

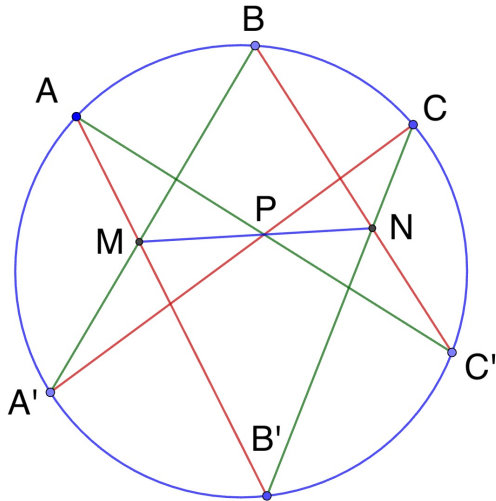
Le théorème de Pascal sur les coniques

Version écrite

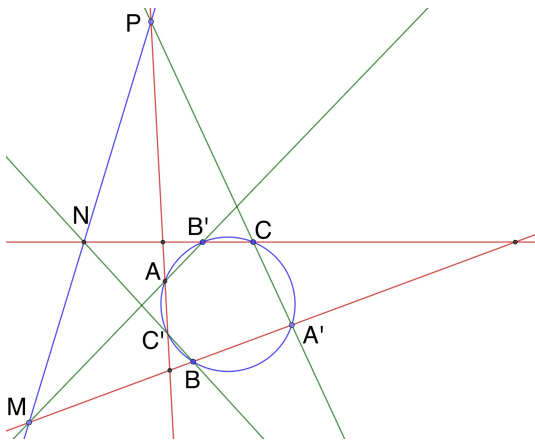
Vincent Lafforgue

membre de l'Académie des Sciences,
CNRS et Université Paris Cité

Paris, 19 mars 2024



Enoncé du théorème de Pascal : quels que soient A, B, C, A', B', C' sur une conique (en particulier sur un cercle) les points d'intersection M, N, P sont alignés. Desargues appelle ce théorème "la Pascale". La réciproque est vraie : si M, N, P sont alignés, A, B, C, A', B', C' sont inscrits dans une conique (éventuellement dégénérée en deux droites).



Une autre façon d'énoncer le théorème de Pascal : un "hexagramme" (la donnée de six droites, les trois droites rouges et les trois droites vertes) est "mystique" (i.e. M, N, P sont alignés) si et seulement s'il est "conique" (i.e. l'hexagone $AB'CA'BC'$ formé par les six droites est inscrit dans une conique). On note que M, N, P sont les intersections des paires de côtés opposés de cet hexagone.

Pour Pascal l'hexagramme mystique est la notion cachée qui permet de retrouver toutes les propriétés des coniques (ce qu'il faisait dans son traité perdu).

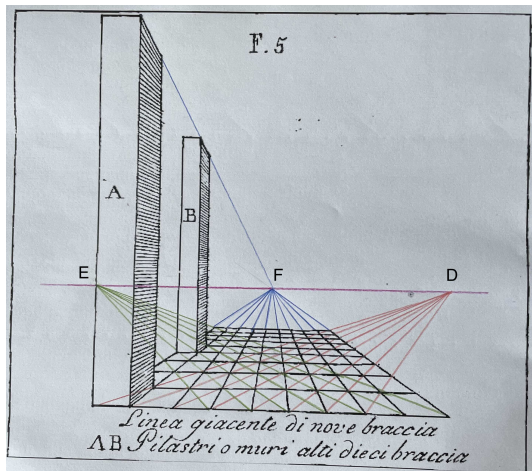
Pascal a trouvé ce théorème "avant d'avoir atteint l'âge de 16 ans". Il a donné l'énoncé sans preuves dans un court "Essay sur les coniques". Plus tard il a écrit un traité sur les coniques, malheureusement perdu. Il nous reste seulement quelques commentaires de ceux qui l'ont lu (dont Leibniz). Dans son essai il énonce son théorème pour les cercles puis le déduit en général pour les coniques, par un argument projectif. On peut résumer le travail de Pascal en disant qu'il a développé la théorie des coniques (qui existait depuis les grecs, 300 avant JC) dans le cadre de la géométrie projective.

Nous allons commencer par rappeler la géométrie projective de façon non historique : la perspective des peintres de la renaissance, certains résultats des grecs, puis les idées de Desargues, qui a beaucoup influencé Pascal.

Cette gravure de Dürer montre comment peindre en perspective : on peint sur un tableau transparent ce que l'on voit derrière. Le peintre regarde avec un seul oeil, qui doit rester à la même place.



Brunelleschi (architecte de la cathédrale de Florence) et son élève Alberti formalisent les règles. Voici un dessin d'un livre d'Alberti (1435) représentant un dallage horizontal et deux piliers verticaux.

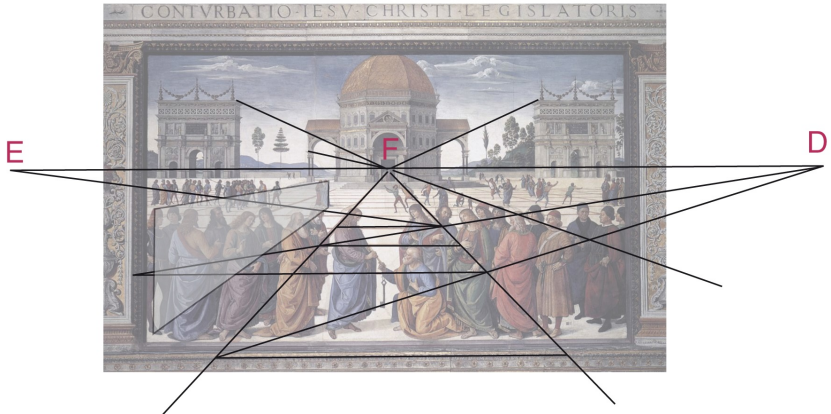


Pour que le dallage représenté soit carré, l'oeil du spectateur doit être face au point de fuite F (perpendiculairement au plan du tableau), à une distance de F égale à $FD = FE$. Cette règle donne la bonne position de l'oeil pour voir de nombreux tableaux de la renaissance.

