T .

Proposition 1.1.12. Soit T un espace localement compact et σ -compact. Alors une $C(T)$ - C^* -algèbre au sens de [Kas88] est l'algèbre des sections continues tendant vers 0 à l'infini d'un unique champ de C^* -algèbres sur $T, qui est donc a fortiori un champ d'algèbres de Banach.$

Proposition 1.1.13. Si $B = ((B_t)_{t \in T}, \Theta)$ est un champ d'espaces de Banach sur $T, chaque B_t étant une algèbre de Banach, pour que B constitue un champ d'algèbres de Banach, il suffit qu'il existe un sous-ensemble total Λ de Θ tel que $\Lambda \Lambda \subset \Theta$.$

Definition 1.1.14. Soit $B = ((B_t)_{t \in T}, \Theta)$ un champ d'algèbres de Banach sur $T. On appelle *champ de B -modules de Banach à droite* un champ $E = ((E_t)_{t \in T}, \Gamma)$ d'espaces de Banach tel que pour tout $t \in T, E_t$ soit un B_t -module de Banach à droite, et que pour tout $x \in \Gamma, pour tout $b \in \Theta, (x(t)b(t))_{t \in T}$ appartienne à Γ .$$

De plus on dit que E est un champ de B -modules de Banach à droite *non dégénérés* si pour tout $t \in T E_t$ est un B_t -module de Banach non dégénéré (c'est-à-dire que $E_t B_t$ est dense dans E_t , voir [Laf02, p. 11]).

Les champs de B -modules de Banach à gauche sont définis de la même manière.

Proposition 1.1.15. Si $B = ((B_t)_{t \in T}, \Theta)$ est un champ d'algèbres de Banach et $E = ((E_t)_{t \in T}, \Gamma)$ un champ d'espaces de Banach sur $T, chaque E_t étant un B_t -module de Banach à droite, pour faire de E un champ de B -modules de Banach à droite il suffit d'exhiber un sous-ensemble total Λ_1 de Θ et un sous-ensemble total Λ_2 de Γ tels que $\Lambda_2 \Lambda_1 \subset \Gamma$.$

Les propositions 1.1.13 et 1.1.15 permettent de définir les changements de base pour les champs d'algèbres de Banach et les champs de modules de Banach.

Definition 1.1.16. Soient $B = ((B_t)_{t \in T}, \Theta)$ et $B' = ((B'_t)_{t \in T}, \Theta')$ deux champs d'algèbres de Banach sur $T. On appelle *champ de morphismes d'algèbres de Banach* un champ $\theta = (\theta_t)_{t \in T}$ de morphismes d'espaces de Banach de B vers B' tel que pour tout $t \in T, \theta_t$ soit un morphisme d'algèbres de Banach de B_t vers B'_t (en particulier la norme de θ_t doit être inférieure ou égale à 1 pour tout $t \in T$).$

Definition 1.1.17. Soient $B = ((B_t)_{t \in T}, \Theta)$ un champ d'algèbres de Banach et $E = ((E_t)_{t \in T}, \Gamma)$ et $F = ((F_t)_{t \in T}, \Delta)$ deux champs de B -modules de Banach (à gauche ou à droite). On appelle *champ de morphismes de B -modules de Banach* de E vers F un champ $f = (f_t)_{t \in T}$ de morphismes d'espaces de Banach tel que pour tout $t \in T$, f_t soit un morphisme de B_t -modules.

Nous allons généraliser un peu cette notion.

Definition 1.1.18. Soient B et B' deux champs d'algèbres de Banach sur T , θ un champ de morphismes d'algèbres de Banach de B vers B' et E et E' des champs de B - et B' -modules de Banach (à droite par exemple). On appelle *champ de morphismes de modules de Banach* de E vers E' au-dessus de θ un champ $f = (f_t)_{t \in T}$ de morphismes d'espaces de Banach tel que pour tout $t \in T$, pour tout $b \in B_t$, pour tout $x \in E_t$, on ait $f_t(xb) = f_t(x)\theta_t(b)$.

Proposition 1.1.19. Soient $B = ((B_t)_{t \in T}, \Theta)$ un champ d'algèbres de Banach, $E = ((E_t)_{t \in T}, \Gamma)$ un champ de B -modules de Banach à droite et $F = ((F_t)_{t \in T}, \Delta)$ un champ de B -modules de Banach à gauche. Posons pour tout $t \in T$, $G_t = E_t \otimes_{B_t}^{\pi} F_t$, et appelons θ_t l'application \mathbb{C} -bilinéaire de $\Gamma \times \Delta$ dans G_t définie par $\theta_t(x, y) = x(t) \otimes y(t)$. Alors $\theta = \prod_{t \in T} \theta_t$ est une application \mathbb{C} -bilinéaire de $\Gamma \times \Delta$ dans $\prod_{t \in T} G_t$ et notons Λ l'image de $\Gamma \otimes^{\text{alg}} \Delta$ dans $\prod_{t \in T} G_t$ par θ . Alors Λ vérifie les conditions (C1)–(C3), et nous notons Ξ l'unique sous-espace de $\prod_{t \in T} G_t$ contenant Λ et vérifiant les conditions (C1)–(C4), en vertu de la proposition 1.1.4. Alors $((G_t)_{t \in T}, \Xi)$ est un champ d'espaces de Banach, noté $E \otimes_B F$ et appelé produit tensoriel de E et de F .

C'est parce qu'on a choisi le produit π que Λ vérifie la condition (C3). Avec le produit minimal ϵ cela ne serait plus vrai.

Démonstration. Le seul point à vérifier est que Λ satisfait à la condition (C3). Soit $t \in T$. Mettons sur Λ la norme suivante : étant donné $z \in \Lambda$, $\|z\|_{\text{lim}, t} = \limsup_{s \rightarrow t} \|z(s)\|_{G_s}$. On a alors, pour $x \in \Gamma$, $y \in \Delta$, et $b \in \Theta$,

$$\|\theta(x, y)\|_{\text{lim}, t} \leq \|x(t)\|_{E_t} \|y(t)\|_{F_t} \quad \text{et} \quad \|\theta(x, by) - \theta(xb, y)\|_{\text{lim}, t} = 0.$$

Par la propriété universelle de G_t on a donc, pour tout $z \in \Lambda$, $\|\theta(z)\|_{\text{lim}, t} \leq \|\theta_t(z(t))\|_{G_t}$. □

1.1.2. Champs de paires

On renvoie à [Laf02] pour la notion de B -paire.

Definition 1.1.20. Soit T un espace topologique et $B = ((B_t)_{t \in T}, \Theta)$ un champ d'algèbres de Banach sur T . On appelle *champ de B -paires* la donnée

- d'un champ de B -modules de Banach à droite non dégénérés $E^> = ((E_t^>)_{t \in T}, \Gamma^>)$,
- d'un champ de B -modules de Banach à gauche non dégénérés $E^< = ((E_t^<)_{t \in T}, \Gamma^<)$,

- et pour tout $t \in T$, d'un crochet

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_t : E_t^< \times E_t^> \rightarrow B_t,$$

qui est \mathbb{C} -bilinéaire, vérifiant pour tout $x \in E_t^>$, pour tout $\xi \in E_t^<$, pour tout $b \in B_t$,

$$\langle b\xi, x \rangle_t = b\langle \xi, x \rangle_t, \quad \langle \xi, xb \rangle_t = \langle \xi, x \rangle_t b, \quad \|\langle \xi, x \rangle_t\|_{B_t} \leq \|\xi\|_{E_t^<} \|x\|_{E_t^>}$$

et de sorte que pour tout $x \in \Gamma^>$, pour tout $\xi \in \Gamma^<$, $(\langle \xi(t), x(t) \rangle_t)_{t \in T}$ appartienne à Θ .

On pose $\langle \xi, x \rangle = ((\langle \xi(t), x(t) \rangle_t)_{t \in T})$ lorsque $x \in \Gamma^>$ et $\xi \in \Gamma^<$.

Ainsi, si E est un champ de B -paires sur T , pour tout $t \in T$, $E_t = (E_t^<, E_t^>)$ est une B_t -paire et plus généralement, si S est un autre espace topologique, pour toute application continue $\sigma : S \rightarrow T$, $\sigma^*(E) = (\sigma^*(E^<), \sigma^*(E^>))$ est un champ de B -paires sur S .

Soient maintenant $E = (E^<, E^>)$ et $F = (F^<, F^>)$ des champs de B -paires sur T , avec $E^< = ((E_t^<)_{t \in T}, \Gamma^<)$, \dots , $F^> = ((F_t^>)_{t \in T}, \Delta^>)$. On appelle champ de morphismes de B -paires de E vers F un couple $f = (f^<, f^>)$ où

- $f^> = (f_t^>)_{t \in T}$ est un champ de morphismes de B -modules de Banach à droite de $E^>$ vers $F^>$, et
- $f^< = (f_t^<)_{t \in T}$ est un champ de morphismes de B -modules de Banach à gauche de $F^<$ vers $E^<$,

de sorte que, pour tout $t \in T$, $f_t = (f_t^<, f_t^>)$ soit un morphisme de B_t -paires de E_t vers F_t . On dit que f est borné si $f^>$ et $f^<$ sont bornés, et dans ce cas on pose $\|f\| = \sup_{t \in T} \max(\|f_t^<\|, \|f_t^>\|)$.

Un champ de morphismes f est dit compact en $s \in T$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage \mathcal{V} de s dans T , un entier $n \in \mathbb{N}^*$, et $\xi_1, \dots, \xi_n \in \Gamma^<$, $y_1, \dots, y_n \in \Delta^>$, tels que

$$\sup_{t \in \mathcal{V}} \left\| f_t - \sum_{i=1}^n |y_i(t)\rangle \langle \xi_i(t)| \right\|_{\mathcal{L}(E_t, F_t)} \leq \epsilon.$$

Il est dit partout compact s'il est compact en tout point de T .

En particulier, si $y \in \Delta^>$ et $\xi \in \Gamma^<$, $(|y(t)\rangle \langle \xi(t)|)_{t \in T}$ est un champ de morphismes partout compact de E vers F .

Definition 1.1.21. Soient T un espace topologique et B un champ de C^* -algèbres sur T . On appelle champ de B -modules hilbertiens un champ de B -paires (\bar{E}, E) muni d'un champ de morphismes d'espaces de Banach $*$ de E vers \bar{E} tel que pour tout $t \in T$, (\bar{E}_t, E_t) soit un B_t -module hilbertien.

Bien sûr tout champ de modules hilbertiens sur un champ de C^* -algèbres est *a fortiori* un champ de paires sur un champ d'algèbres de Banach.

Proposition 1.1.22. *Soit T un espace localement compact et σ -compact, B une $C(T)$ - C^* -algèbre au sens de [Kas88] et E un B -module hilbertien. Alors E induit un champ de modules hilbertiens sur le champ de C^* -algèbres sur T associé à B par la proposition 1.1.12.*

En fait on a une équivalence de catégories entre les champs de modules hilbertiens sur le champ de C^* -algèbres associé à B et les B -modules hilbertiens.

Etudions maintenant la fonctorialité pour les champs de paires.

Proposition 1.1.23. *Soit T un espace topologique, A et B des champs d'algèbres de Banach sur T et θ un champ de morphismes d'algèbres de Banach de A vers B . Soit E une A -paire. Nous savons que $\tilde{B} \otimes_{\tilde{A}} E^<$ est un champ de B -modules à gauche et que $E^> \otimes_{\tilde{A}} \tilde{B}$ est un champ de B -modules à droite et que pour tout $t \in T$, $(\tilde{B}_t \otimes_{\tilde{A}_t} E_t^<, E_t^> \otimes_{\tilde{A}_t} \tilde{B}_t)$ est une B_t -paire. Nous affirmons que $\theta_*(E) = (\tilde{B} \otimes_{\tilde{A}} E^<, E^> \otimes_{\tilde{A}} \tilde{B})$ est un champ de B -paires. Soit F un autre champ de A -paires et f un champ de morphismes de A -paires de E vers F . Alors $\theta_*(f) = (1 \otimes f^<, f^> \otimes 1)$ est un champ de morphismes de B -paires et si f est partout compact $\theta_*(f)$ aussi.*

1.1.3. Champs de bimodules

Definition 1.1.24. Soient T un espace topologique, et A et B deux champs d'algèbres de Banach sur T . On appelle champ de (A, B) -bimodules sur T un champ de B -paires $E = (E^<, E^>)$, avec $E^<$ muni d'une structure de champ de A -modules de Banach à droite et $E^>$ d'une structure de champ de A -modules de Banach à gauche, de sorte que pour tout $t \in T$, ceci fasse de $E_t = (E_t^<, E_t^>)$ un (A_t, B_t) -bimodule.

1.2. Action des groupoïdes

1.2.1. Rappels sur les groupoïdes

On renvoie à [Ren80, Gal94, Gal99] et au § 6 de [Tu99] pour les notions de groupoïde topologique, localement compact, ou propre et de morphisme strict ou généralisé de groupoïdes. D'autre part nous introduisons la notion de longueur sur un groupoïde.

Definition 1.2.1. Soit \mathcal{G} un groupoïde topologique. On appelle longueur sur \mathcal{G} une application continue $\ell : \mathcal{G} \rightarrow [1, +\infty[$ telle que $\ell(g_1 g_2) \leq \ell(g_1) + \ell(g_2)$ pour $(g_1, g_2) \in \mathcal{G}^{(2)}$.

1.2.2. Algèbres de Banach équivariantes

La définition qui suit copie la définition 3.5 de [Gal99].

Definition 1.2.2. Soit \mathcal{G} un groupoïde topologique. On appelle \mathcal{G} -algèbre de Banach $A = (A, \alpha)$ la donnée d'un champ $A = (A_x)_{x \in \mathcal{G}^{(0)}}$ d'algèbres de Banach sur $\mathcal{G}^{(0)}$ et d'un champ d'isomorphismes d'algèbres de Banach (préservant la norme) $\alpha = (\alpha_g)_{g \in \mathcal{G}} : s^* A \rightarrow r^* A$ tel que pour tous $x \in \mathcal{G}^{(0)}$, $g \in \mathcal{G}$, $(g_1, g_2) \in \mathcal{G}^{(2)}$ on ait $\alpha_x = \text{Id}_{A_x}$, $\alpha_{g^{-1}} = \alpha_g^{-1}$ et $\alpha_{g_1 g_2} = \alpha_{g_1} \circ \alpha_{g_2}$.

Nous dirons qu'une \mathcal{G} -algèbre de Banach est non dégénérée si le champ correspondant est non dégénéré.

Si \mathcal{G} et \mathcal{H} sont deux groupoïdes topologiques et $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme strict et A une \mathcal{G} -algèbre de Banach on définit une \mathcal{H} -algèbre de Banach f^*A en procédant comme dans [Gal99, 3.2, exemple (d)].

Le langage des champs continus permet d'étendre aisément la functorialité aux morphismes généralisés comme dans [Gal99, 3.3].

Definition 1.2.3. Soient \mathcal{G} un groupoïde topologique et A et B deux \mathcal{G} -algèbres de Banach. On appelle morphisme de \mathcal{G} -algèbres de Banach de A vers B un champ de morphismes d'algèbres de Banach sur $\mathcal{G}^{(0)}$ qui commute à l'action de \mathcal{G} .

1.2.3. *Paires et bimodules de Banach équivariants*

Definition 1.2.4. Soient \mathcal{G} un groupoïde topologique, ℓ une longueur sur \mathcal{G} et (A, α) une \mathcal{G} -algèbre de Banach. On appelle (\mathcal{G}, ℓ) - A -paire $E = (E, V)$ la donnée d'un champ de A -paires E sur $\mathcal{G}^{(0)}$ et d'un champ de morphismes de paires $V : s^*E \rightarrow r^*E$ au-dessus de $\alpha : s^*A \rightarrow r^*A$ sur $\mathcal{G}^{(0)}$, tels que pour tous $x \in \mathcal{G}^{(0)}$, $g \in \mathcal{G}$, $(g_1, g_2) \in \mathcal{G}^{(2)}$ on ait $V_x = \text{Id}_{E_x}$, $V_{g^{-1}} = V_g^{-1}$ et $V_{g_1g_2} = V_{g_1} \circ V_{g_2}$ et enfin, pour tout $g \in \mathcal{G}$, $\|V_g\|_{\mathcal{L}(E_{s(g)}, E_{r(g)})} \leq e^{\ell(g)}$.

Definition 1.2.5. Soient \mathcal{G} un groupoïde topologique, ℓ une longueur sur \mathcal{G} et (A, α) et (B, β) deux \mathcal{G} -algèbres de Banach. On appelle (\mathcal{G}, ℓ) - (A, B) -bimodule de Banach un champ de B -paires E sur $\mathcal{G}^{(0)}$ qui est à la fois un champ de (A, B) -bimodules de Banach et une (\mathcal{G}, ℓ) - B -paire, les structures de A -module étant compatibles avec l'action de \mathcal{G} .

Dans ces définitions on omet ℓ lorsque $\ell = 0$.

Ces définitions sont fonctorielles vis-à-vis des morphismes stricts et même vis-à-vis des morphismes généralisés de groupoïdes.

