

# Un analogue non archimédien d'un résultat de Haagerup et lien avec la propriété (T) renforcée

Vincent Lafforgue\*

26 juillet 2010

Pour tout groupe localement compact  $G$  on note  $A(G)$  l'algèbre de Fourier de  $G$ , c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de la forme

$$\phi_{h,h'} : g \mapsto \langle \lambda(g)h, h' \rangle, h, h' \in L^2(G)$$

où  $\lambda$  est la représentation régulière gauche. On munit  $A(G)$  du produit point par point et de la norme

$$\|f\|_{A(G)} = \inf\{\|h\|_{L^2(G)}\|h'\|_{L^2(G)}, f = \phi_{h,h'}\}.$$

On note  $MA(G) \subset C(G)$  l'espace des multiplicateurs de  $A(G)$ , muni de la norme

$$\begin{aligned} \|f\|_{MA(G)} &= \sup\{\|fh\|_{A(G)}, \|h\|_{A(G)} \leq 1\} \\ &= \sup\{\|\text{Schur}_f(h)\|_{C_{\text{red}}^*(G)}, \|h\|_{C_{\text{red}}^*(G)} \leq 1\} \end{aligned}$$

où  $\text{Schur}_f(h)$  est  $g \mapsto f(g)h(g)$  (dans  $C_{\text{red}}^*(G)$  le produit est la convolution, c'est pourquoi on note le produit point par point  $\text{Schur}_f(h)$  au lieu de  $fh$ ).

Enfin on note  $M_0A(G) \subset C(G)$  l'espace des multiplicateurs complètement bornés de  $A(G)$ , muni de la norme

$$\|f\|_{M_0A(G)} = \sup_{B \text{ une } G\text{-}C^*\text{-algèbre}} \{\|\text{Schur}_f(h)\|_{C_{\text{red}}^*(G,B)}, \|h\|_{C_{\text{red}}^*(G,B)} \leq 1\}.$$

---

\*Institut de mathématiques de Jussieu, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris ; avec le soutien du projet ANR JC08-318197 QuantiT

Dans la suite on sera toujours dans le cadre suivant :  $F$  sera un corps local (qui sera  $\mathbb{R}$  ou bien un corps local non archimédien, c'est-à-dire une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$  ou de  $\mathbb{F}_p((T))$ ),  $G$  sera égal à  $SL_3(F)$  ou  $Sp_4(F)$ ,  $K$  sera un sous-groupe compact maximal de  $G$ ,  $B$  sera un sous-groupe de Borel de  $G$  et  $N$  le radical unipotent de  $B$  (par exemple pour  $SL_3$ ,  $B$  sera le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures et  $N$  le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes). Dans toute la suite on fera l'hypothèse

**(H)** : si  $F$  est non archimédien et  $G = Sp_4(F)$ , la caractéristique résiduelle  $p$  de  $F$  est impaire.

Comme  $B$  est moyennable les normes  $\|\cdot\|_{M_0A(B)}$ ,  $\|\cdot\|_{MA(B)}$  et  $\|\cdot\|_{A(B)}$  sur  $C_c(B)$  sont égales, et il en va de même pour  $N$ . Pour toute fonction  $K$ -biinvariante  $f \in C_c(G)$ , on a

$$\|f\|_{M_0A(G)} = \|f\|_{MA(G)} = \|f|_B\|_{A(B)} \geq \|f|_N\|_{A(N)}. \quad (1)$$

En effet comme  $G = KB$ , les deux égalités résultent de la proposition 1.6 de [CH89], et la dernière inégalité est évidente (on verra plus loin qu'elle peut être stricte).

**Proposition 0.1** *On ne peut pas approcher 1 (pour la topologie de la convergence sur les compacts) par une suite de fonctions de  $C_c(G)$  bornées uniformément pour  $\|\cdot\|_{M_0A(G)}$ .*

Pour  $F = \mathbb{R}$  la proposition 0.1 est montrée dans [Haa86]. On renvoie aussi à [Dor93] où des résultats de [Haa86] sont généralisés et aux articles [CH85, CDSW05, CH89] qui sont reliés à ce problème.