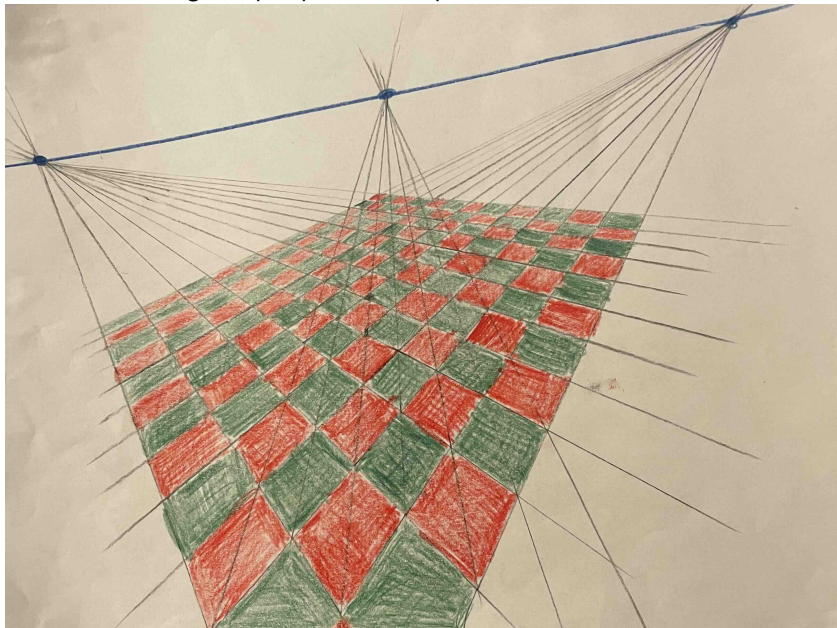
En général la règle pour trouver la bonne position de l'oeil est que l'on doit voir les points de fuite avec les mêmes angles qu'ils ont dans la réalité.

Tableau du Pérugin (Remise des clefs à Saint Pierre, 1482).

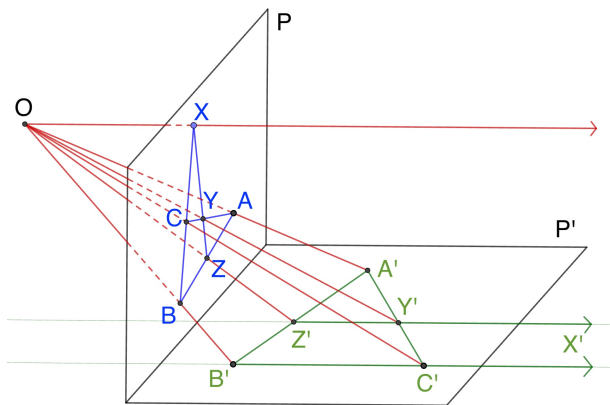


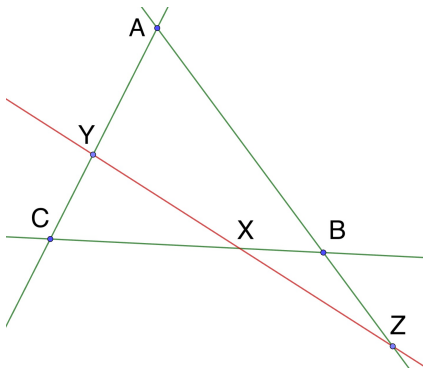


Et voici un dallage en perspective oblique.



Si l'on peint le même paysage sur deux tableaux se situant sur deux plans différents, les tableaux sont reliés par une homographie ou transformation projective. L'homographie de centre O envoie le plan P sur le plan P' , A sur A' , ..., et X sur le point à l'infini X' dans P' (dans le dessin $B'C'$ et $Y'Z'$ sont des droites parallèles du plan P' se coupant au point à l'infini X' et la droite OX est parallèle à $B'C'$ et $Y'Z'$). La figure du théorème de Thalès est dessinée dans le plan P' . Sa version projective est le théorème de Ménélaüs d'Alexandrie (100 après JC) dont la figure est dessinée dans le plan P .





Le théorème de Ménélaüs (qui se déduit facilement de Thalès) affirme que dans le dessin on a

$$\frac{\overline{XC}}{\overline{XB}} \frac{\overline{YA}}{\overline{YC}} \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZA}} = 1$$

En général une telle formule est "projective" si chaque lettre apparaît le même nombre de fois en haut et en bas.

Quand X est à l'infini, $\frac{\overline{XC}}{\overline{XB}} = 1$, YZ est parallèle à BC et on retrouve comme cas particulier le théorème de Thalès $\frac{\overline{YA}}{\overline{YC}} = \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}}$.

On appelle homographie d'un plan dans un autre une transformation comme ci-dessus, ou une composée de telles transformations.

Les homographies, d'un plan dans un autre, envoient les droites sur les droites (et sont caractérisées par cela).

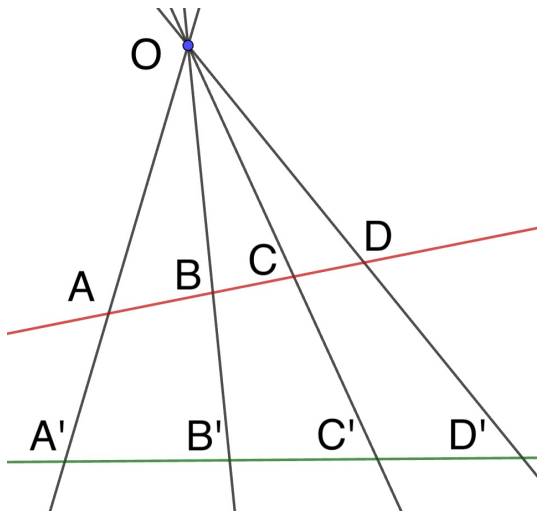
Pappus d'Alexandrie (vers 300 après JC) découvrit (en langage moderne) que les homographies, d'une droite dans une autre, préservent les birapports (et elles sont caractérisées par cela).

On définit le birapport de 4 points A, B, C, D sur une droite par

$$[A, B, C, D] = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}.$$

Autrement dit $[A, B, C, D]$ est le quotient du rapport $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$ par le rapport $\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$ (Pascal dirait "raison composée des raisons").

Si on a une coordonnée sur la droite et $A = \infty$, $B = 0$, $C = 1$ alors $[A, B, C, D]$ est la coordonnée de D .