1.2.4. *Lien avec les C^* -algèbres*

Soit \mathcal{G} un groupoïde localement compact. Toute \mathcal{G} - C^* -algèbre A (au sens de [Gal99]) est une \mathcal{G} -algèbre de Banach, encore notée A par abus. Soient A et B deux \mathcal{G} - C^* -algèbres. Tout \mathcal{G} - B -module hilbertien (au sens de [Gal99]) fournit une \mathcal{G} - B -paire et tout \mathcal{G} - (A, B) -bimodule fournit un \mathcal{G} - (A, B) -bimodule de Banach.

1.2.5. *Les groupes de Kasparov équivariants*

Nous recopions la définition 5.2 de [Gal99].

Définition–proposition 1.2.6. Soient \mathcal{G} un groupoïde topologique, ℓ une longueur sur \mathcal{G} et (A, α) et (B, β) deux \mathcal{G} -algèbres de Banach. On note $E_{\mathcal{G}, \ell}^{\text{ban}}(A, B)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de couples (E, T) avec $E = (E, V)$ un (\mathcal{G}, ℓ) - (A, B) -bimodule de Banach $\mathbb{Z}/2$ -gradué et T un champ borné impair de morphismes de B -paires de E dans lui-même tels que pour toute section continue a de A sur $\mathcal{G}^{(0)}$, $[a, T]$ et $a(\text{Id}_E - T^2)$ soient partout compacts sur $\mathcal{G}^{(0)}$ et que, pour toute section continue de r^*A sur \mathcal{G} , $a(V(s^*T)V^{-1} - r^*T)$ soit partout compact sur \mathcal{G} .

Si C est une autre \mathcal{G} -algèbre de Banach et $\theta : B \rightarrow C$ un morphisme de \mathcal{G} -algèbres de Banach, et $(E, T) \in E_{\mathcal{G}, \ell}^{\text{ban}}(A, B)$, on a $(\theta_*(E), \theta_*(T)) \in E_{\mathcal{G}, \ell}^{\text{ban}}(A, C)$. On définit ainsi une application $\theta_* : E_{\mathcal{G}, \ell}^{\text{ban}}(A, B) \rightarrow E_{\mathcal{G}, \ell}^{\text{ban}}(A, C)$.

Pour $t \in [0, 1]$ notons $\sigma_t : B[0, 1] \rightarrow B$ l'évaluation en t . On dit que deux éléments x et y de $E_{\mathcal{G},\ell}^{\text{ban}}(A, B)$ sont homotopes si ce sont les images par $\sigma_{0,*}$ et $\sigma_{1,*}$ d'un même élément de $E_{\mathcal{G},\ell}^{\text{ban}}(A, B[0, 1])$.

L'homotopie est une relation d'équivalence sur $E_{\mathcal{G},\ell}^{\text{ban}}(A, B)$ et on note $KK_{\mathcal{G},\ell}^{\text{ban}}(A, B)$ le quotient de $E_{\mathcal{G},\ell}^{\text{ban}}(A, B)$ par cette relation.

Si (E_1, T_1) et (E_2, T_2) sont deux éléments de $E_{\mathcal{G},\ell}^{\text{ban}}(A, B)$ leur somme directe $(E_1, T_1) \oplus (E_2, T_2) = (E_1 \oplus E_2, T_1 \oplus T_2)$ appartient à $E_{\mathcal{G},\ell}^{\text{ban}}(A, B)$. Cette opération est compatible à l'homotopie et définit sur $KK_{\mathcal{G},\ell}^{\text{ban}}(A, B)$ une structure de groupe abélien. Enfin l'application $\theta_* : KK_{\mathcal{G},\ell}^{\text{ban}}(A, B) \rightarrow KK_{\mathcal{G},\ell}^{\text{ban}}(A, C)$ définie par passage au quotient est un morphisme de groupes abéliens.

Lorsque $\ell = 0$ on omet ℓ et lorsque \mathcal{G} est un singleton on omet \mathcal{G} .

Si ℓ' est une autre longueur sur \mathcal{G} avec, pour tout $g \in \mathcal{G}$, $\ell(g) \leq \ell'(g)$, on a un homomorphisme évident $KK_{\mathcal{G},\ell}^{\text{ban}}(A, B) \rightarrow KK_{\mathcal{G},\ell'}^{\text{ban}}(A, B)$.

Soient D une \mathcal{G} -algèbre de Banach non dégénérée, $\alpha \in KK_{\mathcal{G},\ell}^{\text{ban}}(A, B)$, et $(E, T) \in E_{\mathcal{G},\ell}^{\text{ban}}(A, B)$ représentant α . On définit $\sigma_D^{\text{ban}}(\alpha)$ comme la classe de $(E \otimes^\pi D, T \otimes 1)$ dans $KK_{\mathcal{G},\ell}^{\text{ban}}(A \otimes^\pi D, B \otimes^\pi D)$.

On voit que $KK_{\mathcal{G},\ell}^{\text{ban}}(A, B)$ est fonctoriel en A et B vis-à-vis des morphismes de \mathcal{G} -algèbres de Banach. Si de plus \mathcal{H} est un autre groupoïde topologique et $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme strict on possède $f^* : KK_{\mathcal{G},\ell}^{\text{ban}}(A, B) \rightarrow KK_{\mathcal{H},f^*\ell}^{\text{ban}}(f^*A, f^*B)$.

Si A et B sont deux \mathcal{G} -algèbres de Banach, B étant non dégénérée, et $\theta : A \rightarrow B$ un morphisme de \mathcal{G} -algèbres de Banach, on note $[\theta]$ l'élément de $KK_{\mathcal{G}}^{\text{ban}}(A, B)$ défini par $(E, 0)$, où E est la B -paire standard (c'est-à-dire $E^< = B, E^> = B$), munie de sa structure évidente de $\mathcal{G}^-(A, B)$ -bimodule de Banach. On note $1 = [\text{Id}_B] \in KK_{\mathcal{G}}^{\text{ban}}(B, B)$.

1.3. Descente

Dans toute cette section nous considérons un groupoïde localement compact \mathcal{G} muni d'un système de Haar λ (voir [Ren80, définition 2.2, p. 16] et [Gal94, 7.1.1]). Nous dirons qu'une algèbre de Banach $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ est une complétion inconditionnelle de $C_c(\mathcal{G})$ si elle contient $C_c(\mathcal{G})$ comme sous-algèbre dense et si quels que soient $f_1, f_2 \in C_c(\mathcal{G})$ tels que $|f_1(g)| \leq |f_2(g)|$ pour tout $g \in \mathcal{G}$ on a $\|f_1\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G})} \leq \|f_2\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G})}$.

Fixons une complétion inconditionnelle $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ de $C_c(\mathcal{G})$. Pour donner un sens à la définition de la norme dans la proposition ci-dessous, on a besoin de la convention suivante. Si $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est semi-continue supérieurement à support compact, on pose $\|f\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G})} = \inf \|h\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G})}$, où l'inf est pris sur les fonctions $h \in C_c(\mathcal{G})$ telles que $h(g) \geq f(g)$ pour tout $g \in \mathcal{G}$.

Soient ℓ une longueur sur \mathcal{G} et B une \mathcal{G} -algèbre de Banach. On note $C_c(\mathcal{G}, r^*B)$ l'espace des sections continues à support compact de r^*B sur \mathcal{G} et on munit cet espace de la structure d'algèbre suivante : pour $f_1, f_2 \in C_c(\mathcal{G}, r^*B)$, $(f_1 * f_2)(g) = \int_{G^{r(g)}} f_1(g_1) \alpha_{g_1}(f_2(g_1^{-1}g)) d\lambda^{r(g)}(g_1)$. On montre que $f_1 * f_2$ appartient à $C_c(\mathcal{G}, r^*B)$ en s'inspirant de la preuve de la proposition 7.1.1 de [Gal94].

Proposition 1.3.1. *Le complété de $C_c(\mathcal{G}, r^*B)$ pour la norme*

$$\|f\| = \|g \mapsto e^{\ell(g)}\|f(g)\|_{B_{r(g)}}\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G})}$$

est une algèbre de Banach, notée $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}, B)$.

La preuve est immédiate. Lorsque $\ell = 0$ nous omettons ℓ et lorsque B est le champ trivial $C_0(G^{(0)})$, nous notons $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ au lieu de $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}, B)$. Pour la KK-théorie le fait suivant est important : $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ est non dégénérée et plus généralement pour toute \mathcal{G} -algèbre de Banach B non dégénérée, $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}, B)$ est non dégénérée. Remarquons que $\mathcal{A}'(\mathcal{G}) = \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})$ est une autre bonne complétion de $C_c(\mathcal{G})$. C'est pourquoi nous oublions momentanément ℓ sans perte de généralité.

Soit E un champ de \mathcal{G} - B -paires sur $\mathcal{G}^{(0)}$. On note $C_c(\mathcal{G}, r^*E^>)$ et $C_c(\mathcal{G}, s^*E^<)$ les espaces de sections continues à support compact de $r^*E^>$ et $s^*E^<$ sur \mathcal{G} .

Definition 1.3.2. Notons $\mathcal{A}(\mathcal{G}, E)^>$ la complétion de $C_c(\mathcal{G}, r^*E^>)$ pour la norme

$$\|x\| = \|g \mapsto \|x(g)\|_{E_{r(g)}^>}\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G})},$$

et $\mathcal{A}(\mathcal{G}, E)^<$ la complétion de $C_c(\mathcal{G}, s^*E^<)$ pour la norme

$$\|\xi\| = \|g \mapsto \|\xi(g)\|_{E_{s(g)}^<}\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G})}.$$

Pour $x \in C_c(\mathcal{G}, r^*E^>)$, $\xi \in C_c(\mathcal{G}, s^*E^<)$, et $f \in C_c(\mathcal{G}, r^*B)$, et pour tout $g \in \mathcal{G}$, posons

$$\begin{aligned} (x \cdot f)(g) &= \int_{\mathcal{G}^{r(g)}} x(g_1)\alpha_{g_1}(f(g_1^{-1}g)) \, d\lambda^{r(g)}(g_1), \\ (f \cdot \xi)(g) &= \int_{\mathcal{G}^{r(g)}} \alpha_{g^{-1}}(f(g_1))\xi(g_1^{-1}g) \, d\lambda^{r(g)}(g_1), \\ \langle \xi, x \rangle(g) &= \int_{\mathcal{G}^{r(g)}} \alpha_{g_1}(\langle \xi(g_1), x(g_1^{-1}g) \rangle) \, d\lambda^{r(g)}(g_1). \end{aligned}$$

Ceci définit une $\mathcal{A}(\mathcal{G}, B)$ -paire $\mathcal{A}(\mathcal{G}, E) = (\mathcal{A}(\mathcal{G}, E)^<, \mathcal{A}(\mathcal{G}, E)^>)$.

Si F est un second champ de B -paires, et si $T = (T_x)_{x \in \mathcal{G}^{(0)}}$ est un champ de morphismes de B -paires de E vers F , nous définissons un morphisme $\mathcal{A}(\mathcal{G}, T)$ de $\mathcal{A}(\mathcal{G}, B)$ -paires de $\mathcal{A}(\mathcal{G}, E)$ vers $\mathcal{A}(\mathcal{G}, F)$ en posant

$$\text{pour tout } x \in C_c(\mathcal{G}, r^*E^>), \quad \mathcal{A}(\mathcal{G}, T)^>(x)(g) = T_{r(g)}^>(x(g))$$

et

$$\text{pour tout } \xi \in C_c(\mathcal{G}, s^*E^<), \quad \mathcal{A}(\mathcal{G}, T)^<(\xi)(g) = T_{s(g)}^<(\xi(g)).$$

On a $\|\mathcal{A}(\mathcal{G}, T)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{A}(\mathcal{G}, E), \mathcal{A}(\mathcal{G}, F))} \leq \sup_{x \in \mathcal{G}^{(0)}} \|T_x\|_{\mathcal{L}(E_x, F_x)}$.

Supposons de plus que A est une \mathcal{G} -algèbre de Banach, ℓ une longueur sur \mathcal{G} et que la B -paire E est munie d'une structure de (\mathcal{G}, ℓ) - (A, B) -bimodule.

Proposition 1.3.3. *Sous ces hypothèses $\mathcal{A}(\mathcal{G}, E)$ est un $(\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}, A), \mathcal{A}(\mathcal{G}, B))$ -bimodule.*

La formule est la suivante : pour $h \in C_c(\mathcal{G}, r^*A)$, $x \in C_c(\mathcal{G}, r^*E^>)$, et $\xi \in C_c(\mathcal{G}, s^*E^<)$, on pose, pour tout $g \in \mathcal{G}$,

$$\begin{aligned} (h \cdot x)(g) &= \int_{\mathcal{G}^{r(g)}} h(g_1)V_{g_1}^>(x(g_1^{-1}g)) \, d\lambda^{r(g)}(g_1), \\ (\xi \cdot h)(g) &= \int_{\mathcal{G}^{r(g)}} V_{g_1^{-1}g}^<(\xi(g_1)h(g_1^{-1}g)) \, d\lambda^{r(g)}(g_1). \end{aligned}$$

Vérifions par exemple la compatibilité des normes. Avec les notations ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} \|h \cdot x\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G}, E)^>} &= \left\| g \mapsto \left\| \int_{\mathcal{G}^{r(g)}} h(g_1)V_{g_1}^>(x(g_1^{-1}g)) \, d\lambda^{r(g)}(g_1) \right\|_{E_{r(g)}^>} \right\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G})} \\ &\leq \left\| g \mapsto \int_{\mathcal{G}^{r(g)}} \|h(g_1)\|_{A_{r(g)}} e^{\ell(g_1)} \|x(g_1^{-1}g)\|_{E_{s(g_1)}^>} \, d\lambda^{r(g)}(g_1) \right\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G})} \\ &\leq \|h\|_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}, A)} \|x\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G}, E)^>}. \end{aligned}$$

Proposition–définition 1.3.4. Soient $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ une complétion inconditionnelle de $C_c(\mathcal{G})$, ℓ une longueur sur \mathcal{G} et A et B des \mathcal{G} -algèbres de Banach. Pour tout $(E, T) \in E_{\mathcal{G}, \ell}^{\text{ban}}(A, B)$, le couple

$$j_{\mathcal{A}}(E, T) = (\mathcal{A}(\mathcal{G}, E), \mathcal{A}(\mathcal{G}, T))$$

appartient à $E^{\text{ban}}(\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}, A), \mathcal{A}(\mathcal{G}, B))$. L'application $j_{\mathcal{A}}$ ainsi définie est compatible aux images directes et à l'homotopie et détermine un homomorphisme de descente

$$j_{\mathcal{A}} : KK_{\mathcal{G}, \ell}^{\text{ban}}(A, B) \rightarrow KK^{\text{ban}}(\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}, A), \mathcal{A}(\mathcal{G}, B)).$$

Démonstration. Soit $a \in C_c(\mathcal{G}, r^*A) \subset \mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}, A)$. Nous devons vérifier que $[a, \mathcal{A}(\mathcal{G}, T)]$ est un morphisme compact de $\mathcal{A}(\mathcal{G}, B)$ -paires. Pour $x \in C_c(\mathcal{G}, r^*E^>)$ nous calculons

$$\begin{aligned} [a, \mathcal{A}(\mathcal{G}, T)]^>(x)(g) &= (a\mathcal{A}(\mathcal{G}, T)^>(x))(g) - (\mathcal{A}(\mathcal{G}, T)^>(ax))(g) \\ &= \int_{\mathcal{G}^{r(g)}} a(g_1)V_{g_1}^>(T_{s(g_1)}^>(x(g_1^{-1}g))) \, d\lambda^{r(g)}(g_1) \\ &\quad - \int_{\mathcal{G}^{r(g)}} T_{r(g)}^>(a(g_1)V_{g_1}^>(x(g_1^{-1}g))) \, d\lambda^{r(g)}(g_1) \\ &= \int_{\mathcal{G}^{r(g)}} a(g_1)(Vs^*(T)V^{-1} - r^*T)_{g_1}^>(V_{g_1}^>(x(g_1^{-1}g))) \, d\lambda^{r(g)}(g_1) \\ &\quad + \int_{\mathcal{G}^{r(g)}} [a, r^*T^>]_{g_1}(V_{g_1}^>(x(g_1^{-1}g))) \, d\lambda^{r(g)}(g_1). \end{aligned}$$

Le calcul analogue pour $\xi \in C_c(\mathcal{G}, s^*E^<)$ est désagréable car $T^<$ n'agit pas du côté où il devrait. Le fait que $[a, \mathcal{A}(\mathcal{G}, T)]$ est compact résulte du lemme 1.3.5 ci-dessous.