Pour  $F$  non archimédien, on montre la proposition 0.1 dans cet article. On note que dans le cas où  $G = SL_3(F)$  la proposition 0.1 résulte aussi de la propriété (T) renforcée [Laf08].

La méthode de la preuve de la proposition 0.1 pour  $F = \mathbb{R}$  dans [Haa86], qui est aussi notre méthode dans cet article pour  $F$  non archimédien, consiste à se ramener à la proposition suivante.

**Proposition 0.2** *On ne peut pas approcher 1 (pour la topologie de la convergence sur les compacts) par une suite  $f_n$  de fonctions  $K$ -biinvariantes de  $C_c(G)$  telles que  $\|f_n|_N\|_{A(N)}$  soit borné indépendamment de  $n$ .*

Cette proposition est montrée dans [Haa86] pour  $F = \mathbb{R}$  et dans cet article pour  $F$  non archimédien.

**Démonstration de la proposition 0.1 en admettant la proposition 0.2.**  
En moyennant à gauche et à droite par  $K$  on voit qu'il suffit de montrer qu'on

ne peut pas approcher 1 par une suite de fonctions  $K$ -biinvariantes de  $C_c(G)$  bornées uniformément pour  $\|\cdot\|_{M_0A(G)}$ . On applique alors (1).  $\square$

**Remarque.** La preuve de la propriété (T) renforcée [Laf08] ne permet pas de montrer la proposition 0.2. Ce qu'elle montre de façon naturelle est la proposition analogue à 0.2 obtenue en remplaçant  $N$  par  $B$ , comme on le verra à la fin de l'introduction du paragraphe 1.

Pour  $F = \mathbb{R}$ , la preuve de la proposition 0.2 donnée dans [Haa86] repose sur les deux lemmes suivants.

**Lemme 0.3** (Haagerup) *Soit  $f \in C_c(SL_3(\mathbb{R}))$  une fonction biinvariante par  $K = SO_3(\mathbb{R})$ . Alors*

$$\left| \int_{x \in \mathbb{R}} f \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{-1/2} dx \right| \leq 4\pi \|f|_N\|_{A(N)}.$$

**Démonstration.** Ce lemme est une conséquence du lemme E de [Haa86], qui est plus général car il concerne toutes les fonctions  $SO_2(\mathbb{R})$ -biinvariantes sur  $SL_2(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^2$ .  $\square$

**Lemme 0.4** (Haagerup) *Soit  $f \in C_c(Sp_4(\mathbb{R}))$  une fonction biinvariante par le sous-groupe compact maximal  $K = Sp_4(\mathbb{R}) \cap SO_4(\mathbb{R})$ . Alors*

$$\left| \int_{x \in \mathbb{R}} f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{-1/2} dx \right| \leq 4\pi \|f|_N\|_{A(N)}.$$

**Démonstration.** Ce lemme est une conséquence du résultat analogue au lemme E pour  $Sp_4$ , qui apparaît dans [Haa86] à l'intérieur d'une démonstration et qui est plus général car il concerne toutes les fonctions  $SO_2(\mathbb{R})$ -biinvariantes sur  $SL_2(\mathbb{R}) \rtimes \text{Sym}^2(\mathbb{R}^2)$ .  $\square$

Pour les deux lemmes précédents on renvoie aussi à [Dor93].

On va réécrire les lemmes 0.3 et 0.4 sous une forme équivalente qui est plus adaptée à la comparaison avec le cas non archimédien. Pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$

et  $a \in ]1, \infty[$  on a  $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R}) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} SO_2(\mathbb{R})$  si et seulement si

$x = a - a^{-1}$  et alors  $(1 + \frac{x^2}{4})^{1/2} = \frac{a+a^{-1}}{2}$ , d'où  $(1 + \frac{x^2}{4})^{-1/2} dx = 2 \frac{(1+a^{-2})da}{a+a^{-1}} = 2 \frac{da}{a}$ .

Les lemmes 0.3 et 0.4 sont donc équivalents aux deux lemmes suivants.