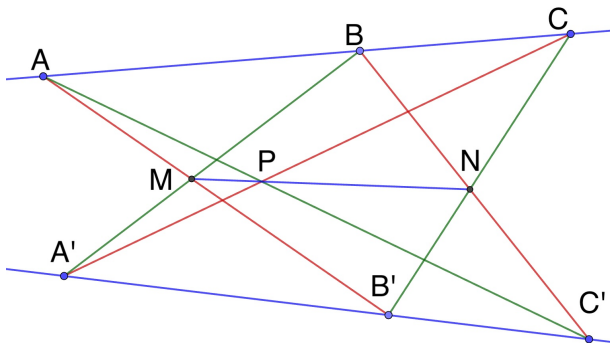


Dans le dessin l'homographie de centre O , de la droite rouge vers la droite verte, envoie A sur A' , B sur B' , C sur C' , D sur D' .

Pappus montre (à l'aide de points auxiliaires et du théorème de Thalès) que $[A, B, C, D] = [A', B', C', D']$.

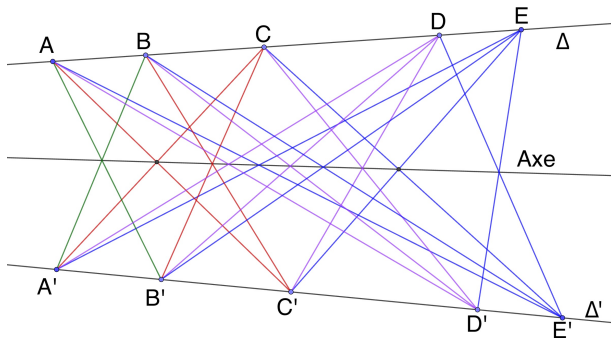
Cela résulte aussi de Ménélaüs (on peut supposer $D = D'$, on applique alors Ménélaüs aux sécantes AA' et BB' du triangle $CC'D$). L'énoncé apparaît dans l'essai de Pascal.

En général une homographie d'une droite dans une autre est caractérisée par les images de trois points A, B, C , l'image d'un point variable D se déduit de la préservation du birapport $[A, B, C, D]$.



Pappus est surtout célèbre pour le théorème ci-contre, qui est le cas particulier du théorème de Pascal où la conique dégénère en deux droites. Le théorème de Pappus dit que si A, B, C et A', B', C' sont des points arbitraires sur deux droites, alors M, N, P sont alignés. La figure est en fait symétrique en les 9 points.

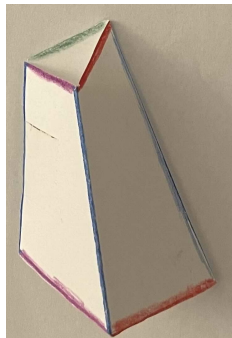
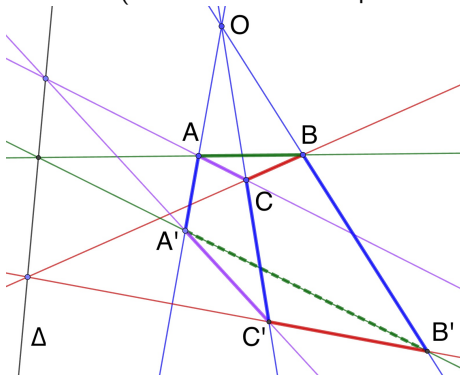
Pappus donne une preuve à l'aide de birapports.

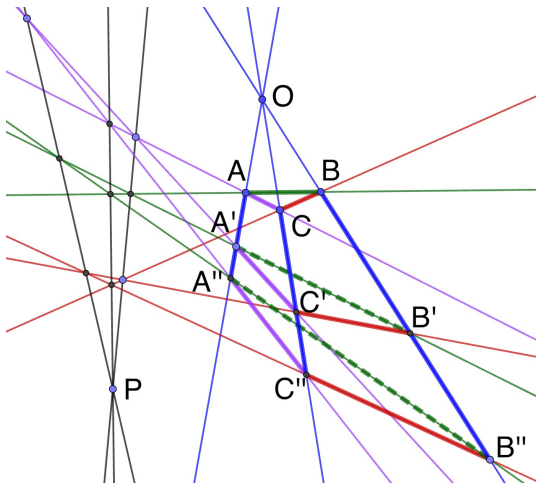


Le théorème de Pappus montre que, quels que soient A, B, C sur Δ et A', B', C' sur Δ' l'unique homographie de la droite Δ vers la droite Δ' , qui envoie A sur A' , B sur B' , C sur C' possède un **axe d'homographie**.

C'est la droite qui a la propriété que pour tous points X, Y sur Δ , d'images X', Y' sur Δ' par cette homographie, les droites XY' et $X'Y$ se coupent sur l'axe. Cette homographie de Δ vers Δ' est égale à la composée de l'homographie centrale de centre A' de Δ vers l'axe et de l'homographie centrale de centre A de l'axe vers Δ' .

Desargues développa la géométrie projective (avec la notion de point à l'infini). Il trouva en particulier le théorème ci-dessous, qui est évident si on le voit dans l'espace. L'énoncé est l'alignement des trois points d'intersection des côtés de même couleur des triangles ABC et $A'B'C'$ sur une droite Δ si (et seulement si) les droites bleues AA' , BB' , CC' sont concourantes en un point O . Desargues dit alors que les deux triangles sont perspectifs, O est le centre de perspective et Δ l'axe de perspective. Dans l'espace Δ est l'intersection des plans des deux triangles ABC et $A'B'C'$ (faces inférieure et supérieure du prisme triangulaire).



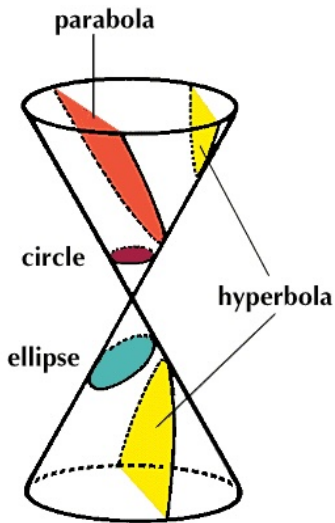


On a un raffinement du théorème de Desargues : si trois triangles ABC , $A'B'C'$ et $A''B''C''$ ont un centre de perspective commun O , les trois droites axes de perspectives (de ABC et $A'B'C'$, de ABC et $A''B''C''$, de $A'B'C'$ et $A''B''C''$) sont concourantes en un point P . Si on voit la figure dans l'espace ce point P est simplement l'intersection des trois plans ABC , $A'B'C'$ et $A''B''C''$.