Vérifions maintenant que $a(\text{Id} - \mathcal{A}(\mathcal{G}, T)^2)$ est compact. Pour $x \in C_c(\mathcal{G}, r^*E^>)$ nous calculons

$$\begin{aligned} (a(\text{Id} - \mathcal{A}(\mathcal{G}, T)^2)^>(x))(g) &= \int_{\mathcal{G}^{r(g)}} a(g_1) V_{g_1}^>((\text{Id} - T_{s(g_1)}^2)^>x(g_1^{-1}g)) d\lambda^{r(g)}(g_1) \\ &= \int_{\mathcal{G}^{r(g)}} a(g_1) (V(\text{Id} - r^*T^2)V^{-1})_{g_1}^> V_{g_1}^>(x(g_1^{-1}g)) d\lambda^{r(g)}(g_1). \end{aligned}$$

La compacité de $a(\text{Id} - \mathcal{A}(\mathcal{G}, T)^2)$ résulte du lemme 1.3.5 ci-dessous. \square

Lemme 1.3.5. Soient ℓ une longueur sur \mathcal{G} , $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ une complétion inconditionnelle de $C_c(\mathcal{G})$, B une \mathcal{G} -algèbre de Banach et E et F des (\mathcal{G}, ℓ) - B -paires. Soit $S = (S_g)_{g \in \mathcal{G}}$ un champ à support compact de morphismes de B -paires de r^*E vers r^*F . Définissons un morphisme \hat{S} de $\mathcal{A}(\mathcal{G}, B)$ -paires de $\mathcal{A}(\mathcal{G}, E)$ dans $\mathcal{A}(\mathcal{G}, F)$ par la formule suivante : pour tout $g \in \mathcal{G}$,

$$\left. \begin{aligned} \hat{S}^>(x)(g) &= \int_{\mathcal{G}^{r(g)}} S_{g_1}^>(V_{g_1}^>(x(g_1^{-1}g))) d\lambda^{r(g)}(g_1) \quad \text{pour } x \in C_c(\mathcal{G}, r^*E^>), \\ \hat{S}^<(\eta)(g) &= \int_{\mathcal{G}^{r(g)}} V_{g_1^{-1}g}^<(S_{g_1^{-1}g}^<(\eta(g_1))) d\lambda^{r(g)}(g_1) \quad \text{pour } \eta \in C_c(\mathcal{G}, s^*F^<). \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Alors

(i) \hat{S} est un morphisme de $\mathcal{A}(\mathcal{G}, B)$ -paires de $\mathcal{A}(\mathcal{G}, E)$ dans $\mathcal{A}(\mathcal{G}, F)$ et on a

$$\|\hat{S}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{A}(\mathcal{G}, E), \mathcal{A}(\mathcal{G}, F))} \leq \|g \mapsto \|S_g\|_{\mathcal{L}(E_{r(g)}, F_{r(g)})}\|_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})};$$

(ii) si S est partout compact \hat{S} est compact et on a même un résultat plus précis ; pour tout $\epsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$, et pour $i = 1, \dots, n$, des éléments $y_i \in C_c(\mathcal{G}, r^*F^>)$ et $\xi_i \in C_c(\mathcal{G}, s^*E^<)$ tels que, si on pose pour tout $g \in \mathcal{G}$,

$$S_{0,g} = \int_{\mathcal{G}^{r(g)}} \sum_{i=1}^n |y_i(g_1)\langle V_{g_1^{-1}g}^<(\xi_i(g_1^{-1}g))\rangle| d\lambda^{r(g)}(g_1), \quad (1.2)$$

alors $S_0 = (S_{0,g})_{g \in \mathcal{G}}$ est un champ partout compact à support compact de morphismes de B -paires de r^*E vers r^*F et d'une part, si on considère y_i et ξ_i comme des éléments de $\mathcal{A}(\mathcal{G}, F)^>$ et $\mathcal{A}(\mathcal{G}, E)^<$, on a $\hat{S}_0 = \sum_{i=1}^n |y_i\rangle\langle \xi_i|$ et d'autre part

$$\|g \mapsto \|S_g - S_{0,g}\|_{\mathcal{K}(E_{r(g)}, F_{r(g)})}\|_{\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G})} \leq \epsilon. \quad (1.3)$$

Démonstration. Comme (i) est clair, vérifions (ii). Si y_i et ξ_i sont comme dans le lemme, on obtient $\hat{S}_0 = \sum_{i=1}^n |y_i\rangle\langle \xi_i|$ par identification.

Enfin vérifions que si S est partout compact, pour tout $\epsilon > 0$, il existe n , et y_i, ξ_i pour $i \in \{1, \dots, n\}$, tels que si on définit S_0 par (1.2), alors (1.3) ait lieu. Il est clair que pour tout compact K de \mathcal{G} , il existe une constante C telle que pour toute fonction $f \in C_c(\mathcal{G})$

à support dans K , on ait $\|f\|_{\mathcal{A}_\epsilon(\mathcal{G})} \leq C \sup_K |f|$. A l'aide d'une partition de l'unité sur \mathcal{G} on voit qu'il suffit de démontrer l'assertion pour S de la forme

$$S_g = f(g)|y(r(g))\langle V_{g^{-1}}^{<}(\xi(s(g)))\rangle|,$$

où y et ξ sont des sections continues de $F^>$ et $E^<$ sur $\mathcal{G}^{(0)}$ et $f \in C_c(\mathcal{G})$. Or pour tout $\epsilon' > 0$, pour tout voisinage \mathcal{W} de $\mathcal{G}^{(0)}$ dans \mathcal{G} , pour tout compact K de \mathcal{G} contenant le support de f dans son intérieur, il existe des fonctions $f_1, f_2 \in C_c(\mathcal{G})$ telles que f_1 soit positive et à support dans \mathcal{W} , que $f_1 * f_2$ soit à support dans K et que $\sup_K |f - f_1 * f_2| \leq \epsilon'$. On pose alors $n = 1$, $y_1(g) = f_1(g)y(r(g))$ et $\xi_1(g) = f_2(g)\xi(s(g))$ et (1.3) a lieu si ϵ' et \mathcal{W} sont assez petits. \square

1.4. Compatibilité avec la théorie de Kasparov

Dans la suite toutes les C^* -algèbres sont supposées σ -unitales. Lorsque T est un espace localement compact et A et B sont deux $C_0(T)$ - C^* -algèbres on note $A \otimes B$ leur produit tensoriel minimal sur $C_0(T)$ (voir [Bla96]). D'autre part on désigne par \mathcal{G} un groupoïde localement compact muni d'un système de Haar λ .

Proposition 1.4.1. *Soient A et B deux \mathcal{G} - C^* -algèbres au sens de [Gal99]. Le paragraphe 1.2.4 montre qu'il existe un homomorphisme évident, fonctoriel en A et B ,*

$$\iota : KK_{\mathcal{G}}(A, B) \rightarrow KK_{\mathcal{G}}^{\text{ban}}(A, B). \tag{1.4}$$

Lemme 1.4.2. *Soient A, B, D des \mathcal{G} - C^* -algèbres. On a des morphismes de \mathcal{G} -algèbres de Banach évidents $\theta_1 : A \otimes^\pi D \rightarrow A \otimes D$ et $\theta_2 : B \otimes^\pi D \rightarrow B \otimes D$. Pour tout $\alpha \in KK_{\mathcal{G}}(A, B)$ on a $\theta_1^*(\iota(\sigma_D(\alpha))) = \theta_{2,*}(\sigma_D^{\text{ban}}(\iota(\alpha)))$ dans $KK_{\mathcal{G}}^{\text{ban}}(A \otimes^\pi D, B \otimes D)$.*

On le montre à l'aide de cônes.

Proposition 1.4.3. *Soit $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ une complétion inconditionnelle de $C_c(\mathcal{G})$ telle que $\|f\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G})} = \|f^*\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G})}$ et $\|f\|_{C_r^*(\mathcal{G})} \leq \|f\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G})}$ pour tout $f \in C_c(\mathcal{G})$.*

Pour toute \mathcal{G} - C^ -algèbre A , pour tout $f \in C_c(\mathcal{G}, r^*A)$, on a $\|f\|_{C_r^*(\mathcal{G}, A)} \leq \|f\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G}, A)}$, d'où un morphisme $i : \mathcal{A}(\mathcal{G}, A) \rightarrow C_r^*(\mathcal{G}, A)$ prolongeant $\text{Id}_{C_c(\mathcal{G}, r^*A)}$.*

Soient A et B des \mathcal{G} - C^ -algèbres et $\alpha \in KK_{\mathcal{G}}(A, B)$. Alors*

$$j_r(\alpha) \in KK(C_r^*(\mathcal{G}, A), C_r^*(\mathcal{G}, B))$$

construit dans [Gal94] et $j_{\mathcal{A}}(\iota(\alpha)) \in KK^{\text{ban}}(\mathcal{A}(\mathcal{G}, A), \mathcal{A}(\mathcal{G}, B))$ ont même image dans $KK^{\text{ban}}(\mathcal{A}(\mathcal{G}, A), C_r^(\mathcal{G}, B))$*

Démonstration. Les ingrédients de la preuve consistent en quatre lemmes. Dans ces lemmes $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ est une complétion inconditionnelle de $C_c(\mathcal{G})$ telle que pour tout $f \in C_c(\mathcal{G})$ on ait $\|f^*\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G})} = \|f\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G})}$ et $\|f\|_{C_r^*(\mathcal{G})} \leq \|f\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G})}$.

Lemme 1.4.4. *Soit A une \mathcal{G} - C^* -algèbre. Alors pour tout $f \in C_c(\mathcal{G}, r^*A)$, on a $\|f\|_{C_r^*(\mathcal{G}, A)} \leq \|f\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G}, A)}$.*

Notons $L^2(\mathcal{G}, A)$ le $C_0(\mathcal{G}^{(0)}, A)$ -module hilbertien des sections de r^*A de carré intégrable relativement à λ et $H^2(\mathcal{G}, A)$ la complétion de $C_c(\mathcal{G}, r^*A)$ pour la norme

$$\|x\|_{H^2(\mathcal{G}, A)} = \sup_{y \in \mathcal{G}^{(0)}} \left(\int_{\mathcal{G}^y} \|x(g)\|_A^2 d\lambda^y(g) \right)^{1/2}$$

(voir l'appendice de [Tu99]). Pour tout $x \in C_c(\mathcal{G}, r^*A)$ on a $\|x\|_{L^2(\mathcal{G}, A)} \leq \|x\|_{H^2(\mathcal{G}, A)}$. Soient $f, x \in C_c(\mathcal{G}, r^*A)$. Nous devons montrer $\|fx\|_{L^2(\mathcal{G}, A)} \leq \|f\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G}, A)} \|x\|_{L^2(\mathcal{G}, A)}$. Or

$$\|fx\|_{L^2(\mathcal{G}, A)}^2 \leq \|x\|_{L^2(\mathcal{G}, A)} \|(f^*f)x\|_{L^2(\mathcal{G}, A)}.$$

D'où par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|fx\|_{L^2(\mathcal{G}, A)}^{2^n} \leq \|x\|_{L^2(\mathcal{G}, A)}^{2^n-1} \|(f^*f)^{2^{n-1}}x\|_{L^2(\mathcal{G}, A)}.$$

Mais

$$\|(f^*f)^{2^{n-1}}x\|_{L^2(\mathcal{G}, A)} \leq \|(f^*f)^{2^{n-1}}x\|_{H^2(\mathcal{G}, A)} \leq \|f\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G}, A)}^{2^n} \|x\|_{H^2(\mathcal{G}, A)}.$$

En faisant tendre n vers l'infini on obtient l'inégalité souhaitée.

Lemme 1.4.5. Soient B une \mathcal{G} - C^* -algèbre et E un \mathcal{G} - B -module hilbertien. On rappelle que $C_r^*(\mathcal{G}, E)$ est un $C_r^*(\mathcal{G}, B)$ -module hilbertien construit comme complétion de $C_c(\mathcal{G}, r^*E)$. On a, pour tout $f \in C_c(\mathcal{G}, r^*E)$, $\|f\|_{C_r^*(\mathcal{G}, E)} \leq \|f\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G}, E)}$.

On applique le lemme précédent à la \mathcal{G} - C^* -algèbre

$$A = \begin{pmatrix} B & E \\ \bar{E} & \mathcal{K}(E) \end{pmatrix}.$$

Pour \bar{E} , voir [BS89].

Maintenant on a besoin de l'analogie de (i) du lemme 1.3.5 avec $C_r^*(\mathcal{G}, E)$ au lieu de $\mathcal{A}(\mathcal{G}, E)$.

Lemme 1.4.6. Soient B une \mathcal{G} - C^* -algèbre et E et F deux \mathcal{G} - B -modules hilbertiens. Soit $(S_g)_{g \in \mathcal{G}}$ un champ à support compact de morphismes de r^*B -modules hilbertiens de r^*E vers r^*F . Posons, pour tout $x \in C_c(\mathcal{G}, r^*E)$ et pour $g \in \mathcal{G}$,

$$\hat{S}(x)(g) = \int_{\mathcal{G}^{r(g)}} S_{g_1}(V_{g_1}(x(g_1^{-1}g))) d\lambda^{r(g)}(g_1).$$

Alors \hat{S} est un morphisme de $C_r^*(\mathcal{G}, B)$ -modules hilbertiens de $C_r^*(\mathcal{G}, E)$ dans $C_r^*(\mathcal{G}, F)$ et

$$\|\hat{S}\|_{\mathcal{L}(C_r^*(\mathcal{G}, E), C_r^*(\mathcal{G}, F))} \leq \|g \mapsto \|S_g\|_{\mathcal{L}(E_{r(g)}, F_{r(g)})}\|_{L^1(\mathcal{G})}$$

où $\|f\|_{L^1(\mathcal{G})} = \sup_{x \in \mathcal{G}^{(0)}} \int_{\mathcal{G}^x} |f(g)| d\lambda^x(g)$ pour $f \in C_c(\mathcal{G})$.

Adaptons la partie (ii) du lemme 1.3.5.

Lemme 1.4.7. *Sous les hypothèses du lemme 1.3.5, la partie (ii) reste valable en remplaçant (1.3) par*

$$\|g \mapsto \|S_g - S_{0,g}\|_{\mathcal{K}(E_{r(g)}, F_{r(g)})} \|_{\mathcal{A}(\mathcal{G})} + \|g \mapsto \|S_g - S_{0,g}\|_{\mathcal{K}(E_{r(g)}, F_{r(g)})} \|_{L^1(\mathcal{G})} \leq \epsilon.$$

Montrons maintenant la proposition 1.4.3. On réalise l’homotopie entre les images dans $KK^{\text{ban}}(\mathcal{A}(\mathcal{G}, A), C_r^*(\mathcal{G}, B))$ de $j_r(\alpha)$ et de $j_{\mathcal{A}}(\iota(\alpha))$ grâce à la construction suivante : si E est un \mathcal{G} - B -module hilbertien, d’après le lemme 1.4.5 on a un morphisme de $C_r^*(\mathcal{G}, B)$ -modules de Banach à droite $u : i_*(\mathcal{A}(\mathcal{G}, E)^>) \rightarrow C_r^*(\mathcal{G}, E)$ et on pose

$$\mathcal{B}(\mathcal{G}, E)^> = \{(h, x) \in C_r^*(\mathcal{G}, E)[0, 1] \times i_*(\mathcal{A}(\mathcal{G}, E)^>), h(0) = u(x)\}$$

muni de la norme $\|(h, x)\| = \max(\sup_{t \in [0, 1]} \|h(t)\|, \|x\|)$. On définit de même $\mathcal{B}(\mathcal{G}, E)^<$ et $\mathcal{B}(\mathcal{G}, E) = (\mathcal{B}(\mathcal{G}, E)^<, \mathcal{B}(\mathcal{G}, E)^>)$ est un $(\mathcal{A}(\mathcal{G}, A), C_r^*(\mathcal{G}, B)[0, 1])$ -bimodule de Banach. Si maintenant $\alpha \in KK_{\mathcal{G}}(A, B)$ est représenté par (E, T) avec E un \mathcal{G} - (A, B) -bimodule, $(\mathcal{B}(\mathcal{G}, E), \mathcal{B}(\mathcal{G}, T))$ appartient à $E^{\text{ban}}(\mathcal{A}(\mathcal{G}, A), C_r^*(\mathcal{G}, B)[0, 1])$ et réalise une homotopie entre les images dans $E^{\text{ban}}(\mathcal{A}(\mathcal{G}, A), C_r^*(\mathcal{G}, B))$ de $j_r(E, T)$ et $j_{\mathcal{A}}(\iota(E, T))$. Nous précisons que $\mathcal{B}(\mathcal{G}, T)$ est défini à partir de T comme $\mathcal{A}(\mathcal{G}, T)$ juste avant la proposition 1.3.3. \square

Proposition 1.4.8. *Soient ℓ une longueur sur \mathcal{G} et $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ et $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ deux complétions inconditionnelles de $C_c(\mathcal{G})$ telles que $\|f\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G})} \leq \|f\|_{\mathcal{B}(\mathcal{G})}$ pour tout $f \in C_c(\mathcal{G})$.*

*Pour toute \mathcal{G} -algèbre de Banach A on a $\|f\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G}, A)} \leq \|f\|_{\mathcal{B}(\mathcal{G}, A)}$ pour tout $f \in C_c(\mathcal{G}, r^*A)$, donc $\text{Id}_{C_c(\mathcal{G}, r^*A)}$ s’étend en un morphisme $i : \mathcal{B}(\mathcal{G}, A) \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{G}, A)$.*

Soient A et B deux \mathcal{G} -algèbres de Banach et $\alpha \in KK_{\mathcal{G}, \ell}^{\text{ban}}(A, B)$. Alors $j_{\mathcal{A}}(\alpha) \in KK^{\text{ban}}(\mathcal{A}_{\ell}(\mathcal{G}, A), \mathcal{A}(\mathcal{G}, B))$ et $j_{\mathcal{B}}(\alpha) \in KK^{\text{ban}}(\mathcal{B}_{\ell}(\mathcal{G}, A), \mathcal{B}(\mathcal{G}, B))$ ont même image dans $KK^{\text{ban}}(\mathcal{B}_{\ell}(\mathcal{G}, A), \mathcal{A}(\mathcal{G}, B))$.