**Lemme 0.5** (Haagerup) Soit  $f \in C_c(SL_3(\mathbb{R}))$  une fonction biinvariante par  $K = SO_3(\mathbb{R})$ . Alors

$$\left| \int_{a \in ]1, \infty[} f \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \frac{da}{a} \right| \leq \pi \|f|_N\|_{A(N)}.$$

**Lemme 0.6** (Haagerup) Soit  $f \in C_c(Sp_4(\mathbb{R}))$  une fonction biinvariante par le sous-groupe compact maximal  $K = Sp_4(\mathbb{R}) \cap SO_4(\mathbb{R})$ . Alors

$$\left| \int_{a \in ]1, \infty[} f \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \frac{da}{a} \right| \leq \pi \|f|_N\|_{A(N)}.$$

Le but de cet article est de montrer des résultats analogues aux lemmes 0.5 et 0.6 dans le cas où  $F$  est non archimédien. On renvoie aux introductions des paragraphes 1 et 2 pour l'énoncé de ces résultats, en donnant seulement ici quelques commentaires.

Grâce au fait que les calculs sont plus simples dans le cas non archimédien, on obtient en fait des estimées plus complètes. Il apparaît une différence surprenante entre le cas de  $SL_3$  et celui de  $Sp_4$  :

- pour  $SL_3$ , le lemme analogue au lemme 0.5 pour  $F$  non archimédien est essentiellement optimal car il existe une suite de fonctions  $K$ -biinvariantes  $f_n \in C_c(G)$  telle que  $f_n$  soit égale à 1 sur la boule de rayon  $n$  (pour une longueur naturelle sur  $G$ ) et que  $\|f_n|_N\|_{A(N)}$  croisse linéairement en  $n$  (donc à la même vitesse que le membre de gauche de l'inégalité du lemme 0.5) et les normes  $\|f_n|_N\|_{A(N)}$  et  $\|f_n|_B\|_{A(B)}$  se comportent de façon très différentes car la propriété (T) renforcée implique que pour une telle suite  $f_n$ ,  $\|f_n|_B\|_{A(B)}$  croît au moins exponentiellement en  $n$ ,
- pour  $Sp_4$ , on a un énoncé beaucoup plus fort que le résultat analogue au lemme 0.6 pour  $F$  non archimédien et en particulier pour toute suite de fonctions  $K$ -biinvariantes  $f_n \in C_c(G)$  telle que  $f_n$  soit égale à 1 sur la boule de rayon  $n$ , la suite  $\|f_n|_N\|_{A(N)}$  croît au moins exponentiellement (donc a le même comportement qualitatif que  $\|f_n|_B\|_{A(B)}$ ).

On ne sait pas si des résultats analogues aux résultats complémentaires qu'on a obtenus pour  $F$  non archimédien sont vrais pour  $F = \mathbb{R}$ .

Les résultats de [Haa86] sont plus généraux que les lemmes 0.3 et 0.4 car ils concernent toutes les fonctions  $SO_2(\mathbb{R})$ -biinvariantes sur  $SL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$  et  $SL_2(\mathbb{R}) \times \text{Sym}^2(\mathbb{R}^2)$  et Dorofaeff [Dor93] a étendu ces résultats à  $SL_2(\mathbb{R}) \times \text{Sym}^n(\mathbb{R}^2)$  pour tout  $n$ . On ne sait pas si l'analogie non-archimédien de ces résultats est vrai.

## 1 Le cas de $SL_3$

Soit  $F$  un corps local non archimédien,  $\mathcal{O}$  son anneau d'entiers et  $\pi$  une uniformisante de  $\mathcal{O}$ . Soit  $\mathbb{F}$  le corps résiduel de  $F$ . On note  $q$  le cardinal de  $\mathbb{F}$ . Soit  $G = SL_3(F)$  et  $K = SL_3(\mathcal{O})$ .