En fait le théorème de Desargues concerne la figure obtenue en projetant sur un plan les intersections de 5 plans dans l'espace (O est l'intersection de 3 d'entre eux et Δ l'intersection des deux autres). Son raffinement concerne la figure obtenue en projetant sur un plan les intersections de 6 plans dans l'espace (O est l'intersection de 3 d'entre eux et P l'intersection des 3 autres).

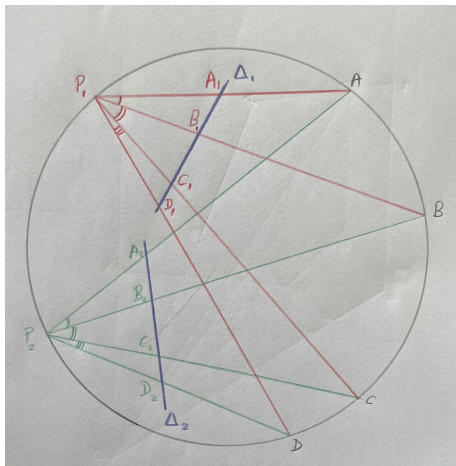
Dans les figures du théorème de Desargues et de son raffinement tous les points jouent le même rôle, mais c'est en choisissant le point O , intersection de 3 des 5 ou 6 plans, que l'énoncé prend son sens.

Le théorème de Desargues est autodual (son dual, i.e. l'énoncé obtenu en échangeant droites et points, est sa réciproque), le raffinement est symétrique entre O et P .



Ménechme (autour de 350 avant JC) définit les coniques comme sections d'un cône par un plan. Les coniques furent étudiées par Euclide, Archimède, puis Apollonios (autour de 200 avant JC) et Pappus (autour de 300 après JC). Elles peuvent être un cercle, une ellipse (que Pascal appelle antobole), une hyperbole, une parabole, ou bien dégénérées en deux droites, ou en une droite double. Dans le langage précédent les coniques non dégénérées sont les images d'un cercle par une homographie (d'un plan dans un autre). Pascal explique que les deux points à l'infini de l'hyperbole et le point à l'infini de la parabole sont les images de points du cercle par une telle homographie.

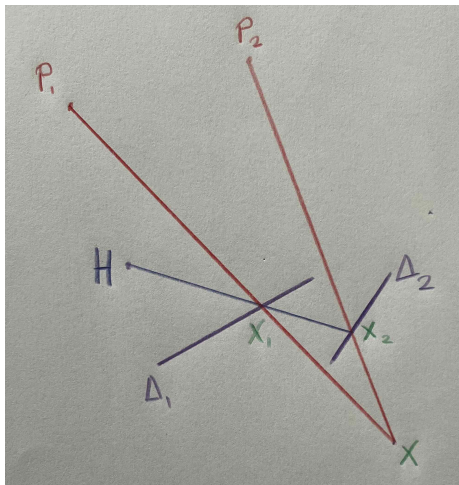
Un énoncé dans l'essai de Pascal exprime que les birapports obtenus à partir de 4 points A, B, C, D d'une conique en traçant des droites depuis un point arbitraire P de la conique ne dépendent pas de P . Comme c'est un énoncé projectif il suffit de le montrer pour un cercle, où il résulte des égalités d'angles inscrits.



On sait par Pappus que $[A_1, B_1, C_1, D_1]$ ne dépend pas de la droite Δ_1 et que $[A_2, B_2, C_2, D_2]$ ne dépend pas de la droite Δ_2 . On peut choisir Δ_2 pour que P_2, A_2, B_2, C_2, D_2 se déduisent de P_1, A_1, B_1, C_1, D_1 par rotation, donc

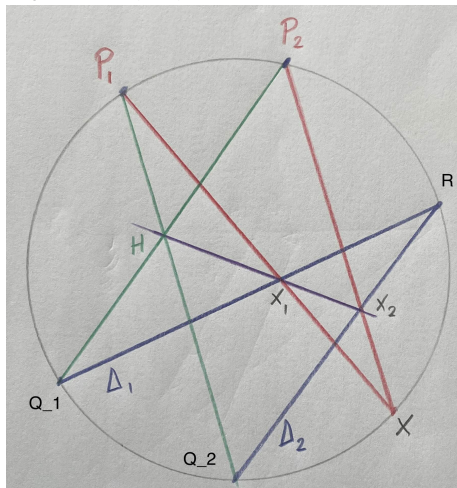
$$[A_1, B_1, C_1, D_1] = [A_2, B_2, C_2, D_2].$$

On peut donc définir le birapport de 4 points sur une conique. On définit une homographie entre une conique et une droite, ou entre deux coniques comme une transformation préservant les birapports.



Inversement, si on se donne deux points P_1, P_2 , deux droites Δ_1, Δ_2 et une homographie de Δ_1 vers Δ_2 (par exemple une homographie de centre H comme sur la figure) qui envoie X_1 point variable de Δ_1 vers X_2 point variable de Δ_2 , le point X intersection des droites P_1X_1 et P_2X_2 parcourt une conique.

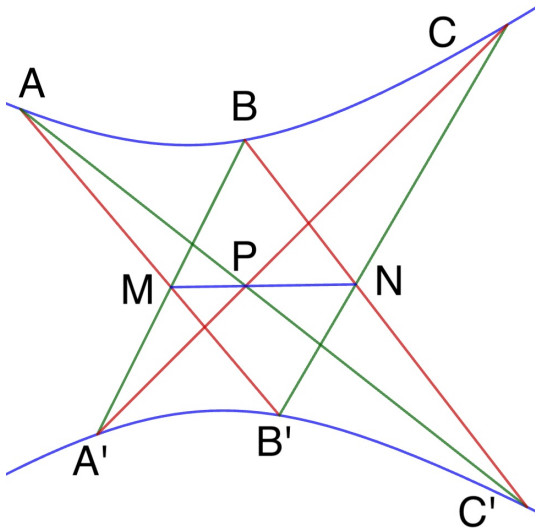
On peut compléter la figure et on trouve que cette conique passe par les points P_1, P_2 , et aussi $Q_1 = P_2H \cap \Delta_1$, $Q_2 = P_1H \cap \Delta_2$ et $R = \Delta_1 \cap \Delta_2$.



En effet quand X_1 variable est égal à Q_1 , $X = Q_1$, quand X_2 variable est égal à Q_2 , $X = Q_2$, quand $X_1 = R$, $X = R$.