Cela se démontre à l’aide de cônes comme la proposition précédente.

La proposition suivante est due à Hervé Oyono-Oyono. Elle est montrée dans l’appendice (c’est la proposition A.5.1). On rappelle que Σ est le foncteur naturel $KK^{\text{ban}}(\cdot, \cdot) \rightarrow \text{Hom}(K(\cdot), K(\cdot))$ (voir [Laf02, proposition 1.2.9]).

Proposition 1.4.9. *Soient $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ une complétion inconditionnelle de $C_c(\mathcal{G})$, A, B, C des \mathcal{G} - C^* -algèbres et $\alpha \in KK_{\mathcal{G}}(A, B)$, $\beta \in KK_{\mathcal{G}}(B, C)$, et $\alpha \otimes_B \beta \in KK_{\mathcal{G}}(A, C)$ le produit de Kasparov. Alors $\Sigma(j_{\mathcal{A}}(\alpha \otimes_B \beta)) = \Sigma(j_{\mathcal{A}}(\beta)) \circ \Sigma(j_{\mathcal{A}}(\alpha))$ de $K_*(\mathcal{A}(\mathcal{G}, A))$ vers $K_*(\mathcal{A}(\mathcal{G}, C))$.*

1.5. Application à la conjecture de Baum–Connes

On désigne par \mathcal{G} un groupoïde localement compact muni d’un système de Haar λ .

1.5.1. Une approche naïve

Proposition 1.5.1. *Soient $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ une complétion inconditionnelle de $C_c(\mathcal{G})$, A et B deux \mathcal{G} -algèbres de Banach et $\alpha \in KK_{\mathcal{G}}^{\text{ban}}(A, B)$. S’il existe une suite $(\ell_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de longueurs sur \mathcal{G} qui converge uniformément vers 0 sur tout compact de \mathcal{G} et telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\iota(\alpha) = 0$ dans $KK_{\mathcal{G}, \ell_i}^{\text{ban}}(A, B)$, alors $\Sigma(j_{\mathcal{A}}(\alpha)) = 0$ dans $\text{Hom}(K_*(\mathcal{A}(\mathcal{G}, A)), K_*(\mathcal{A}(\mathcal{G}, B)))$.*

Démonstration. Soit $l \in \{0, 1\}$. Par hypothèse $\Sigma(j_{\mathcal{A}}(\alpha))$ est nul pour tout entier i sur l'image de $K_l(\mathcal{A}_{\ell_i}(\mathcal{G}, A))$ dans $K_l(\mathcal{A}(\mathcal{G}, B))$. Or $K_l(\mathcal{A}(\mathcal{G}, A))$ est la réunion des images des $K_l(\mathcal{A}_{\ell_i}(\mathcal{G}, A))$ puisque, pour tout $f \in C_c(\mathcal{G}, r^*A)$, on a

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \|f\|_{\mathcal{A}_{\ell_i}(\mathcal{G}, A)} = \|f\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G}, A)}$$

et en vertu du lemme 1.7.2 de [Laf02]. □

Proposition 1.5.2. Soient $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ une complétion inconditionnelle de $C_c(\mathcal{G})$ telle que $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ soit une sous-algèbre involutive et stable par calcul fonctionnel holomorphe de $C_r^*(\mathcal{G})$ et $\alpha \in KK_{\mathcal{G}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), C_0(\mathcal{G}^{(0)}))$. S'il existe une suite $(\ell_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de longueurs sur \mathcal{G} qui converge uniformément vers 0 sur tout compact de \mathcal{G} et telle que, pour tout i , $\iota(\alpha) = 1$ dans $KK_{\mathcal{G}, \ell_i}^{\text{ban}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), C_0(\mathcal{G}^{(0)}))$ alors $j_r(\alpha) \in KK(C_r^*(\mathcal{G}), C_r^*(\mathcal{G}))$ induit l'identité sur $K_*(C_r^*(\mathcal{G}))$.

Démonstration. Cela résulte des propositions 1.5.1, 1.4.1 et 1.4.3, ainsi que de la functorialité de Σ . □

1.5.2. Généralisations de la conjecture de Baum–Connes

Dans toute la suite $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ une complétion inconditionnelle de $C_c(\mathcal{G})$ et B une \mathcal{G} - C^* -algèbre. On note $\underline{E}\mathcal{G}$ le classifiant de \mathcal{G} pour les actions propres et $q : \underline{E}\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ la projection liée à l'action de \mathcal{G} sur $\underline{E}\mathcal{G}$. Nous allons construire une application de Baum–Connes $\mu_{\mathcal{A}}^B : KK_{\mathcal{G}}^*(\underline{E}\mathcal{G}, B) \rightarrow K_*(\mathcal{A}(\mathcal{G}, B))$ et étudier ses propriétés.

Soit Y une partie \mathcal{G} -compacte de $\underline{E}\mathcal{G}$. D'après le § 6 de [Tu99] il existe $c \in C_c(Y, \mathbb{R}_+)$ tel que $\int_{\mathcal{G}^{p(y)}} c(yg) d\lambda^{p(y)}(g) = 1$ pour tout $y \in Y$. La fonction $(y, g, yg) \mapsto \sqrt{c(y)}\sqrt{c(yg)}$ est un projecteur de $C_c(\mathcal{G}, r^*C_0(Y))$ et on note $\lambda_{Y, \mathcal{G}, \mathcal{A}}$ l'élément de $K_0(\mathcal{A}(\mathcal{G}, C_0(Y)))$ qu'il détermine. D'où une suite d'homomorphismes

$$KK_{\mathcal{G}}(C_0(Y), B) \xrightarrow{\iota} KK_{\mathcal{G}}^{\text{ban}}(C_0(Y), B) \xrightarrow{j^{\mathcal{A}}} KK^{\text{ban}}(\mathcal{A}(\mathcal{G}, C_0(Y)), \mathcal{A}(\mathcal{G}, B)) \xrightarrow{\Sigma(\cdot)(\lambda_{Y, \mathcal{G}, \mathcal{A}})} K_0(\mathcal{A}(\mathcal{G}, B)).$$

Comme $\mathcal{A}(\mathcal{G}, C_0(\mathbb{R}, B))$ est une sous-algèbre dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe de $C_0(\mathbb{R}, \mathcal{A}(\mathcal{G}, B))$, on a aussi la suite d'homomorphismes

$$KK_{\mathcal{G}}^1(C_0(Y), B) = KK_{\mathcal{G}}(C_0(Y), C_0(\mathbb{R}, B)) \rightarrow K_0(\mathcal{A}(\mathcal{G}, C_0(\mathbb{R}, B))) = K_1(\mathcal{A}(\mathcal{G}, B)).$$

En passant à la limite inductive on définit ainsi $\mu_{\mathcal{A}}^B : KK_{\mathcal{G}}^*(\underline{E}\mathcal{G}, B) \rightarrow K_*(\mathcal{A}(\mathcal{G}, B))$.

Proposition 1.5.3. Soient C une autre \mathcal{G} - C^* -algèbre et $\alpha \in KK_{\mathcal{G}}(B, C)$, induisant $\alpha_*^{\text{top}} : KK_{\mathcal{G}}(\underline{E}\mathcal{G}, B) \rightarrow KK_{\mathcal{G}}(\underline{E}\mathcal{G}, C)$. Alors $\Sigma(j_{\mathcal{A}}(\alpha)) \circ \mu_{\mathcal{A}}^B = \mu_{\mathcal{A}}^C \circ \alpha_*^{\text{top}}$ de $KK_{\mathcal{G}}(\underline{E}\mathcal{G}, B)$ dans $K_*(\mathcal{A}(\mathcal{G}, C))$.

On applique la proposition 1.4.9 aux \mathcal{G} - C^* -algèbres $C_0(Y)$, B et C et à $\alpha \in KK_{\mathcal{G}}(B, C)$ et à un élément arbitraire de $KK_{\mathcal{G}}(C_0(Y), B)$.

Proposition 1.5.4. Soit $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ une autre complétion inconditionnelle de $C_c(\mathcal{G})$ telle que $\|f\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G})} \leq \|f\|_{\mathcal{B}(\mathcal{G})}$ pour tout $f \in C_c(\mathcal{G})$. Notons $i : \mathcal{B}(\mathcal{G}, B) \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{G}, B)$ le morphisme introduit dans la proposition 1.4.8. Alors on a $\mu_{\mathcal{A}}^B = i_* \circ \mu_{\mathcal{B}}^B$.

Cela résulte de la proposition 1.4.8.

Proposition 1.5.5. Supposons que l'on ait $\|f\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G})} = \|f^*\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G})}$ et $\|f\|_{C_r^*(\mathcal{G})} \leq \|f\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G})}$ pour tout $f \in C_c(\mathcal{G})$. Notons $i : \mathcal{A}(\mathcal{G}, B) \rightarrow C_r^*(\mathcal{G}, B)$ l'unique morphisme prolongeant $\text{Id}_{C_c(\mathcal{G}, r^*B)}$ (d'après la proposition 1.4.3). Alors on a $\mu_r^B = i_* \circ \mu_{\mathcal{A}}^B$, où μ_r^B est l'application de Baum–Connes usuelle.

Cela est une conséquence de la proposition 1.4.3 et de la functorialité de Σ .

Nous rappelons que B est dite propre si B est une $Z \rtimes \mathcal{G}$ - C^* -algèbre, avec Z un \mathcal{G} -espace propre. On note $q : Z \rightarrow \mathcal{G}^{(0)}$ la projection associée à l'action de \mathcal{G} sur Z .

Proposition 1.5.6. Si B est propre, et si μ_r^B est un isomorphisme (respectivement une surjection), pour toute complétion inconditionnelle $\mathcal{A}(\mathcal{G})$, $\mu_{\mathcal{A}}^B$ est un isomorphisme (respectivement une surjection).

Notons $\mathcal{B}(\mathcal{G}) = \mathcal{A}(\mathcal{G}) \cap \mathcal{A}(\mathcal{G})^* \cap L^1(\mathcal{G}) \cap L^1(\mathcal{G})^*$ de sorte que $\mathcal{B}(\mathcal{G}, B)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{A}(\mathcal{G}, B)$ et de $C_r^*(\mathcal{G}, B)$. La proposition découle du lemme suivant et des propositions 1.5.4 et 1.5.5.

Lemme 1.5.7. Dans les notations ci-dessus les morphismes naturels de $\mathcal{B}(\mathcal{G}, B)$ dans $\mathcal{A}(\mathcal{G}, B)$ et de $C_r^*(\mathcal{G}, B)$ induisent des isomorphismes en K -théorie.

La démonstration est analogue à celle du lemme 1.7.8 de [Laf02] : l'algèbre D des sections de r^*B à support compact dans $Z \rtimes \mathcal{G}$ est dense et héréditaire dans $C_r^*(\mathcal{G}, B)$ et $\mathcal{A}(\mathcal{G}, B)$.

La proposition suivante n'offre guère d'intérêt car elle découle du théorème 5.24 de [Tu99] (avec μ_r au lieu de μ) et de la proposition 1.5.5, dès que $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ est une sous-algèbre involutive de $C_r^*(\mathcal{G})$.

Proposition 1.5.8. Supposons que pour toute partie \mathcal{G} -compacte Y de $\underline{\mathcal{E}}\mathcal{G}$ il existe une \mathcal{G} - C^* -algèbre propre A , et $\eta \in KK_{\mathcal{G}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), A)$ et $d \in KK_{\mathcal{G}}(A, C_0(\mathcal{G}^{(0)}))$ tels que $\gamma = \eta \otimes_A d \in KK_{\mathcal{G}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), C_0(\mathcal{G}^{(0)}))$ vérifie $q^*(\gamma) = 1$ dans $KK_{\mathcal{G} \times Y}(C_0(Y), C_0(Y))$ où q est la projection de Y vers le point. Alors pour toute complétion inconditionnelle $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ et pour toute \mathcal{G} - C^* -algèbre B , $\mu_{\mathcal{A}}^B$ est une injection.

En effet soit $x \in KK_{\mathcal{G}}(\underline{\mathcal{E}}\mathcal{G}, B)$ tel que $\mu_{\mathcal{A}}^B(x) = 0$. Montrons que pour tout $\gamma \in KK_{\mathcal{G}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), C_0(\mathcal{G}^{(0)}))$ tel qu'il existe une \mathcal{G} - C^* -algèbre propre A , et $\eta \in KK_{\mathcal{G}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), A)$ et $d \in KK_{\mathcal{G}}(A, C_0(\mathcal{G}^{(0)}))$ tels que $\gamma = \eta \otimes_A d$, on a $\sigma_B(\gamma)_*(x) = 0$ dans $KK_{\mathcal{G}}(\underline{\mathcal{E}}\mathcal{G}, B)$. En effet on a $\mu_{\mathcal{A}}^{B \otimes A}(\sigma_B(\eta)_*(x)) = \Sigma(j_{\mathcal{A}}(\iota(\sigma_B(\eta))))(\mu_{\mathcal{A}}^B(x)) = 0$ d'après la proposition 1.5.3. Or

$$\mu_{\mathcal{A}}^{B \otimes A} : KK_{\mathcal{G}}(\underline{\mathcal{E}}\mathcal{G}, B \otimes A) \rightarrow K_*(\mathcal{A}(\mathcal{G}, B \otimes A))$$

est un isomorphisme : cela résulte de la proposition 1.5.6 parce que $B \otimes A$ est propre et que, d'après [Tu99], vu les hypothèses du théorème, $\mu_r^{B \otimes A}$ est un isomorphisme. Donc $\sigma_B(\eta)_*(x) = 0$. Mais $\sigma_B(\gamma) = \sigma_B(\eta) \otimes_A \sigma_B(d)$, d'où $\sigma_B(\gamma)_*(x) = 0$.

Ainsi, d'après les hypothèses du théorème, pour toute partie \mathcal{G} -compacte Y de $\underline{E}\mathcal{G}$ il existe $\gamma \in KK_{\mathcal{G}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), C_0(\mathcal{G}^{(0)}))$ tel que $\sigma_B(\gamma)_*(x) = 0$ et $q^*(\gamma) = 1$ dans $KK_{\mathcal{G} \times Y}(C_0(Y), C_0(Y))$, ce qui implique que

$$\sigma_B(\gamma)_* : KK_{\mathcal{G}}(C_0(Y), B) \rightarrow KK_{\mathcal{G}}(C_0(Y), B)$$

est l'identité. Par suite $x = 0$.

En adaptant la preuve de la proposition 5.11 dans [KS03], on obtient le résultat suivant.

Proposition 1.5.9. *Soit \mathcal{G} un groupoïde localement compact. Pour toute \mathcal{G} - C^* -algèbre propre B μ_r^B est une surjection.*

Le théorème suivant constitue notre résultat principal.

Théorème 1.5.10. *Supposons qu'il existe une \mathcal{G} - C^* -algèbre propre A , et*

$$\eta \in KK_{\mathcal{G}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), A) \quad \text{et} \quad d \in KK_{\mathcal{G}}(A, C_0(\mathcal{G}^{(0)}))$$

tels que

$$\gamma = \eta \otimes_A d \in KK_{\mathcal{G}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), C_0(\mathcal{G}^{(0)}))$$

vérifie la condition suivante : il existe une suite $(\ell_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de longueurs sur \mathcal{G} qui converge uniformément vers 0 sur tout compact de \mathcal{G} et telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\iota(\gamma) = 1$ dans $KK_{\mathcal{G}, \ell_i}^{\text{ban}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), C_0(\mathcal{G}^{(0)}))$. Alors pour toute complétion inconditionnelle $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ et pour toute \mathcal{G} - C^* -algèbre B , μ_A^B est une surjection.

D'après le lemme 1.4.2, $j_{\mathcal{A}}(\iota(\sigma_B(\gamma))) = j_{\mathcal{A}}(\sigma_B^{\text{ban}}(\iota(\gamma)))$ et d'après la proposition 1.5.1, $\Sigma(j_{\mathcal{A}}(\sigma_B^{\text{ban}}(\iota(\gamma)))) = \text{Id}_{K_*(\mathcal{A}(\mathcal{G}, B))}$. Comme $\sigma_B(\gamma) = \sigma_B(\eta) \otimes_A \sigma_B(d)$ et d'après la proposition 1.4.9, $\Sigma(j_{\mathcal{A}}(\iota(\sigma_B(d)))) : K_0(\mathcal{A}(\mathcal{G}, A \otimes B)) \rightarrow K_0(\mathcal{A}(\mathcal{G}, B))$ est surjective et le théorème résulte alors de la proposition 1.5.3 appliquée à $\sigma_B(d)$ et de la proposition 1.5.9.