Soit  $\Lambda = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2, i - j = 0 \text{ modulo } 3\}$ . Pour  $(i, j) \in \Lambda$  on note

$$D(i, j) = \pi^{\frac{i+2j}{3}} \begin{pmatrix} \pi^{-(i+j)} & 0 & 0 \\ 0 & \pi^{-j} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

L'application qui à  $(i, j) \in \Lambda$  associe  $KD(i, j)K$  induit une bijection entre  $\Lambda$  et  $K \backslash G / K$ . On note  $B$  le sous-groupe de Borel de  $G$  (formé des matrices triangulaires supérieures). On introduit deux sous-groupes fermés de  $B$  :

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y, z \in F \right\}$$

et

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \pi^i & x & z \\ 0 & \pi^j & y \\ 0 & 0 & \pi^k \end{pmatrix}, x, y, z \in F, i, j, k \in \mathbb{Z}, i + j + k = 0 \right\}.$$

Pour une matrice  $A = (a_{kl})$  on note  $\|A\| = \max(|a_{kl}|)$ . Alors pour  $A \in G$ ,

$$A \in KD(i, j)K \text{ si et seulement si } \|A\| = q^{\frac{2i+j}{3}} \text{ et } \|A^{-1}\| = q^{\frac{i+2j}{3}}. \quad (2)$$

L'analogue non archimédien du lemme 0.5 est l'énoncé suivant.

**Lemme 1.1** *Pour toute fonction  $K$ -biinvariante  $f \in C_c(G)$ ,*

$$\left| \sum_{i \in \mathbb{N}} f(D(i, i)) \right| \leq 13 \|f|_N\|_{A(N)}. \quad (3)$$

D'après les arguments qui figurent à la fin de la preuve du théorème 1 pour  $SL_3(\mathbb{R})$  dans [Haa86] (ou dans le paragraphe 12 de [Dor93]), le lemme 1.1 implique que l'on ne peut pas approcher 1 par des fonctions  $K$ -biinvariantes  $f \in C_c(G)$  telles que  $\|f|_N\|_{A(N)}$  reste bornée.

La démonstration du lemme 1.1 donnera en fait une estimée un peu plus générale.

**Lemme 1.2** *Pour toute fonction  $K$ -biinvariante  $f \in C_c(G)$ ,*

$$\sum_{i \in \mathbb{N}^*} i |f(D(i, i)) - f(D(i+1, i+1))| \leq 12 \|f|_N\|_{A(N)}.$$

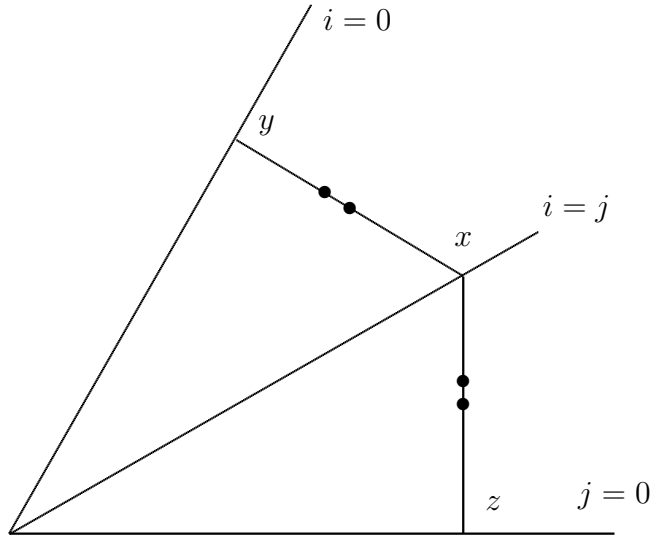
Le lemme suivant donne, pour toute fonction  $K$ -biinvariante  $f \in C_c(G)$ , des estimées sur la variation de  $(i, j) \mapsto f(D(i, j))$  en fonction de  $\|f|_N\|_{A(N)}$ , qui sont différentes de celles des lemmes 1.1 et 1.2.