Cette figure est le théorème de Pascal, qui peut se montrer aussi de façon plus pédestre avec des égalités de birapports (en adaptant la preuve de Pappus).

Elle fournit aussi la construction d'un point variable X de l'unique conique passant par 5 points P_1, P_2, Q_1, Q_2, R .



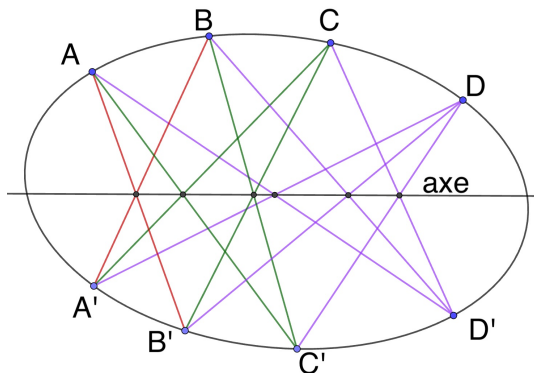
Rappel de l'énoncé du théorème de Pascal : quels que soient A, B, C, A', B', C' sur une conique les points d'intersection M, N, P sont alignés.

Dans son essai, Pascal l'énonce d'abord pour un cercle, puis dit que comme l'énoncé est projectif, il est vrai pour toute conique.

Le théorème de Pascal implique que toute homographie d'une conique dans elle-même admet un axe d'homographie.

On fixe A, B, C, A', B', C' distincts sur une conique.

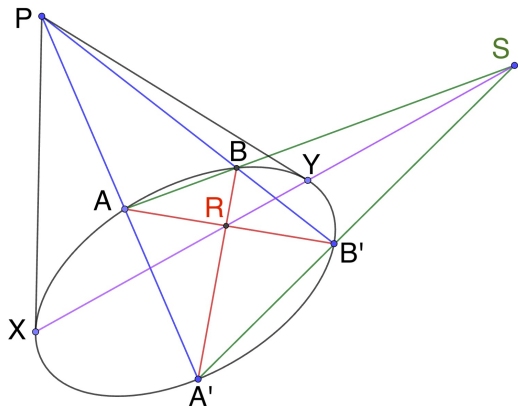
Il existe une unique homographie de la conique dans elle-même qui envoie A dans A' , B dans B' , C dans C' .



Elle a alors un axe qui a la propriété que pour tous X, Y sur la conique d'images X', Y' par cette homographie XY' et $X'Y$ se coupent sur l'axe. L'axe d'homographie coupe la conique en les points fixes de l'homographie.

Cette homographie est la composée de l'homographie centrale de la conique vers l'axe de centre A' et de l'homographie centrale de l'axe vers la conique de centre A .

L'historien René Taton pense que le traité sur les coniques de Pascal (perdu) contenait les droites polaires. Soit P en dehors d'une conique. On considère l'homographie involutive (égale à son inverse) qui à A sur la conique associe A' où la droite PA recoupe la conique.



Dans la figure elle envoie A sur A' , B sur B' , donc son axe passe par R et S , mais aussi par ses points fixes X et Y qui sont les points de contact des tangentes depuis P . Cela fournit une construction à la règle des tangentes à une conique menées depuis un point en dehors de la conique : on choisit A et B arbitraires, on en déduit A', B' puis R, S puis X, Y . La droite RS est appelée la droite polaire de P par rapport à la conique.

Une preuve totalement différente du théorème de Pascal est donnée par les cubiques (Chasles, 19ème siècle). Soient x, y des coordonnées cartésiennes du plan.

Une conique est donnée par une équation

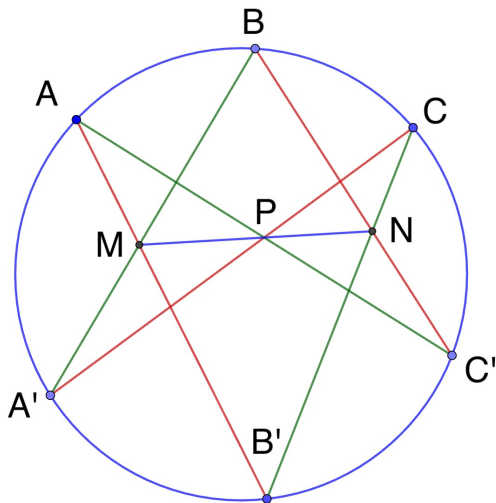
$$a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 = 0$$

donc il y a en tout 6 paramètres a, b, c, d, e, f (bien déterminés à proportionnalité près) c'est pourquoi il existe une unique conique passant par 5 points.

Une cubique est donnée par une équation

$$a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + gx^3 + hx^2y + kxy^2 + ly^3 = 0$$

donc il y a en tout 10 paramètres $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l$ (bien déterminés à proportionnalité près). Donc les cubiques passant par 8 points du plan (en position assez générique) forment un faisceau : leurs équations sont de la forme $\lambda P + \mu Q = 0$ avec λ, μ variables. Donc elles passent toutes par les points d'intersection des cubiques $P = 0$ et $Q = 0$ qui sont au nombre de 9 par un théorème de Bézout. D'où le théorème de Chasles : des cubiques qui passent par 8 points passent par 9 !

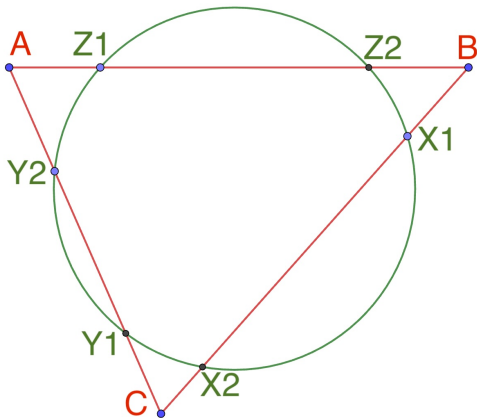


Voici la preuve du théorème de Pascal par les cubiques (comme cas particulier de ce théorème de Chasles). On a trois cubiques : la réunion des trois droites rouges, la réunion des trois droites vertes, la réunion du cercle et de la droite MN . Elles passent par 8 points $A, B, C, A', B', C', M, N$ donc sont dans un même faisceau donc la troisième cubique passe par P (qui est sur les deux premières), donc P est sur la droite MN .

On n'a pas eu besoin de Bézout, qui est évident pour les cubiques rouge et verte qui sont réunions de trois droites.