2. Homotopies entre γ et 1

Il est essentiel pour nous de généraliser aux groupoïdes les §§ 2 et 3 de [Laf02]. La § 2 utilise la construction Dirac-dual Dirac de [KS94, KS03]. Cette construction a été généralisée aux groupoïdes par Tu dans [Tu99], mais en raison des difficultés techniques supplémentaires apparaissant dans [Tu99], qui s'ajouteraient aux difficultés techniques du § 2 de [Laf02], nous renonçons à mener à bien l'homotopie entre γ et 1 en théorie banachique, pour les groupoïdes vérifiant la propriété (B) de la définition 1.13 de [Tu99].

Dans ce paragraphe nous cherchons donc seulement à généraliser le § 3 de [Laf02].

Soit \mathcal{G} un groupoïde localement compact séparé de base compacte $X = \mathcal{G}^{(0)}$ et muni d'un système de Haar à gauche. Soit $Z = (Z_x)_{x \in X}$ une famille C^∞ de variétés riemanniennes complètes simplement connexes de courbure sectionnelle négative ou nulle et telle que le tenseur de courbure ainsi que sa dérivée (suivant la connexion provenant de la connexion de Levi-Civita sur le fibré tangent) soient bornés de façon uniforme en $x \in X$. Supposons Z muni d'une action continue isométrique et propre de \mathcal{G} . Comme les fibres

Z_x sont des variétés riemanniennes complètes simplement connexes de courbure sectionnelle négative ou nulle, par « calcul barycentrique », à partir de sections locales et d’une partition de l’unité on montre que l’application $s : Z \rightarrow X$ admet une section C^∞ . Soit $\sigma : X \rightarrow Z$ une telle section C^∞ . Notons $C_\tau(Z)$ l’algèbre des sections continues tendant vers 0 à l’infini du fibré en algèbres de Clifford associé à l’espace cotangent complexifié des fibres Z_x (voir [Kas88, 4.1]). La construction de Kasparov dans [Kas88] en famille fournit des éléments $[d] \in KK_G(C_\tau(Z), C(X))$ et $\eta \in KK_G(C(X), C_\tau(Z))$ et on note $\gamma = \eta \otimes_{C_\tau(Z)} [d] \in KK_G(C(X), C(X))$ leur produit.

Pour tout $g \in \mathcal{G}$ on note $\ell(g) = d(\sigma(r(g)), g(\sigma(s(g))))$, où la distance est prise dans $Z_{r(g)}$. Comme \mathcal{G} agit par isométrie sur les Z_x , la fonction $\ell : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une longueur.

Proposition 2.0.1. *Pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$, les éléments γ et 1 ont même image dans $KK_{\mathcal{G}, s\ell}^{\text{ban}}(C(X), C(X))$.*

Cette proposition se démontre de la même façon que le théorème 3.2.1 de [Laf02]. Dans [Laf02] la proposition 3.3.2 est pénible à démontrer mais dans cet article nous appliquons la proposition ci-dessus aux groupoïdes de Poincaré \mathcal{G} de certains feuilletages à base compacte et à $Z = \mathcal{G}$, et pour ces groupoïdes l’analogue (en famille) de la proposition 3.3.2 de [Laf02] est trivial (de même que la proposition 3.3.2 de [Laf02] est triviale lorsque X/G est compact).

3. Questions de plénitude

Soit \mathcal{G} un groupoïde. On note $C_r^*(\mathcal{G})$ la C^* -algèbre réduite de \mathcal{G} et $\mathcal{A}_{\max}(\mathcal{G})$ la sous-algèbre de $C_r^*(\mathcal{G})$ définie comme la complétion de $C_c(\mathcal{G})$ pour la norme $\|f\|_{\mathcal{A}_{\max}(\mathcal{G})} = \|g \mapsto |f(g)|\|_{C_r^*(\mathcal{G})}$. Le point essentiel de tout l’article est que l’on prend la valeur absolue point par point sur le groupoïde. C’est le bénéfice principal que nous retirons de la construction de KK^{ban} pour les groupoïdes. Nous montrons d’abord qu’une condition suffisante pour que l’homomorphisme $K_*(\mathcal{A}_{\max}(\mathcal{G})) \rightarrow K_*(C_r^*(\mathcal{G}))$ soit surjectif est la suivante.

$P(\mathcal{G})$: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout élément de $M_n(C_c(\mathcal{G}))$ a même rayon spectral dans $M_n(\mathcal{A}_{\max}(\mathcal{G}))$ et dans $M_n(C_r^*(\mathcal{G}))$.

La norme sur $M_n(\mathcal{A}_{\max}(\mathcal{G}))$ est bien définie à équivalence près et cela suffit bien sûr pour énoncer $P(\mathcal{G})$. Mais par la suite nous serons contents de fixer une norme sur $M_n(\mathcal{A}_{\max}(\mathcal{G}))$. Nous choisissons la norme suivante : pour $(f_{i,j})_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in M_n(C_c(\mathcal{G}))$,

$$\|(f_{i,j})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}\|_{M_n(\mathcal{A}_{\max}(\mathcal{G}))} = \|(g \mapsto |f_{i,j}(g)|)_{i,j \in \{1, \dots, n\}}\|_{M_n(C_r^*(\mathcal{G}))}.$$

C’est aussi la norme \mathcal{A}_{\max} associée au groupoïde $\mathcal{G} \times (\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\})$.

Nous montrons que $P(\mathcal{G})$ a lieu lorsque \mathcal{G} est hyperbolique en un sens à définir, et en particulier lorsque \mathcal{G} est le produit d’un groupe hyperbolique au sens de Gromov par un espace localement compact. D’autre part nous montrons que si Γ est le produit de deux groupes libres (non isomorphes à \mathbb{Z}) il existe un Γ -espace compact métrisable X tel que $P(\Gamma \ltimes X)$ n’ait pas lieu.

3.1. Généralités

Nous montrons d'abord que $P(\mathcal{G})$ implique la surjectivité de l'homomorphisme $K_*(\mathcal{A}_{\max}(\mathcal{G})) \rightarrow K_*(C_r^*(\mathcal{G}))$.

On se réfère à l'appendice A de [Bos90] pour les notions non définies. Le lemme suivant est le cas particulier du lemme 1.7.2 de [Laf02] où I est un singleton. On note ρ le rayon spectral.

Lemme 3.1.1. *Soient A et B des algèbres de Banach et $\theta : B \rightarrow A$ un morphisme d'algèbres de Banach d'image dense. S'il existe une sous-algèbre dense C de B telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in M_n(C)$, on ait $\rho_{M_n(B)}(x) = \rho_{M_n(A)}(\theta(x))$, alors $\theta_* : K_*(B) \rightarrow K_*(A)$ est surjectif.*

3.2. Equivalence entre $P(\Gamma)$ et $Q(\Gamma, d)$

Dans ce paragraphe on suppose que Γ est un groupe discret de type fini, on choisit un système fini de générateurs S et on note l la longueur associée à S et d la distance sur Γ définie par $d(x, y) = l(x^{-1}y)$.

Nous dirons que la propriété $P(\Gamma)$ a lieu si $P(\Gamma \rtimes X)$ est vrai pour tout Γ -espace localement compact X .

Nous montrons que $P(\Gamma)$ ne dépend que de l'espace métrique (Γ, d) , car $P(\Gamma)$ est équivalente à la propriété $Q(\Gamma, d)$ que nous allons maintenant définir. Nous montrons même en fait que si $Q(\Gamma, d)$ est fausse il existe un Γ -espace compact métrisable X tel que $P(\Gamma \rtimes X)$ n'ait pas lieu. Nous notons Abs l'opération qui consiste à remplacer tous les coefficients d'une matrice par leur module. Pour tout espace métrique discret (X, d) (nous disons qu'un espace métrique est discret si toute boule est finie), la propriété $Q(X, d)$ est la suivante.

$Q(X, d)$: pour tous $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $(C_p^{r,n}(X, d))_{p \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$C_p^{r,n}(X, d) = \sup_{\substack{T \text{ matrice finie indexée par } X \times \{1, \dots, n\} \\ \text{telle que } T_{(x,i)(y,j)} = 0 \text{ pour } i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ et } x, y \in X \text{ avec } d(x, y) > r}} \frac{\|\text{Abs}(T^p)\|}{\|T\|^p}$$

est telle que $(C_p^{r,n}(X, d))^{1/p}$ tende vers 1 quand p tend vers l'infini.

Le lemme suivant est immédiat.

Lemme 3.2.1. *Pour tout espace métrique discret (X, d) , $Q(X, d)$ ne dépend que de la distance d à équivalence près.*

3.2.1. Implication de $Q(\Gamma, d)$ vers $P(\Gamma)$

Soient $r \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$ et notons $\Gamma_r = \{g \in \Gamma, l(g) \leq r\}$.

Lemme 3.2.2. *Pour tout Γ -espace X , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout élément $x \in M_n(\Gamma \rtimes_{\text{alg}} C_0(X))$ à support dans $\Gamma_r \times X$, on a*

$$\frac{\|x^p\|_{M_n(\mathcal{A}_{\max}(\Gamma \rtimes X))}}{\|x\|_{M_n(\Gamma \rtimes_r C_0(X))}^p} \leq C_p^{r,n}(X, d).$$

Nous précisons que $M_n(\Gamma \rtimes_r C_0(X))$ est muni de sa norme naturelle de C^* -algèbre et le lemme est immédiat si l'on se souvient que cette norme peut être définie de la manière suivante : pour tout $f = (f_{i_1 i_2})_{i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}} \in M_n(\Gamma \rtimes_{\text{alg}} C_0(X))$,

$$\|f\|_{M_n(\Gamma \rtimes_r C_0(X))} = \sup_{x \in X} \left\| \left((g_1, i_1), (g_2, i_2) \mapsto f_{i_1 i_2} \left(g_2 x \xleftarrow{g_2 g_1^{-1}} g_1 x \right) \right) \right\|_{\mathcal{L}(l^2(\Gamma) \otimes \mathbb{C}^n)}.$$

L'implication de $Q(\Gamma, d)$ vers $P(\Gamma)$ est évidente une fois que l'on connaît le lemme.

Plus généralement soit \mathcal{G} un groupoïde étale, muni d'une longueur ℓ , qui vérifie de plus $\ell(g) = 0$ pour $g \in \mathcal{G}^{(0)}$ et $\ell(g) = \ell(g^{-1})$ pour $g \in \mathcal{G}$. Chaque fibre $\mathcal{G}_x = \{g \in \mathcal{G}, s(g) = x\}$ est munie de la distance $d(g_1, g_2) = \ell(g_1 g_2^{-1})$. On a alors le lemme suivant.

Lemme 3.2.3. *Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in M_n(C_c(\mathcal{G}))$, avec $\text{supp}(f) \subset \{g \in \mathcal{G}, \ell(g) \leq r\}$, on a*

$$\frac{\|x^p\|_{M_n(\mathcal{A}_{\max}(\mathcal{G}))}}{\|x\|_{M_n(C_r^*(\mathcal{G}))}^p} \leq \sup_{x \in \mathcal{G}^{(0)}} C_p^{r,n}(\mathcal{G}_x, d).$$

3.2.2. Implication de $P(\Gamma)$ vers $Q(\Gamma, d)$

La fin de la preuve qui suit m'a été suggérée par Georges Skandalis.

Nous raisonnons par l'absurde. Fixons $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $(C_p^{r,n}(\Gamma, d))^{1/p}$ ne tend pas vers 1. Il existe alors une suite d'entiers $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ tendant vers l'infini et une suite $(T_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de matrices finies indexées par $\Gamma \times \{1, \dots, n\}$, que l'on peut supposer de norme 1 en les multipliant par des scalaires, et telles que $\|\text{Abs}(T_i^{p_i})\|^{1/p_i}$ ne tende pas vers 1 lorsque i tend vers l'infini. En translatant les indices des matrices T_i par des éléments de Γ on peut supposer les T_i à supports deux à deux disjoints et poser $T = \sum_{i=1}^\infty T_i$. On a $T \in M_n(\Gamma \rtimes_{\text{alg}} l^\infty(\Gamma))$ et $\|T\|_{M_n(\Gamma \rtimes_r l^\infty(\Gamma))} = 1$ et le rayon spectral de T dans $M_n(\mathcal{A}_{\max}(\Gamma \rtimes \text{Spec}(l^\infty(\Gamma))))$ est strictement supérieur à 1. Bien sûr le spectre de $l^\infty(\Gamma)$ est compact et $P(\Gamma \rtimes \text{Spec}(l^\infty(\Gamma)))$ n'a pas lieu mais on peut aussi considérer l'espace compact X égal au spectre de la sous- C^* -algèbre de $l^\infty(\Gamma)$ engendrée par 1 et par les coefficients de T , de sorte que X est métrisable et que $P(\Gamma \rtimes X)$ n'a pas lieu.

3.3. Cas des groupes hyperboliques

Nous montrons que tout groupe hyperbolique Γ vérifie la propriété $P(\Gamma)$ en utilisant l'équivalence entre $P(\Gamma)$ et $Q(\Gamma, d)$ et en fait nous établissons un résultat un peu meilleur que $Q(\Gamma, d)$.

Nous commençons par rappeler quelques propriétés des espaces métriques.

Definition 3.3.1. Soit $\delta > 0$. Un espace métrique (X, d) est dit δ -hyperbolique si pour tout quadruplet (x, y, z, t) de points de X on a

$$d(x, t) + d(y, z) \leq \max(d(x, y) + d(z, t), d(x, z) + d(y, t)) + \delta.$$

Definition 3.3.2. Soit $\delta > 0$. Un espace métrique (X, d) est dit faiblement δ -géodésique si pour tous $x, y \in X$ et pour tout $s \in [0, d(x, y) + \delta]$ il existe $z \in X$ tel que $d(x, z) \leq s$ et $d(z, y) \leq d(x, y) - s + \delta$.

Un espace métrique (X, d) est dit hyperbolique (respectivement faiblement géodésique) s'il existe $\delta > 0$ tel que (X, d) soit δ -hyperbolique (respectivement faiblement δ -géodésique).

Definition 3.3.3. On dit qu'un espace métrique (X, d) vérifie la propriété (K) dite de croissance des boules s'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tous $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ on ait $\#\{y \in X, d(x, y) \leq r\} \leq \alpha e^{\beta r}$. Pour $\delta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ on note $E_{\delta, \alpha, \beta}$ l'ensemble des espaces métriques δ -hyperboliques, faiblement δ -géodésiques et vérifiant la propriété (K) avec les constantes α et β .

Il est clair que pour tout groupe hyperbolique Γ muni de la métrique d invariante à gauche associée à la longueur des mots déterminée par un système fini de générateurs, l'espace métrique (Γ, d) est hyperbolique et faiblement géodésique et vérifie la propriété (K).

Si (X, d) est un espace métrique, et T une matrice finie indexée par $X \times \{1, \dots, n\}$ on dit que T est à propagation inférieure ou égale à r si $T_{(x,i)(y,j)} = 0$ pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$ et $x, y \in X$ avec $d(x, y) > r$.

Proposition 3.3.4. Soient $\delta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*, n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ posons

$$\hat{C}_p^{r,n} = \sup_{\substack{(X,d) \in E_{\delta,\alpha,\beta} \\ T_1, \dots, T_p \text{ matrices finies indexées par } X \times \{1, \dots, n\} \\ \text{et à propagation inférieure ou égale à } r}} \frac{\|\text{Abs}(T_1 \cdots T_p)\|_{\mathcal{L}(l^2(X) \otimes \mathbb{C}^n)}}{\|T_1 \cdots T_p\|_{\mathcal{L}(l^2(X) \otimes \mathbb{C}^n)}}.$$

Alors $(\hat{C}_p^{r,n})^{1/p}$ tend vers 1 quand p tend vers l'infini.

Tout le reste de ce paragraphe est consacré à la démonstration de la proposition ci-dessus. On fixe δ, α et β . La proposition résulte des lemmes suivants.

Lemme 3.3.5. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $T \in M_k(\mathbb{C})$. Alors $\|\text{Abs}(T)\| \leq \sqrt{\text{rang}(T)}\|T\|$.

Démonstration du lemme. On a $\|\text{Abs}(T)\| \leq \|T\|_{\text{HS}}$ et $\|T\|_{\text{HS}}^2 = \text{Tr}(T^*T) \leq \text{rang}(T^*T)\|T^*T\|$. Or $\text{rang}(T^*T) \leq \text{rang}(T)$ et $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Pour préparer la démonstration du lemme suivant nous avons besoin de quelques propriétés géométriques des espaces hyperboliques. Soit $X \in E_{\delta, \alpha, \beta}$.

Pour tout $\epsilon > 0$ nous appelons ϵ -géodésique dans X une suite de trois points xyz telle que $d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, z) + \epsilon$.