**Lemme 1.3** *Il existe une constante  $C$  telle que pour toute fonction  $K$ -biinvariante  $f \in C_c(G)$ ,*

$$|f(D(i, j)) - f(D(i + 2, j - 1))| \leq Cq^{\frac{i-j}{6}} \|f|_N\|_{A(N)} \text{ pour } i < j \quad (4)$$

$$\text{et } |f(D(i, j)) - f(D(i - 1, j + 2))| \leq Cq^{\frac{j-i}{6}} \|f|_N\|_{A(N)} \text{ pour } i > j. \quad (5)$$

Le dessin ci-dessous illustre les estimées du lemme. On a dessiné la chambre de Weyl, paramétrée par  $(i, j) \in \mathbb{R}_+^2$  et  $\Lambda$  est l'intersection du réseau entier  $\{(i, j) \in \mathbb{Z}^2, i = j \bmod 3\}$  avec la chambre de Weyl. La droite  $i = j$  est la bissectrice de l'angle à l'origine. Le lemme permet de comparer les valeurs de  $f$  en deux points voisins sur un segment comme  $xy$  ou  $xz$  mais ces estimées deviennent banales quand on se rapproche de  $x$ . Géométriquement  $y$  et  $z$  sont les pieds des perpendiculaires abaissées depuis  $x$  sur les droites  $i = 0$  et  $j = 0$ .



Les estimées du lemme 1.3 montrent que si l'on cherche une suite de fonctions  $K$ -biinvariantes  $f_n \in C_c(G)$  telle que  $f_n(D(i, j)) = 1$  pour  $i \leq n$  et  $j \leq n$  et que  $\|f_n|_N\|_{A(N)}$  soit majoré par un polynôme en  $n$ , pour tout  $n$  la fonction  $(i, j) \mapsto f_n(D(i, j))$  doit être à peu près constante le long des segments notés  $xy$  et  $xz$  sur la figure précédente. Le candidat le plus naturel pour une telle suite de fonctions est  $\chi_{B_n}$ , où  $B_n$  est défini comme ci-dessous,

et caractérisé par le fait que  $\chi_{B_n}(D(i, j))$  vaut 1 exactement quand  $(i, j)$  appartient au quadrilatère délimité par l'origine et  $xyz$  dans la figure ci-dessus en prenant l'échelle telle que  $x = (n, n)$ . Le lemme suivant montre que ce candidat convient et qu'il existe donc une telle suite de fonctions  $f_n$ .

Soit  $\ell$  la longueur sur  $G$  définie par

$$\ell(kD(i, j)k') = \max\left(\frac{i+2j}{3}, \frac{2i+j}{3}\right)$$

pour  $k, k' \in K$  et  $(i, j) \in \Lambda$ . Autrement dit pour  $A \in G$ , on a  $q^{\ell(A)} = \max(\|A\|, \|A^{-1}\|)$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $B_n = \{g \in G, \ell(g) \leq n\}$ .

**Lemme 1.4** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|\chi_{B_n}|_N\|_{A(N)} \leq 2n + 1$ .*

Ce lemme montre l'optimalité du lemme 1.1 (à la constante près). En effet pour  $f = \chi_{B_n}$ , le membre de gauche de (3) vaut  $n + 1$  alors que le membre de droite est  $\leq 13(2n + 1)$ .

**Remarque.** On a déjà dit que le choix de  $B_n$  est dicté par les estimées du lemme 1.3. Par exemple le lemme 1.3 montre que si dans la définition de  $B_n$  on remplaçait la longueur  $\ell$  par la longueur  $kD(i, j)k' \mapsto i + j$ , l'énoncé du lemme 1.4 ne serait plus vrai.

La propriété renforcée implique que  $\|\chi_{B_n}|_B\|_{A(B)}$  croît exponentiellement en  $n$ . En fait la propriété renforcée implique le lemme suivant, qui résulte de [Laf08, Laf09a], mais dont nous rappellerons la démonstration sous une forme qui rend plus facile la comparaison avec le résultat de Haagerup.