Une variante plus élémentaire de cette preuve par les cubiques repose sur le résultat suivant. Si une conique coupe les côtés d'un triangle comme sur la figure, on a

$$\frac{\overline{X_1C} \overline{X_2C} \overline{Y_1A} \overline{Y_2A} \overline{Z_1B} \overline{Z_2B}}{\overline{X_1B} \overline{X_2B} \overline{Y_1C} \overline{Y_2C} \overline{Z_1A} \overline{Z_2A}} = 1$$



Cet énoncé apparaît dans l'essai de Pascal. Il est évident pour un cercle (utiliser les puissances de A, B, C par rapport au cercle : on a $\overline{Y_1A} \cdot \overline{Y_2A} = \overline{Z_1A} \cdot \overline{Z_2A}$, ...). Comme l'énoncé est projectif (car chaque point apparaît le même nombre de fois dans le numérateur et le dénominateur) il est donc vrai pour toute conique.

Un théorème de Lazare Carnot (l'organisateur de la Victoire) dit que pour tout triangle ABC et pour toute courbe algébrique de degré n qui coupe AB en $Z_1, \dots, Z_n$, BC en $X_1, \dots, X_n$, CA en $Y_1, \dots, Y_n$ on a

$$\frac{\prod_{i=1}^n \overline{X_i C}}{\prod_{i=1}^n \overline{X_i B}} \frac{\prod_{i=1}^n \overline{Y_i A}}{\prod_{i=1}^n \overline{Y_i C}} \frac{\prod_{i=1}^n \overline{Z_i B}}{\prod_{i=1}^n \overline{Z_i A}} = 1$$

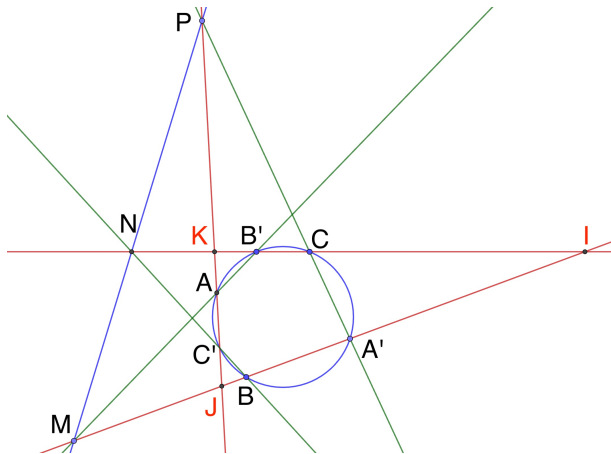
Pour $n = 1$ c'est Ménélaüs, pour $n = 2$ c'est le résultat de la page précédente (qui est dans l'essai de Pascal). Le cas des cubiques ($n = 3$) se déduit des cas $n = 1, 2$ pour les cubiques qui sont la réunion de trois droites, ou d'une droite et d'une conique.

Le théorème de Lazare Carnot pour les cubiques implique un cas particulier du théorème de Chasles :

Lemme triangle-cubiques : les 9 points d'intersection d'une cubique avec les côtés d'un triangle ABC sont déterminés par 8 d'entre eux.

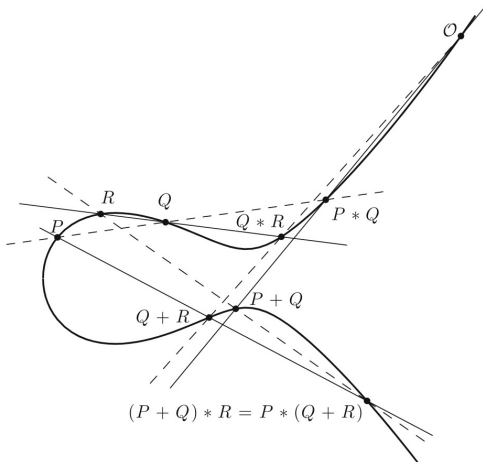
Pour les cubiques qui sont réunion de trois droites, ou d'une droite et d'une conique, ce lemme est donc une conséquence facile de l'essai de Pascal.

Voici maintenant une preuve élémentaire du théorème de Pascal (dont tous les ingrédients figurent dans l'essai de Pascal).

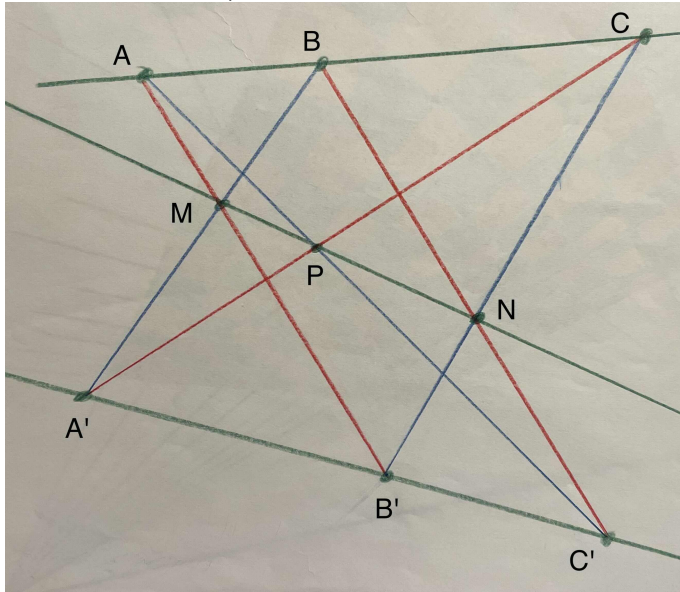


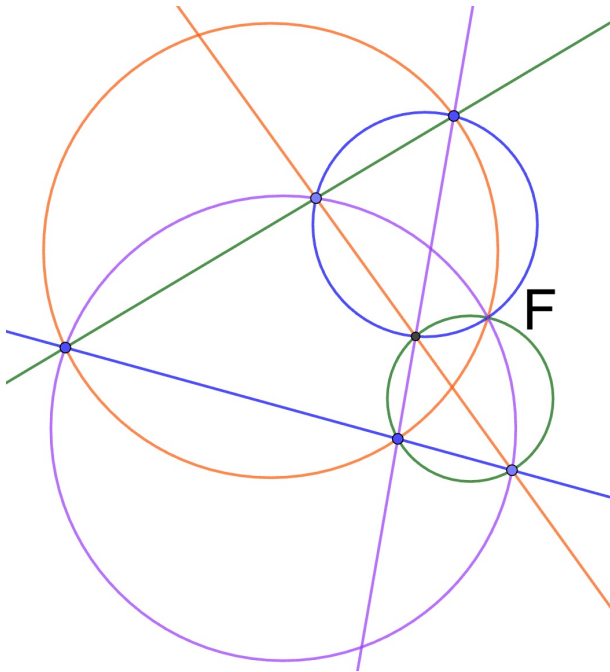
On applique le lemme triangle-cubiques au triangle rouge IKJ , à la cubique réunion des droites vertes, et à la cubique réunion du cercle et de MN . Ces deux cubiques coupent les côtés du triangle rouge IKJ en 9 points, dont P qui est donc déterminé par les 8 autres.