Les trois propriétés suivantes résultent du fait que (X, d) est δ -hyperbolique et faiblement δ -géodésique :

(H1) pour tout $\epsilon > 0$ il existe $R_\epsilon > 0$ (ne dépendant que de ϵ et δ) tel que pour tous $x, y \in X, \{z, xzy\epsilon$ -géodésique} soit inclus dans la réunion de $E(d(x, y)) + 1$ boules de rayon R_ϵ centrées en des points $\omega_1, \dots, \omega_{E(d(x,y))+1}$ tels que pour tout i , on ait $|d(x, \omega_i) - i| \leq \delta$ et $x\omega_i y$ soit une δ -géodésique ;

(H2) pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ (ne dépendant que de ϵ et δ) tel que pour tout quadruplet (x, y, z, u) de points de X tel que yuz soit une ϵ -géodésique il existe $v \in X$ tel que $d(u, v) \leq r$ et que xvy ou xvz soit une δ -géodésique ;

(H3) pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ (ne dépendant que de r, ϵ et δ) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $x_1, \dots, x_n \in X$ vérifiant $d(x_i, x_{i+1}) \leq r$ pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$, et pour tout $y \in X$ tel que $x_1 y x_n$ soit une ϵ -géodésique, on ait $\min_i d(y, x_i) \leq a(\log n + 1)$.

La seule propriété non immédiate est (H3). On peut supposer $n = 2^k$ avec $k \in \mathbb{N}$. On démontre alors (H3) par récurrence sur k , à l'aide de (H2). □

Lemme 3.3.6. *Soient r, n, γ des entiers. Il existe un polynôme P (ne dépendant que de $r, n, \gamma, \delta, \alpha, \beta$) tel que pour tous $X \in E_{\delta, \alpha, \beta}$ et $x_0, z \in X$, et pour toutes parties A et B de X telles que*

- pour tout $x \in A, x_0 z x$ est une γ -géodésique,
- pour tout $y \in B, x_0 z y$ est une γ -géodésique,
- pour tous $x \in A$ et $y \in B, x z y$ est une γ -géodésique,

pour tous $p \in \mathbb{N}^*$ et T_1, \dots, T_p des matrices finies indexées par $X \times \{1, \dots, n\}$, à propagation inférieure ou égale à r , on ait

$$\text{rang}(T_1 \cdots T_p |_{A \times \{1, \dots, n\} \times B \times \{1, \dots, n\}}) \leq P(p).$$

D'après (H3) il existe un entier a (ne dépendant que de r, γ et δ) tel que pour tous $p \in \mathbb{N}^*, x_1, \dots, x_p$ vérifiant $x_1 \in A, x_p \in B$, et $d(x_i, x_{i+1}) \leq r$, il existe i vérifiant $d(z, x_i) \leq a(\log p + 1)$. Posons $C_p = \{t \in X, d(z, t) \leq a(\log p + 1)\}$. D'après (K), $\#C_p \leq P(p)$ pour un certain polynôme P (ne dépendant que de a, α, β). Soient q_1 et q_2 les projections orthogonales associées à la décomposition $l^2(X) = l^2(C_p) \oplus l^2(X - C_p)$. On note encore q_1 et q_2 les opérateurs $q_1 \otimes 1$ et $q_2 \otimes 1$ sur $l^2(X) \otimes \mathbb{C}^n$. On a donc

$$q_2 T_1 q_2 T_2 q_2 \cdots q_2 T_p q_2 |_{A \times \{1, \dots, n\} \times B \times \{1, \dots, n\}} = 0.$$

Or

$$T_1 \cdots T_p = q_2 T_1 q_2 \cdots q_2 T_p q_2 + q_1 T_1 q_2 \cdots q_2 T_p q_2 + T_1 q_1 T_2 q_2 \cdots q_2 T_p q_2 + \cdots + T_1 \cdots T_p q_1$$

et toutes les matrices, sauf peut-être la première, sont de rang inférieur ou égal à $n \#C_p$. D'où $\text{rang}(T_1 \cdots T_p |_{A \times \{1, \dots, n\} \times B \times \{1, \dots, n\}}) \leq n(p + 1)P(p)$.

Lemme 3.3.7. *Il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+$ et $m \in \mathbb{N}$ (ne dépendant que de δ, α, β) tels que pour tout $X \in E_{\delta, \alpha, \beta}$ on ait la propriété suivante : il existe des familles $(A_{z,i})_{z \in X, i \in \{1, \dots, m\}}$ et $(B_{z,i})_{z \in X, i \in \{1, \dots, m\}}$ de parties de X telles que pour tous $z \in X, i \in \{1, \dots, m\}$,*

- pour tout $x \in A_{z,i}, x_0 z x$ est une γ -géodésique,
- pour tout $y \in B_{z,i}, x_0 z y$ est une γ -géodésique,
- pour tous $x \in A_{z,i}$ et $y \in B_{z,i}, x z y$ est une γ -géodésique,

et que $X \times X = \bigcup_{z \in X, i \in \{1, \dots, m\}} A_{z,i} \times B_{z,i}$.

En fait on peut prendre $\gamma = 4\delta$.

La démonstration se fait en trois étapes. La première établit l'existence d'un entier m et de deux familles $(A_{z,i})_{z \in X, i \in \{1, \dots, m\}}$ et $(B_{z,i})_{z \in X, i \in \{1, \dots, m\}}$ telles que pour tout $z \in X$, $\cup_{i \in \{1, \dots, m\}} A_{z,i} \times B_{z,i}$ soit égal à une certaine partie C_z de $X \times X$ définie par

$$C_z = \{(x, y), x_0zx \text{ est une } \gamma\text{-géodésique, } x_0zy \text{ est une } \gamma\text{-géodésique,}$$

$$\text{et pour tout } z' \in B(z, 3\delta) \text{ on a } d(x, z') + d(z', y) \geq d(x, z) + d(z, y) - \delta\}.$$

Cette égalité implique immédiatement que les deux familles vérifient les deux premières conditions du lemme. La deuxième (respectivement la troisième) étape montre que cette égalité implique la troisième (respectivement la quatrième) condition du lemme.

Première étape. On montre qu'il existe un entier m (ne dépendant que de δ, α, β) et des familles $(A_{z,i})_{z \in X, i \in \{1, \dots, m\}}$ et $(B_{z,i})_{z \in X, i \in \{1, \dots, m\}}$ vérifiant, pour tout $z \in X$,

$$\cup_{i \in \{1, \dots, m\}} A_{z,i} \times B_{z,i} = C_z.$$

En effet la dernière condition définissant cet ensemble ne dépend que de la connaissance des distances de x aux points de $B(z, 3\delta)$ à une constante près (ou si on veut des différences entre ces distances) et de la même chose pour y . Or le cardinal de $B(z, 3\delta)$ est majoré en fonction de δ, α, β et les différences entre les distances de x (ou de y) à deux points de $B(z, 3\delta)$ sont de valeurs absolues plus petites que 6δ par l'inégalité triangulaire.

Deuxième étape. On montre $X \times X = \cup_{z \in X} C_z$. En effet soit $(x, y) \in X \times X$. Comme X est δ -faiblement géodésique il existe $z \in X$ tel que

$$d(x, z) \leq \frac{1}{2}(d(x, x_0) + d(x, y) - d(x_0, y) + \delta) \quad \text{et} \quad d(y, z) \leq \frac{1}{2}(d(y, x_0) + d(x, y) - d(x_0, x) + \delta).$$

La propriété d'hyperbolicité, appliquée à x_0, x, y, z donne

$$d(x_0, z) + d(x, y) \leq \max(d(x_0, x) + d(y, z) + \delta, d(x_0, y) + d(x, z) + \delta),$$

d'où

$$d(x_0, z) + d(z, x)$$

$$\leq \max(d(x_0, x) + d(y, z) + d(z, x) - d(x, y) + \delta, d(x_0, y) + 2d(x, z) - d(x, y) + \delta).$$

Mais $d(y, z) + d(z, x) - d(x, y) \leq \delta$ et $d(x_0, y) + 2d(x, z) - d(x, y) \leq d(x_0, x) + \delta$. Par conséquent x_0zx est une 2δ -géodésique. On montre de même que x_0zy est une 2δ -géodésique. Enfin pour tout $z' \in X$ on a $d(x, z') + d(z', y) \geq d(x, y) \geq d(x, z) + d(z, y) - \delta$.

Troisième étape. Soit $z \in X$ et $(x, y) \in C_z$. On montre que xzy est une 4δ -géodésique. Sinon soit $z' \in X$ tel que $d(z, z') \leq 3\delta$ et $d(x, z') \leq d(x, z) - 2\delta$. En appliquant la propriété d'hyperbolicité à x, z, y, z' on trouve

$$d(y, z') + d(x, z) \leq \max(d(x, y) + d(z, z') + \delta, d(y, z) + d(x, z') + \delta),$$

d'où

$$d(y, z') + d(x, z') \leq \max(d(x, y) + (d(z, z') + d(x, z') - d(x, z)) + \delta, d(y, z) + d(z, x) - 2(d(z, x) - d(x, z')) + \delta).$$

Or $d(z, z') + d(x, z') - d(x, z) \leq \delta$ et $-2(d(z, x) - d(x, z')) + \delta \leq -3\delta$. Donc $z' \in B(z, 3\delta)$ et $d(y, z') + d(x, z') \leq \max(d(x, y) + 2\delta, d(y, z) + d(z, x) - 3\delta)$ ce qui implique $d(y, z') + d(x, z') < d(y, z) + d(z, x) - \delta$ car xzy n'est pas une 4δ -géodésique et $\delta > 0$. D'où une contradiction.

Lemme 3.3.8. Soient γ, n, m des entiers. Il existe un polynôme P (dépendant de $\delta, \alpha, \beta, \gamma, n, m$) tel que pour tout $X \in E_{\delta, \alpha, \beta}$, pour tout entier q et pour toute matrice finie T indexée par $X \times \{1, \dots, n\}$, à coefficients positifs et à propagation inférieure ou égale à q , et si $(A_{z,i})_{z \in X, i \in \{1, \dots, m\}}$ et $(B_{z,i})_{z \in X, i \in \{1, \dots, m\}}$ vérifient les quatre conditions du lemme précédent (relativement à γ et m), on ait

$$\|T\| \leq P(q) \sup_{z \in X, i \in \{1, \dots, m\}} \|T|_{A_{z,i} \times B_{z,i}}\|.$$

Pour chaque $x \in X$, les $z \in X$ tels que $x \in A_{z,i}$ et que $T|_{A_{z,i} \times B_{z,i}}$ a un coefficient non nul dans la ligne de x , ou que $x \in B_{z,i}$ et que $T|_{A_{z,i} \times B_{z,i}}$ a un coefficient non nul dans la colonne de x , vérifient que $d(x, z) \leq q + \gamma$ et x_0zx γ -géodésique, donc d'après (H1) ils sont au plus en nombre $a(q + 1)$ pour un certain entier a ne dépendant que de $\gamma, \delta, \alpha, \beta$. On peut donc les numéroter $z_1(x), \dots, z_{a(q+1)}(x)$ (avec répétition pour ne pas introduire une nouvelle fonction). Pour $k, l \in \{1, \dots, a(q + 1)\}$ et $i \in \{1, \dots, m\}$, notons $T_i^{k,l}$ la matrice définie par $(T_i^{k,l})_{x,y} = T_{x,y}$ s'il existe $z \in X$ tel que $z = z_k(x) = z_l(y)$ et $x \in A_{z,i}$ et $y \in B_{z,i}$ et 0 sinon. On a

$$T \leq \sum_{i \in \{1, \dots, m\}, k, l \in \{1, \dots, a(q+1)\}} T_i^{k,l}$$

au sens où l'inégalité a lieu coefficient par coefficient, et $T_i^{k,l}$ est un réunion de blocs $T_{z,i}^{k,l}$ qui sont des matrices extraites de $T|_{A_{z,i} \times B_{z,i}}$, donc $\|T_i^{k,l}\| \leq \|T\|$.

3.4. Contre-exemple à $Q(\Gamma, d)$

Nous montrons enfin que si un espace métrique discret (X, d) contient un sous-espace qui, muni de la distance induite, est égal, à équivalence des distances près, au produit de deux arbres gras, alors $Q(X, d)$ n'a pas lieu. Nous appelons arbre gras un arbre dont tous les sommets ont au moins pour valence 3. Il en résulte que $P(\Gamma)$ n'a pas lieu lorsque Γ est le produit direct de deux groupes libres ou lorsque Γ est un sous-groupe discret cocompact de $SL_n(\mathbb{Q}_p)$ pour $n \geq 4$.

Comme nous oublions la structure de groupe sur Γ , nous notons désormais X au lieu de Γ . Nous considérons donc un espace métrique discret (X, d) .

Le lemme suivant est immédiat.

Lemme 3.4.1. *Soit Y une partie de X , munie de la distance induite, notée d par abus. Alors $Q(X, d)$ implique $Q(Y, d)$.*

Comme tout arbre gras contient un arbre dyadique, la proposition suivante, ajoutée au lemme précédent et au lemme 3.2.1, implique le résultat énoncé ci-dessus.

Proposition 3.4.2. *Considérons deux arbres dyadiques A_1 et A_2 et munissons $A_1 \times A_2$ de la distance produit, notée d . Alors $Q(A_1 \times A_2, d)$ n'a pas lieu.*

Démonstration. Choisissons deux points voisins x_1 et y_1 dans A_1 et posons $B_1^p = \{z \in A_1, d(z, x_1) \leq p \text{ et } d(z, y_1) = d(z, x_1) + 1\}$. En d'autres termes B_1^p est égal à l'ensemble des mots, éventuellement vides et de longueur inférieure ou égale à p , formés de 0 et de 1 et où deux mots sont dits voisins si l'on passe de l'un à l'autre en ajoutant ou en enlevant un 0 ou un 1 à la fin du mot. Nous définissons une partie B_2^p de A_2 de façon analogue.

Considérons la matrice T sur $B_1^p \times B_2^p$ définie de la manière suivante : pour $(z_1, z_2) \in B_1^p \times B_2^p$ et $(t_1, t_2) \in B_1^p \times B_2^p$, $T_{(t_1, t_2)(z_1, z_2)} = 0$ sauf si t_1 s'obtient à partir de z_1 en ajoutant $a = 0$ ou 1 et t_2 s'obtient à partir de z_2 en enlevant $b = 0$ ou 1 et dans ce cas $T_{(t_1, t_2)(z_1, z_2)} = (-1)^{ab}$. Il est clair que T est formée de blocs

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad \|T\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}.$$

D'autre part $(T^p)_{(t_1, t_2)(z_1, z_2)} = 0$ sauf si z_1 et t_2 sont vides et t_1 et z_2 de longueur p et dans ce cas $(T^p)_{(t_1, t_2)(z_1, z_2)} = \mp 1$. D'où $\|\text{Abs}(T^p)\| = 2^p$. \square

3.5. Cas général des groupoïdes hyperboliques

Definition 3.5.1. Un groupoïde séparé et étale \mathcal{G} est dit hyperbolique à croissance contrôlée s'il existe $\delta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, et des métriques sur les fibres $\mathcal{G}_x = \{g \in \mathcal{G}, s(g) = x\}$ de \mathcal{G} qui soient invariantes à droite et telles que pour tout $x \in \mathcal{G}^{(0)}$, \mathcal{G}_x soit δ -hyperbolique, faiblement δ -géodésique et vérifie la propriété (K) avec les constantes α et β .

Proposition 3.5.2. *Pour tout groupoïde \mathcal{G} séparé, étale et hyperbolique à croissance contrôlée, $P(\mathcal{G})$ a lieu.*

Ceci découle de la proposition 3.3.4, et du lemme 3.2.3.

Exemple. Soit (V, F) un feuilletage à base compacte muni d'une métrique riemannienne longitudinale telle que les fibres du groupoïde de Poincaré soient toutes δ -hyperboliques pour un certain $\delta > 0$. A l'aide de transversales on obtient un groupoïde étale \mathcal{G} auquel le groupoïde de Poincaré de (V, F) est Morita équivalent. On voit facilement que \mathcal{G} est séparé, étale et hyperbolique à croissance contrôlée au sens de la définition 3.5.1. Par suite l'inclusion de $\mathcal{A}_{\max}(\mathcal{G})$ dans $C_r^*(\mathcal{G})$ induit une surjection en K -théorie.

Un cas particulier de l'exemple précédent est constitué par les feuilletages à base compacte munis d'une métrique riemannienne longitudinale à courbure sectionnelle strictement négative.

4. Conclusion

Il résulte immédiatement de la proposition 1.5.8, du théorème 1.5.10 et de la proposition 3.5.2, que le théorème suivant est vrai.

Théorème 4.0.1. *Soit \mathcal{G} un groupoïde vérifiant les hypothèses de la proposition 1.5.8 et du théorème 1.5.10 et hyperbolique à croissance contrôlée au sens de la définition 3.5.1. Alors $\mu_r : K_*^{\text{top}}(\mathcal{G}) \rightarrow K_*(C_r^*(\mathcal{G}))$ est un isomorphisme.*

Ce théorème s'applique dans les deux cas particuliers suivants.

(a) Soit Γ un groupe discret hyperbolique et X un espace localement compact muni d'une action continue de Γ . Alors $\mathcal{G} = \Gamma \ltimes X$ vérifie les hypothèses du théorème 4.0.1.