Une conséquence ultérieure mais très importante du théorème de Chasles est la preuve de l'associativité de la loi de groupe sur les cubiques (vues comme courbes elliptiques). Dans la figure $\mathcal{O}$ est l'origine (point d'inflexion) et $P * Q$ est a posteriori $-P - Q$.

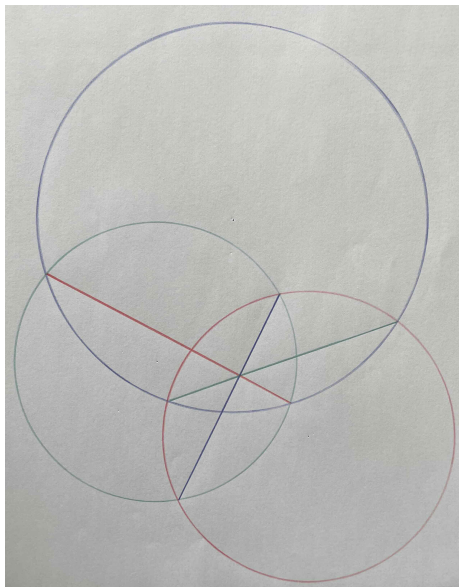


Dans les quatre dessins suivants les cubiques réunion de droites ou cercles d'une même couleur sont dans un même faisceau de cubiques passant par 8 points donc par 9. Le premier dessin est bien sûr Pappus (cas particulier de Pascal), où l'on comprend maintenant le choix des couleurs.

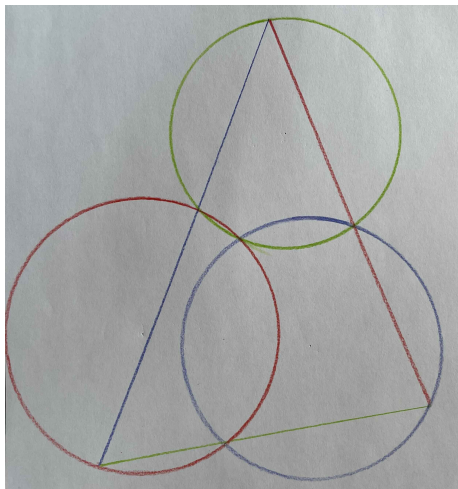




Le théorème de Miquel dit que quelles que soient les 4 droites, les 4 cercles circonscrits passent par un point F . Il a une preuve simple par les angles inscrits. Le point F est aussi le foyer de la parabole tangente aux 4 droites. Dans ce dessin et les deux suivants, les cubiques passent par les points cycliques (points à l'infini associés à i et $-i$ par où passent tous les cercles).



Si trois cercles se coupent, les trois cordes joignant leurs points d'intersection sont concourantes. Il y a une preuve très simple par les puissances.

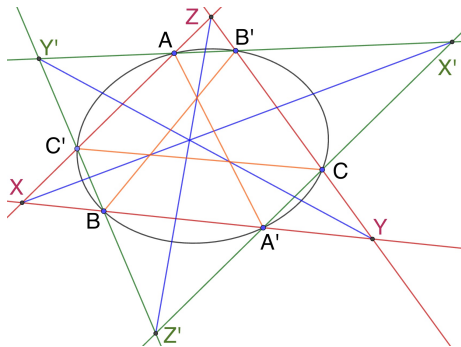


Si on choisit un point sur chaque côté d'un triangle, et pour chaque sommet on trace le cercle passant par ce sommet et les deux points choisis sur les côtés issus de ce sommet, les trois cercles passent par un point commun. Il y a une preuve très simple par les angles inscrits.

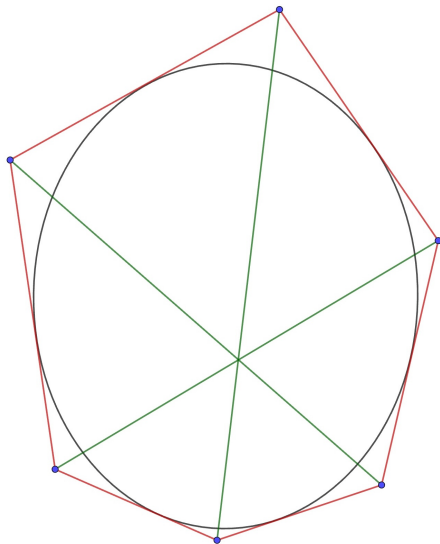
Etant donnés 6 points sur une conique, il y a 60 façons de les ordonner pour en faire un hexagone inscrit. Les 60 droites de Pascal ainsi obtenues ont de nombreuses propriétés trouvées au 19ème (par Steiner, Plücker, Kirkman, Cayley, Salmon) : elles sont concourantes en certains points, qui sont eux-mêmes sur certaines droites, passant par certains points. En tout cela fait 95 points et 95 droites...

Conway et Ryba montrent que ces propriétés se déduisent du théorème de Desargues et de son raffinement avec trois triangles.

Voici un cas particulier des propriétés précédentes : quels que soient 6 points A, B', C, A', B, C sur une conique, les droites XX', YY', ZZ' font partie des 60 droites de Pascal associées aux 6 points et sont concourantes en un "point de Steiner".