(b) Soit (V, F) un feuilletage à base compacte muni d'une métrique riemannienne longitudinale à courbure sectionnelle strictement négative. D'après la proposition 2.0.1 le groupoïde de Poincaré \mathcal{P} de (V, F) vérifie les hypothèses de la proposition 1.5.8 et du théorème 1.5.10. A l'aide de transversales on obtient un groupoïde étale \mathcal{G} qui est un sous-groupoïde de \mathcal{P} . Par suite \mathcal{G} vérifie aussi les hypothèses de la proposition 1.5.8 et du théorème 1.5.10. Or \mathcal{G} est hyperbolique à croissance contrôlée au sens de la définition 3.5.1. Par suite $\mu_r : K_*^{\text{top}}(\mathcal{G}) \rightarrow K_*(C_r^*(\mathcal{G}))$ est un isomorphisme. Or \mathcal{G} est équivalent à \mathcal{P} et donc $\mu_r : K_*^{\text{top}}(\mathcal{P}) \rightarrow K_*(C_r^*(\mathcal{P}))$ est un isomorphisme car les C^* -algèbres réduites de \mathcal{G} et \mathcal{P} sont Morita-équivalentes d'après [MRW87]. Plus généralement soit $Y \rightarrow X$ un \mathcal{P} -espace localement compact. Par l'équivalence de Morita entre \mathcal{P} et \mathcal{G} on en déduit un \mathcal{G} -espace localement compact Z . Alors les groupoïdes produits croisés $\mathcal{G} \ltimes Z$ et $\mathcal{P} \ltimes Y$ sont Morita équivalents, et $\mathcal{G} \ltimes Z$ est hyperbolique à croissance contrôlée au sens de la définition 3.5.1. Donc $K_*^{\text{top}}(\mathcal{G} \ltimes Y) \rightarrow K_*(C_r^*(\mathcal{G} \ltimes Y))$ est un isomorphisme et on a démontré le résultat suivant.

Corollaire 4.0.2. *La conjecture de Baum–Connes à coefficients commutatifs est vraie pour les groupes hyperboliques et pour les groupoïdes de Poincaré des feuilletages à base compacte qui peuvent être munis d'une métrique riemannienne longitudinale à courbure sectionnelle strictement négative.*

Appendice A. Propriété de décomposition en KK -théorie équivariante par l'action d'un groupoïde

Par Hervé Oyono-Oyono*

A.1. Introduction

Lafforgue a montré dans [Laf02] que tout élément de KK -théorie équivariante par rapport à l'action d'un groupe pouvait s'écrire comme le produit d'un élément induit par un morphisme et de l'inverse en KK -théorie équivariante d'un élément induit par

* Laboratoire de Mathématiques, Université Blaise Pascal, Campus Universitaire des Cézeaux, 63177 Aubière Cedex, France (oyono@math.univ-bpclermont.fr).

un morphisme (c'est-à-dire vérifiant la condition (2) de la définition A.2.1 dans le cas où \mathcal{G} est un groupe). Ce résultat est crucial pour montrer la relation de compatibilité « minimale » entre produit en KK -théorie de Kasparov et application de descente en KK -théorie des algèbres de Banach. La preuve donnée dans [Laf02] utilise un résultat de Thomsen sur l'existence d'unités approchées invariantes (voir [Tho99]). Afin d'éviter d'avoir recours à un résultat analogue dans le cas des groupoïdes pour montrer cette relation de compatibilité « minimale », nous montrons que tout élément de KK -théorie équivariante par rapport à un groupoïde satisfait une propriété de décomposition un peu plus générale que la précédente : la propriété de décomposition (d) (voir définition A.2.1). Nous renvoyons le lecteur à [Gal99] et au § 1 pour les définitions de la KK -théorie de Kasparov et la KK -théorie des algèbres de Banach équivariantes par l'action d'un groupoïde.

A.2. Propriété de décomposition (d)

Dans tout cet appendice, les groupoïdes seront supposés localement compact et munis d'un système de Haar et pour tout groupoïde localement compacts \mathcal{G} , nous désignerons par \mathcal{G} -algèbre une C^* -algèbre séparable munie d'une action de \mathcal{G} [Gal99].

Definition A.2.1. Soient \mathcal{G} un groupoïde, A et B deux \mathcal{G} -algèbres et α un élément de $KK_{\mathcal{G}}(A, B)$. On dit que α a la propriété de décomposition (d) si α vérifie la condition suivante : il existe

- A_0, \dots, A_n des \mathcal{G} -algèbres avec $A = A_0$ et $B = A_n$,
- $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ avec $\alpha_i \in KK_{\mathcal{G}}(A_{i-1}, A_i)$ d'une des deux formes suivantes
 - (1) α_i est induit par un morphisme $A_i \rightarrow A_{i+1}$;
 - (2) il existe un morphisme $\theta_i : A_{i+1} \rightarrow A_i$ tel que $[\theta_i] \otimes_{A_i} \alpha_i = 1_{A_{i+1}}$ et $\alpha_i \otimes_{A_{i+1}} [\theta_i] = 1_{A_i}$ où $[\theta_i] \in KK_{\mathcal{G}}(A_{i+1}, A_i)$ est induit par le morphisme θ_i , autrement dit α_i est l'inverse en KK -théorie \mathcal{G} -équivariante d'un morphisme ;

tels que

$$\alpha = \alpha_1 \otimes_{A_1} \cdots \otimes_{A_n} \alpha_n.$$

Nous montrons dans cet appendice le résultat suivant.

Théorème A.2.2. Soit \mathcal{G} un groupoïde et soit A et B deux \mathcal{G} -algèbres. Alors tout élément α de $KK_{\mathcal{G}}(A, B)$ a la propriété de décomposition (d).

La démonstration de ce théorème sera donnée dans la section suivante. Ce résultat pourrait aussi être obtenu comme conséquence de la généralisation de [Mey00] à la KK -théorie équivariante par l'action d'un groupoïde. La fin de cette section est consacrée à des rappels sur les actions de groupoïdes (voir [Gal99]). Nous renvoyons le lecteur à [Ren80] pour la définition des groupoïdes et à [Bla96] pour la notion de $C(X)$ -algèbres. Dans toute la suite, \mathcal{G} désignera un groupoïde, X l'espace de ses unités, $s : \mathcal{G} \rightarrow X$ l'application source et $r : \mathcal{G} \rightarrow X$ l'application but. Si x est un élément de X , on

note $\mathcal{G}^x = \{\gamma \in \mathcal{G} \text{ tel que } r(\gamma) = x\}$. On suppose que \mathcal{G} est muni d'un système de Haar $(\lambda^x)_{x \in X}$.

Soit B une $C(X)$ -algèbre. Pour tout $x \in X$, on note B_x la fibre de B en x et pour tout $b \in B$ on désigne par $b(x) \in B_x$ la fibre de b en x . Soient $s^*B = B \otimes_s C_0(\mathcal{G})$ et $r^*B = B \otimes_r C_0(\mathcal{G})$ les tirés en arrière respectifs de B par s et r . Les algèbres s^*B et r^*B sont des $C(\mathcal{G})$ -algèbres dont les fibres en $\gamma \in \mathcal{G}$ sont respectivement $B_{s(\gamma)}$ et $B_{r(\gamma)}$. On rappelle qu'une action de \mathcal{G} sur B est la donnée d'un isomorphisme de $C(\mathcal{G})$ -algèbre $\beta : s^*B \rightarrow r^*B$ tel que $\beta_\gamma \cdot \beta_{\gamma'} = \beta_{\gamma \circ \gamma'}$ lorsque $s(\gamma) = r(\gamma')$.

Soit Ξ un B -module de Hilbert à droite, on définit de même Ξ_x la fibre de Ξ en x , $s^*\Xi = \Xi \otimes_s C_0(\mathcal{G})$ et $r^*\Xi = \Xi \otimes_r C_0(\mathcal{G})$ respectivement les tirés en arrière de Ξ par s et r . Alors, $s^*\Xi$ est un s^*B -module de Hilbert à droite dont la fibre en $\gamma \in \mathcal{G}$ est $\Xi_{s(\gamma)}$ et $r^*\Xi$ est un r^*B -module de Hilbert à droite dont la fibre en $\gamma \in \mathcal{G}$ est $\Xi_{r(\gamma)}$. Si σ est dans $r^*\Xi$, on note $\sigma(\gamma) \in \Xi_{r(\gamma)}$ la fibre de σ en γ .

Une action de \mathcal{G} sur Ξ est alors la donnée d'un unitaire V de $\mathcal{L}(s^*\Xi, r^*\Xi)$ tel que $V_\gamma \cdot V_{\gamma'} = V_{\gamma \circ \gamma'}$ lorsque $s(\gamma) = r(\gamma')$, la structure de s^*B -module de Hilbert à droite sur $r^*\Xi$ étant obtenue grâce à l'isomorphisme $\beta^{-1} : r^*B \rightarrow s^*B$.

On définit $L^2(\mathcal{G})$ le $C(X)$ -module de Hilbert à droite comme étant la complétion de l'algèbre $C_c(\mathcal{G})$ des fonctions continue sur \mathcal{G} à support compact pour le $C_0(X)$ -produit scalaire $\langle \phi | \phi' \rangle(x) = \int_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \bar{\phi} \cdot \phi' d\lambda^x(\gamma)$ pour tout $x \in X$, où ϕ et ϕ' sont des éléments de $C_c(\mathcal{G})$. Le $C(X)$ -module de Hilbert à droite $L^2(\mathcal{G})$ est alors muni d'une action de \mathcal{G} (la représentation régulière gauche de \mathcal{G}). Soit Ξ un B -module de Hilbert à droite muni d'une action de \mathcal{G} . Considérons $L^2(\mathcal{G}, \Xi) = \Xi \otimes_{C_0(X)} L^2(\mathcal{G})$ muni de l'action diagonale de \mathcal{G} . Soit $C_c(\mathcal{G}, \Xi)$ le sous- r^*B -module de $r^*\Xi$ des éléments à support compact, c'est-à-dire des éléments de la forme $f \cdot \sigma$ où f est une fonction de $C_c(\mathcal{G})$ et σ appartient à $r^*\Xi$. On a une inclusion à image dense de $C_c(\mathcal{G}, \Xi)$ dans $L^2(\mathcal{G}, \Xi)$.

A.3. Preuve du théorème A.2.2

Pour toute C^* -algèbre séparable B et pour tout B -module de Hilbert à droite Ξ , on désigne par $\mathcal{L}(\Xi)$ la C^* -algèbre des endomorphismes adjoinables de $\mathcal{L}(\Xi)$ et par $\mathcal{K}(\Xi)$ l'idéal des opérateurs compact de $\mathcal{L}(\Xi)$. Le théorème A.2.2 est alors une conséquence des quatre lemmes suivants.

Lemme A.3.1. *Soit B une \mathcal{G} -algèbre et soit Ξ un B -module de Hilbert \mathcal{G} -équivariant. Supposons que l'idéal engendré par $\{(\xi, \nu); (\xi, \nu) \in \Xi^2\}$ soit dense dans B , alors les éléments*

$$M \in KK_{\mathcal{G}}(\mathcal{K}(\Xi), B)$$

et

$$M' \in KK_{\mathcal{G}}(B, \mathcal{K}(\Xi))$$

induits par les Morita équivalences \mathcal{G} -équivariantes entre B et $\mathcal{K}(\Xi)$ vérifient la propriété de décomposition (d).

Démonstration. Soit $i_1 : B \rightarrow \mathcal{K}(\Xi \oplus B)$ et $i_2 : \mathcal{K}(\Xi) \rightarrow \mathcal{K}(\Xi \oplus B)$ les inclusions naturelles. Alors,

- les éléments $[i_1] \in KK_{\mathcal{G}}(B, \mathcal{K}(\Xi \oplus B))$ et $[i_2] \in KK_{\mathcal{G}}(\mathcal{K}(\Xi), \mathcal{K}(\Xi \oplus B))$ induits par i_1 et i_2 sont inversibles en KK-théorie \mathcal{G} -équivariante ;
- $M = [i_2] \otimes [i_1]^{-1}$ et $M' = [i_1] \otimes [i_2]^{-1}$.

□

On rappelle que pour toutes \mathcal{G} -algèbres A , B et D , Legall a défini [Gal99] un morphisme naturel $\tau_D : KK_{\mathcal{G}}(A, B) \rightarrow KK_{\mathcal{G}}(A \otimes D, B \otimes D)$ associant à tout A - B -bimodule de Kasparov \mathcal{G} -équivariant (Ξ, π, T) le A - B -bimodule de Kasparov \mathcal{G} -équivariant $(\Xi \otimes_{C_0(X)} D, \pi \otimes_{C_0(X)} \text{Id}_D, T \otimes_{C_0(X)} \text{Id}_D)$. De plus, ce morphisme τ_D respecte le produit de Kasparov et par naturalité, si $\alpha \in KK_{\mathcal{G}}(A, B)$ vérifie la propriété de décomposition (d), alors $\tau_D(\alpha)$ vérifie aussi la propriété de décomposition (d).

Soit I l'intervalle $]0, 1[$ et soit $\partial_X \in KK_{1, \mathcal{G}}(C_0(X), C_0(X) \otimes C_0(I))$ l'élément de bord de la suite exacte \mathcal{G} -équivariante

$$0 \rightarrow C_0(X) \otimes C_0(I) \rightarrow C_0(X) \otimes C_0([0, 1]) \rightarrow C_0(X) \rightarrow 0.$$

L'algèbre $C_0(X) \otimes C_0([0, 1])$ étant contractile de façon \mathcal{G} -équivariante, l'élément ∂_X est inversible.

Lemme A.3.2 (voir [Tho98, preuve du théorème 2.2, p. 12]). Soit A et B deux \mathcal{G} -algèbres et soit α un élément de $KK_{1, \mathcal{G}}(A, B)$ admettant comme représentant un A - B -bimodule de Kasparov \mathcal{G} -équivariant (Ξ, π, T) , où T est un opérateur \mathcal{G} -équivariant de $\mathcal{L}(\Xi)$. Alors, il existe $\alpha' \in KK_{\mathcal{G}}(A \otimes C_0(I), B)$ vérifiant la propriété de décomposition (d) tel que

$$\alpha = \tau_A(\partial_X) \otimes \alpha'.$$

Démonstration. Rappelons que π est une représentation $A \rightarrow \mathcal{L}(\Xi)$ telle que pour tout $a \in A$, le commutateur $[\pi(a), T]$ soit dans $\mathcal{K}(\Xi)$. Quitte à rajouter un A - B -bimodule de Kasparov \mathcal{G} -équivariant dégénéré, on peut supposer que l'idéal engendré par $\{(\xi, \nu); (\xi, \nu) \in \Xi^2\}$ est dense dans B . Posons $P = \frac{1}{2}(\text{Id}_{\Xi} + T)$ et considérons la \mathcal{G} -algèbre

$$\mathcal{A}_P = \{(x, a) \in \mathcal{L}(\Xi) \oplus A \text{ tel que } x - P \cdot \pi(a) \cdot P \in \mathcal{K}(\Xi)\}.$$

La suite exacte courte \mathcal{G} -équivariante

$$0 \rightarrow \mathcal{K}(\Xi) \rightarrow \mathcal{A}_P \rightarrow A \rightarrow 0$$

admet comme section complètement positive \mathcal{G} -équivariante $a \mapsto (P \cdot \pi(a) \cdot P, a)$.

Soit $M \in KK_{\mathcal{G}}(\mathcal{K}(\Xi), B)$ l'élément implémentant la Morita équivalence \mathcal{G} -équivariante entre B et $\mathcal{K}(\Xi)$. D'après [Ska80], le bord de la suite exacte est précisément $\alpha \otimes M$. Soit

$$S = \{(x, f) \in \mathcal{L}(\Xi) \oplus (A \otimes C_0([0, 1])) \text{ tel que } x - P \cdot \pi(f(0)) \cdot P \in \mathcal{K}(\Xi)\},$$

$$\begin{aligned} e : \mathcal{K}(\Xi) &\rightarrow S, \\ x &\mapsto (x, 0) \end{aligned}$$

et

$$j : A \otimes C_0(I) \rightarrow S, \\ f \mapsto (0, f).$$

La suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{K}(\Xi) \rightarrow \mathcal{A}_P \rightarrow A \rightarrow 0$ admettant une section complètement positive et \mathcal{G} -équivariante, l'élément $[e] \in KK_{\mathcal{G}}(\mathcal{K}(\Xi), S)$ induit par e est inversible et d'après [Ska80],

$$\alpha \otimes M = \tau_A(\partial_X) \otimes [j] \otimes [e]^{-1},$$

où $[j]$ est l'élément de $KK_{\mathcal{G}}(A \otimes C_0(I), S)$ induit by j . Le lemme est alors une conséquence du lemme A.3.1. □

Lemme A.3.3.

$$\partial_X \otimes \tau_{C_0(X) \otimes C_0(I)}(\partial_X) \in KK_{\mathcal{G}}(C_0(X), C_0(X) \otimes C_0(I) \otimes C_0(I))$$

vérifie la propriété de décomposition (d).

Démonstration. Soit A et B deux C^* -algèbres séparables. On munit $A \otimes C_0(X)$ et $B \otimes C_0(X)$ de l'action triviale de \mathcal{G} . Le morphisme naturel :

$$KK(A, B) \rightarrow KK_{\mathcal{G}}(A \otimes C_0(X), B \otimes C_0(X))$$

respecte les produits de Kasparov [Kas88]. De plus, $\partial_X \otimes \tau_{C_0(X) \otimes C_0(I)}(\partial_X)$ est l'image par cette application du générateur de Bott de $KK(\mathbb{C}, C_0(\mathbb{R}^2))$. D'après le lemme 1.6.11 de [Laf02] appliqué au groupe trivial, tout élément de $KK(\mathbb{C}, C_0(\mathbb{R}^2))$ vérifie la propriété de décomposition (d). □

Lemme A.3.4. Soit A et B deux \mathcal{G} -algèbres et soit α un élément de $KK_{\mathcal{G}}(A, B)$. Soit $M_1 \in KK_{\mathcal{G}}(\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G})), C_0(X))$ l'élément implémentant la Morita équivalence \mathcal{G} -équivariante entre $C_0(X)$ et $\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}))$. Alors $\tau_A(M_1) \otimes \alpha \in KK_{\mathcal{G}}(\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}, A)), B)$ peut être représenté par un $\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}, A))$ - B -bimodule de Kasparov \mathcal{G} -équivariant dont l'opérateur est \mathcal{G} -équivariant.

La preuve de ce lemme sera donné dans la section suivante.

Fin de la preuve du théorème A.2.2. Soit A et B deux \mathcal{G} -algèbres et soit α un élément de $KK_{\mathcal{G}}(A, B)$. Soit $M_1 \in KK_{\mathcal{G}}(\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G})), C_0(X))$ l'élément implémentant la Morita équivalence \mathcal{G} -équivariante entre $\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}))$ et $C_0(X)$. Alors, d'après le lemme A.3.4, l'élément

$$\tau_{A \otimes C_0(I)}(M_1) \otimes \tau_A(\partial_X^{-1}) \otimes \alpha \in KK_{1, \mathcal{G}}(\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}, A)) \otimes C_0(I), B)$$

peut être représenté par un bimodule de Kasparov (π, Ξ, T) , où T est un opérateur \mathcal{G} -équivariant de $\mathcal{L}(\Xi)$. Or nous savons d'après le lemme A.3.2 qu'il existe un élément α' de $KK_{\mathcal{G}}(\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}, A)) \otimes C_0(I) \otimes C_0(I), B)$ vérifiant la propriété de décomposition (d) tel que

$$\tau_{A \otimes C_0(I)}(M_1) \otimes \tau_A(\partial_X^{-1}) \otimes \alpha = \tau_{\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}, A)) \otimes C_0(I)}(\partial_X) \otimes \alpha'.$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} \tau_A(\partial_X^{-1}) \otimes \alpha &= \tau_{A \otimes C_0(I)}(M_1^{-1}) \otimes \tau_{\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}, A)) \otimes C_0(I)}(\partial_X) \otimes \alpha' \\ &= \tau_{A \otimes C_0(I)}(M_1^{-1} \otimes \tau_{\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}))}(\partial_X)) \otimes \alpha'. \end{aligned}$$

Le produit $M_1^{-1} \otimes \tau_{\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}))}(\partial_X)$ étant extérieur, il est commutatif et donc

$$M_1^{-1} \otimes \tau_{\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}))}(\partial_X) = \partial_X \otimes \tau_{C_0(I)}(M_1^{-1}).$$

On en conclut que

$$\alpha = \tau_A(\partial_X) \otimes \tau_{A \otimes C_0(I)}(\partial_X) \otimes \tau_{A \otimes C_0(I) \otimes C_0(I)}(M_1^{-1}) \otimes \alpha',$$

et comme

$$\tau_A(\partial_X) \otimes \tau_{A \otimes C_0(I)}(\partial_X) = \tau_A(\partial_X \otimes \tau_{C_0(X) \otimes C_0(I)}(\partial_X)),$$

le théorème est alors une conséquence du lemme A.3.3. □

A.4. Preuve du lemme A.3.4

Les notations et les rappels concernant les actions de groupoïdes nécessaire à cette section sont rappelés à la fin du § A.2. Lorsque B est une \mathcal{G} -algèbre, Ξ un B -module et T un élément de $\mathcal{L}(\Xi)$, on désigne pour tout $x \in X$ par T_x la fibre de T en x . Le lemme A.3.4 est alors une conséquence du lemme suivant.

Lemme A.4.1. *Soit B une \mathcal{G} -algèbre, Ξ un B -module de Hilbert à droite muni d'une action de \mathcal{G} et F un élément de $\mathcal{L}(\Xi)$.*

- (1) *Il existe un élément F' de $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \Xi))$ tel que pour tout élément σ de $C_c(\mathcal{G}, \Xi)$, on ait*

$$F' \cdot \sigma \in C_c(\mathcal{G}, \Xi)$$

et

$$(F' \cdot \sigma)(\gamma) = V_\gamma \cdot F_{s(\gamma)} \cdot V_\gamma^{-1} \cdot \sigma(\gamma).$$

En particulier, l'opérateur F' est \mathcal{G} -équivariant.

- (2) *Si (Ξ, π, F) est un A - B -bimodule de Kasparov \mathcal{G} -équivariant, alors*

$$(L^2(\mathcal{G}, \Xi), \pi', F \otimes_{C_0(X)} \text{Id}_{L^2(\mathcal{G})})$$

est équivalent, en tant que $\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}, A))$ - B -bimodule de Kasparov \mathcal{G} -équivariant, à $(L^2(\mathcal{G}, \Xi), \pi', F')$, où π' est la représentation naturelle de $\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}, A))$ sur $L^2(\mathcal{G}, \Xi)$ induite par π .

Ce lemme est un corollaire du lemme suivant.

Lemme A.4.2. Soit B une \mathcal{G} -algèbre et soit Ξ un B -module de Hilbert à droite.

(1) Il existe un morphisme de C^* -algèbres

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(r^*\Xi) &\rightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}, \Xi)), \\ T &\mapsto \tilde{T} \end{aligned}$$

tel que pour tout T appartenant à $\mathcal{L}(r^*\Xi)$ et pour tout σ appartenant à $C_c(\mathcal{G}, \Xi)$, on ait $\tilde{T} \cdot \sigma \in C_c(\mathcal{G}, \Xi)$ et $(\tilde{T} \cdot \sigma)(\gamma) = T_{r(\gamma)} \cdot \sigma(\gamma)$.

(2) Si $T \in \mathcal{K}(r^*\Xi)$, alors pour tout $\Theta \in \mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}))$, on a

$$(\text{Id}_\Xi \otimes_{C_0(X)} \Theta) \cdot \tilde{T} \in \mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}, \Xi)).$$

Démonstration. Si σ est un élément de $C_c(\mathcal{G}, \Xi)$, alors $\sigma' = T \cdot \sigma$ appartient à $C_c(\mathcal{G}, \Xi)$,

$$\begin{aligned} \langle \sigma' \mid \sigma' \rangle(x) &= \int_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \langle T_x \cdot \sigma(\gamma) \mid T_x \cdot \sigma(\gamma) \rangle d\lambda^x(\gamma) \\ &\leq \|T\|^2 \int_{\gamma \in \mathcal{G}^x} \langle \sigma \mid \sigma \rangle(\gamma) d\lambda^x(\gamma) \end{aligned}$$

et donc, $\sigma \mapsto \sigma'$ définit un élément $\tilde{T} \in L^2(\mathcal{G}, \Xi)$. On vérifie aisément que $T \mapsto \tilde{T}$ est un morphisme de C^* -algèbres. Pour montrer le deuxième point du lemme, on peut supposer Θ et T de rang un. Lorsque η_1 et η_2 sont des éléments de Ξ , on note

$$\begin{aligned} \Theta_{\eta_1, \eta_2}^\Xi &: \Xi \rightarrow \Xi, \\ \eta &\mapsto \eta_1 \langle \eta_2 \mid \eta \rangle. \end{aligned}$$

Soit e_1 et e_2 deux éléments de Ξ et soit ϕ_1, ϕ_2, ψ_1 et ψ_2 des éléments de $C_c(\mathcal{G})$. Alors

$$(\text{Id}_\Xi \otimes_{C_0(X)} \Theta_{\psi_1, \psi_2}^{L^2(\mathcal{G})}) \cdot \tilde{\Theta}_{e_1 \otimes_r \phi_1, e_2 \otimes_r \phi_2}^{r^*\Xi} = \Theta_{e_1 \otimes_{C_0(X)} \psi_1, e_2 \otimes_{C_0(X)} \bar{\phi}_1 \phi_2 \psi_2}^{L^2(\mathcal{G}, \Xi)}.$$

□

Fin de la preuve du lemme A.4.1. Soit (Ξ, π, F) un A - B -bimodule de Kasparov \mathcal{G} -équivariant et soit $T = V \cdot (F \otimes_s \text{Id}_{C_0(\mathcal{G})}) \cdot V^{-1} \in \mathcal{L}(r^*\Xi)$. Alors

$$T_{r(\gamma)} = V_\gamma \cdot F_{s(\gamma)} \cdot V_\gamma^{-1}.$$

Posons $F' = \tilde{T}$. D'après le lemme A.4.2,

$$(F' \cdot \sigma)(\gamma) = V_\gamma \cdot F_{s(\gamma)} \cdot V_\gamma^{-1} \cdot \sigma(\gamma),$$

et donc F' est \mathcal{G} -équivariant. Soit Θ un élément de $\mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}))$. Montrons que pour tout $a \in A$, on a

$$(\pi(a) \otimes_{C_0(X)} \Theta) \cdot (F \otimes_{C_0(X)} \text{Id}_{L^2(\mathcal{G})} - F') \in \mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}, \Xi)).$$

On peut supposer que $\Theta = \Theta' \cdot \phi$ où $\Theta' \in \mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}))$ (l'action de $C_c(\mathcal{G})$ sur $L^2(\mathcal{G})$ étant par multiplication ponctuelle). On a

$$\begin{aligned} & (\pi(a) \otimes_{C_0(X)} \Theta) \cdot (F \otimes_{C_0(X)} \text{Id}_{L^2(\mathcal{G})} - F') \\ &= (\text{Id}_{\Xi} \otimes_{C_0(X)} \Theta') \cdot (\pi(a) \otimes_{C_0(X)} \phi) \cdot (F \otimes_{C_0(X)} \text{Id}_{L^2(\mathcal{G})} - F'). \end{aligned}$$

Mais $(\pi(a) \otimes_{C_0(X)} \phi) \cdot (F \otimes_{C_0(X)} \text{Id}_{L^2(\mathcal{G})} - F')$ est l'image de

$$(\pi(a) \otimes_r \phi) \cdot (F \otimes_r \text{Id}_{C_0(\mathcal{G})} - V \cdot F \otimes_s \text{Id}_{C_0(\mathcal{G})} \cdot V^{-1})$$

par le morphisme du lemme A.4.2, et comme (Ξ, π, F) est un A - B -bimodule de Kasparov \mathcal{G} -équivariant, on a

$$(\pi(a) \otimes_r \phi) \cdot (F \otimes_s \text{Id}_{C_0(\mathcal{G})} - V \cdot (F \otimes_s \text{Id}_{C_0(\mathcal{G})}) \cdot V^{-1}) \in \mathcal{K}(r * \Xi).$$

Donc, d'après le lemme A.4.2 (2),

$$(\pi(a) \otimes_{C_0(X)} \Theta) \cdot (F \otimes_{C_0(X)} \text{Id}_{L^2(\mathcal{G})} - F') \in \mathcal{K}(L^2(\mathcal{G}, \Xi))$$

et donc $(L^2(\mathcal{G}, \Xi), \pi', F')$ est un A - B -bimodule de Kasparov \mathcal{G} -équivariant équivalent à $(L^2(\mathcal{G}, \Xi), \pi', F \otimes_{C_0(X)} \text{Id}_{L^2(\mathcal{G})})$. \square

A.5. Application

Nous allons montrer grâce au théorème A.2.2 l'analogie de la proposition 1.6.10 de [Laf02].

Les définitions et notations relatives à la complétion inconditionnelle pour un groupoïde et intervenant dans l'énoncé de la proposition suivante ont été données dans les §§ 1.3 et 1.4.

Proposition A.5.1. *Soit*

- \mathcal{G} un groupoïde localement compact muni d'un système de Haar,
- $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ une complétion inconditionnelle de l'algèbre de convolution $C_c(\mathcal{G})$,
- A, B et C des \mathcal{G} -algèbres,
- $j_{\mathcal{A}}$ le foncteur de descente (voir proposition-définition 1.3.4),
- Σ le foncteur naturel $KK^{\text{ban}}(\cdot, \cdot) \rightarrow \text{Hom}(K(\cdot), K(\cdot))$ (voir [Laf02, proposition 1.2.9]).

Alors pour tous éléments α de $KK_{\mathcal{G}}(A, B)$ et β de $KK_{\mathcal{G}}(B, C)$, on a

$$\Sigma(j_{\mathcal{A}}(\alpha \otimes_B \beta)) = \Sigma(j_{\mathcal{A}}(\alpha)) \circ \Sigma(j_{\mathcal{A}}(\beta)).$$

Démonstration. D'après le théorème A.2.2, il suffit de considérer les éléments α d'une des deux formes de la définition A.2.1.

- (1) Si α est induit par un morphisme, ceci est une conséquence de la functorialité de Σ , $j_{\mathcal{A}}$ et de $KK_{\mathcal{G}}(\cdot, \cdot) \rightarrow KK_{\mathcal{G}}^{\text{ban}}(\cdot, \cdot)$.
- (2) Soit $\theta : B \rightarrow A$ tel que $[\theta] \otimes_A \alpha = 1_B$ et $\alpha \otimes_B [\theta] = 1_A$ où $[\theta] \in KK_{\mathcal{G}}(B, A)$ est induit par le morphisme θ . En écrivant

$$\beta = [\theta] \otimes_A \alpha \otimes_B \beta,$$

on a d'après le raisonnement précédent

$$\Sigma(j_{\mathcal{A}}(\beta)) = \Sigma(j_{\mathcal{A}}([\theta])) \circ \Sigma(j_{\mathcal{A}}(\alpha \otimes_B \beta)).$$

La proposition est alors une conséquence de l'égalité

$$\Sigma(j_{\mathcal{A}}(\alpha)) \circ \Sigma(j_{\mathcal{A}}(\theta)) = \text{Id}_{K(A)},$$

résultant de la functorialité de $j_{\mathcal{A}}$ et de Σ .

□

Remerciements. Je remercie Jean-Benoît Bost et Georges Skandalis pour leur aide et leurs nombreux conseils. Je remercie aussi Walther Paravicini.

Références

- [Bla96] E. BLANCHARD, Déformations de C^* -algèbres de Hopf, *Bull. Soc. Math. France* **124**(1) (1996), 141–215.
- [Bos90] J.-B. BOST, Principe d'Oka, K -théorie et systèmes dynamiques non commutatifs, *Invent. Math.* **101** (1990), 261–333.
- [Bou74] N. BOURBAKI, *Topologie générale* (Hermann, Paris, 1974).
- [BS89] S. BAAJ ET G. SKANDALIS, C^* -algèbres de Hopf et théorie de Kasparov équivariante, *K-Theory* **2**(6) (1989), 683–721.
- [Dix64] J. DIXMIER, *Les C^* -algèbres et leurs représentations* (Gauthiers-Villars, Paris, 1964).
- [Gal94] P.-Y. LE GALL, Théorie de Kasparov équivariante et groupoïdes, Thèse de Doctorat, Université Paris 7 (1994).
- [Gal97] P.-Y. LE GALL, Théorie de Kasparov équivariante et groupoïdes, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **324**(6) (1997), 695–698.
- [Gal99] P.-Y. LE GALL, Théorie de Kasparov équivariante et groupoïdes, I, *K-Theory* **16**(4) (1999), 361–390.
- [Kas88] G. KASPAROV, Equivariant KK -theory and the Novikov conjecture, *Invent. Math.* **91** (1988), 147–201.
- [KS94] G. KASPAROV ET G. SKANDALIS, Groupes boliques et conjecture de Novikov, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **319**(4) (1994), 815–820.
- [KS03] G. KASPAROV ET G. SKANDALIS, Groups acting properly on 'bolic' spaces and the Novikov conjecture, *Ann. Math. (2)* **158**(1) (2003), 165–206.
- [Laf02] V. LAFFORGUE, K -théorie bivariable pour les algèbres de Banach et conjecture de Baum–Connes, *Invent. Math.* **149**(1) (2002), 1–95.
- [Mey00] R. MEYER, Equivariant Kasparov theory and generalized homomorphisms, *K-Theory* **21**(3) (2000), 201–228.
- [MRW87] P. MUHLY, J. RENAULT ET D. WILLIAMS, Equivalence and isomorphism for groupoid C^* -algebras, *J. Operat. Theory* **17** (1987), 3–22.

- [Ren80] J. RENAULT, *A groupoid approach to C^* -algebras*, Springer Lecture Notes in Mathematics, Volume 793 (Springer, 1980).
- [Ska80] G. SKANDALIS, Exact sequences for the Kasparov groups of graded algebras, *Can. J. Math.* **37**(2) (1980), 324–343.
- [Tho98] K. THOMSEN, The universal property of equivariant KK -theory, *J. Reine Angew. Math.* **504** (1998), 55–71.
- [Tho99] K. THOMSEN, Asymptotic homomorphisms and equivariant KK -theory, *J. Funct. Analysis* **163**(2) (1999), 324–343.
- [Tu99] J.-L. TU, La conjecture de Novikov pour les feuilletages hyperboliques, *K-Theory* **16**(2) (1999), 129–184.