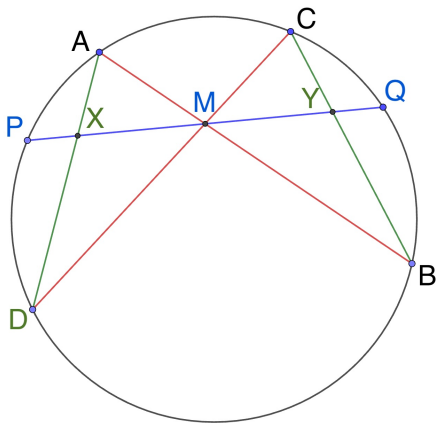
En effet les points d'intersection des droites XY et $X'Y'$, YZ et $Y'Z'$, et ZX et $Z'X'$ sont alignés (par le théorème de Pascal pour l'hexagone $AB'CA'BC'$) donc les triangles rouge XYZ et vert $X'Y'Z'$ sont perspectifs (par le sens réciproque de Desargues), donc les droites bleues XX', YY', ZZ' sont concourantes. De même les petits triangles opposés ZAB' et $Z'A'B$ sont perspectifs, donc ZZ', AA', BB' sont concourantes (mais cela découle aussi du théorème de Pascal car ZZ' est la droite de Pascal pour l'hexagone $AC'BB'CA'$).



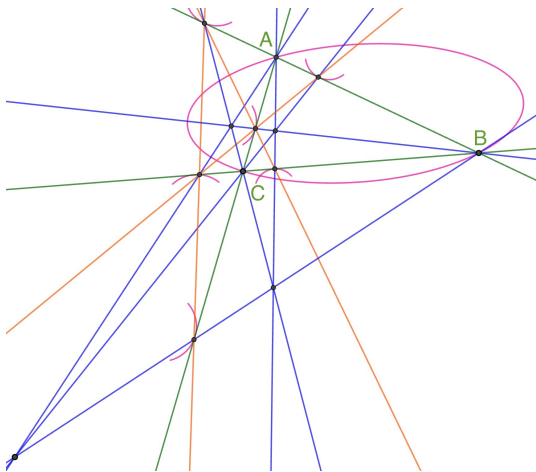
Le théorème dual du théorème de Pascal est obtenu en échangeant droites et points : les 6 points sur la conique sont remplacés par 6 droites tangentes. C'est le théorème de Brianchon : les diagonales d'un hexagone circonscrit à une conique sont concourantes.

La fin de l'essai de Pascal mentionne un autre résultat de Desargues. Si on se donne un faisceau de coniques (toutes les coniques passant par 4 points fixes) et une droite Δ , et si les coniques du faisceau coupent Δ en des paires de points $\{X, X'\}$ alors $X \mapsto X'$ est une homographie involutive de Δ . Cela implique le joli théorème du papillon

(habituellement énoncé pour un cercle mais vrai pour toute conique) :

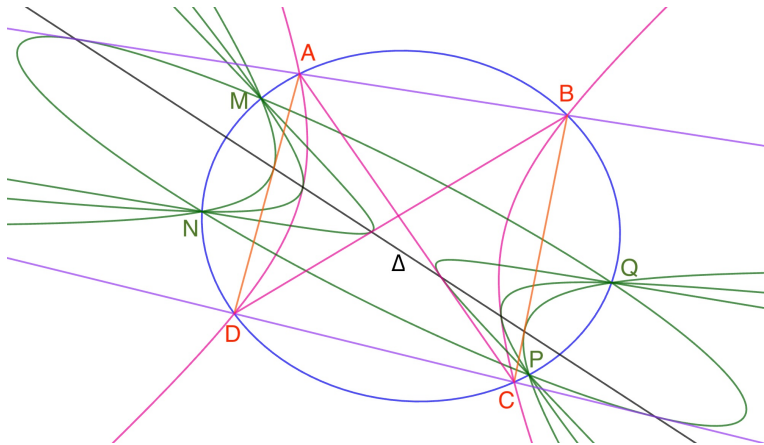


si M milieu de PQ , alors M milieu de XY . En effet le faisceau des coniques passant par A, B, C, D contient la conique et les coniques dégénérées rouge et verte, donc détermine une homographie involutive de la droite PQ qui fixe M , envoie P sur Q et X sur Y . Si M milieu de PQ , cette homographie est la symétrie par rapport à M , donc M milieu de XY .

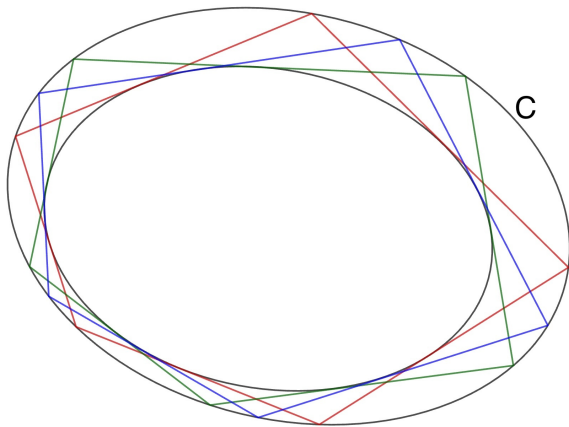


Ce résultat de Desargues (joint au théorème de Carnot pour les coniques, qui figure dans l'essai de Pascal) implique aussi que si A, B, C appartiennent à une conique dans un faisceau de coniques, les points de contacts des coniques de ce faisceau tangentes aux côtés du triangle ABC forment la configuration sur la figure (alignements sur les droites oranges et droites bleues concourantes).

Dans cette figure les deux faisceaux de coniques passant par A, B, C, D , resp. M, N, P, Q ont une conique en commun et ont la même restriction sur la droite Δ épaissie à l'ordre 2 (toute conique d'un faisceau est tangente à une conique de l'autre en deux points de Δ). On a cette figure dès que A, B, C, D, M, N, P, Q sont sur une conique et que les droites AD et BC sont tangentes à une conique passant par M, N, P, Q .



Les deux figures précédentes sont utilisées dans la preuve du grand théorème de Poncelet (1822) donnée dans le livre de géométrie de Marcel Berger. Le grand théorème de Poncelet affirme que si un polygône est inscrit dans une conique C et circonscrit à une autre conique alors il y a une infinité de tels polygones, et tout point de C est sommet d'un tel polygône. La preuve utilise des coniques du faisceau engendré par ces deux coniques.



Quelques références :

L' "Essay pour les Coniques" de Pascal, par René Taton (1955)

L'œuvre de Pascal en géométrie projective par René Taton (1962)

Traduction française de notes de Leibniz sur les "Coniques" de Pascal,
par Pierre Costabel (1962)

The Pascal Mysticism Demystified par John Conway and Alex Ryba

Geometry Revisited par Coxeter et Greitzer

Géométrie par Marcel Berger

Algèbre et géométries par Pascal Boyer