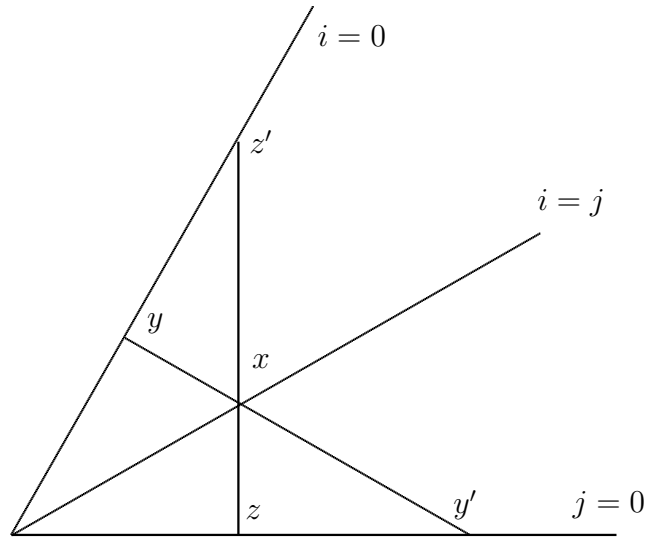
**Lemme 1.5** *Il existe une constante  $C$  telle que pour toute fonction  $K$ -biinvariante  $f \in C_c(G)$ ,*

$$|f(D(i, j)) - f(D(i + 2, j - 1))| \leq Cq^{-\frac{j}{2}} \|f|_H\|_{A(H)} \text{ pour } j \geq 1 \quad (6)$$

$$\text{et } |f(D(i, j)) - f(D(i - 1, j + 2))| \leq Cq^{-\frac{i}{2}} \|f|_H\|_{A(H)} \text{ pour } i \geq 1. \quad (7)$$

Comme  $H$  est un sous-groupe fermé de  $B$  on a bien sûr  $\|f|_H\|_{A(H)} \leq \|f|_B\|_{A(B)}$ . En fait on a égalité, et  $\|f|_H\|_{A(H)} = \|f|_B\|_{A(B)} = \|f\|_{MA(G)} = \|f\|_{M_0A(G)}$  car  $H$  et  $B$  sont moyennables,  $G = KH = KB$  et d'après la proposition 1.6 de [CH89].

Le lemme permet de comparer les valeurs de  $f(D(i, j))$  en deux points voisins sur les segments  $yy'$  et  $zz'$  de la figure ci-dessous (et pas seulement sur les segments  $xy$  et  $xz$  comme dans le lemme 1.3), les estimées devenant banales quand on se rapproche de  $y'$  ou de  $z'$ . On voit que l'estimée du lemme 1.5 reste non triviale pour  $i = j$  alors que celle du lemme 1.3 devient banale quand on s'approche de la bissectrice  $i = j$ .



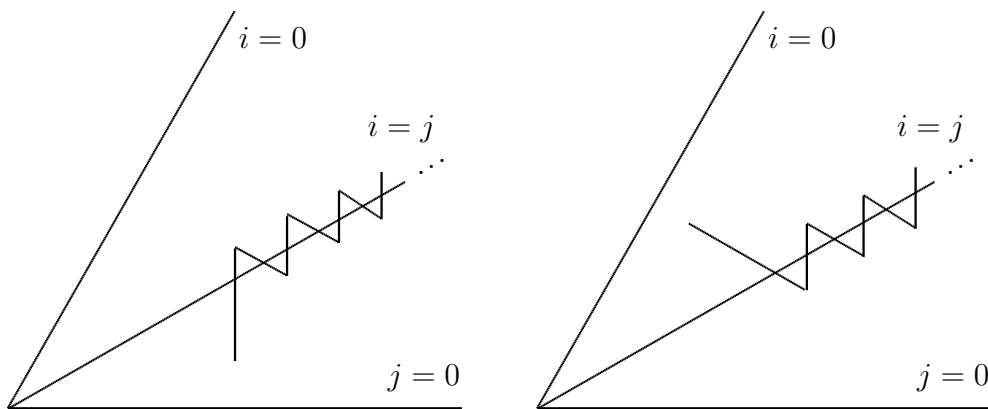
Comme dans [Laf08, Laf09a] on montre en zigzaguant le corollaire suivant.

**Corollaire 1.6** *Il existe une constante  $C$  telle que pour toute fonction  $K$ -biinvariante  $f \in C_c(G)$ ,*

$$|f(D(i, j))| \leq Cq^{-\max(\frac{2i+j}{6}, \frac{i+2j}{6})} \|f|_H\|_{A(H)}.$$

□

La figure ci-dessous illustre l'argument de zigzag en partant d'un point arbitraire.



En appliquant le corollaire 1.6 à la fonction  $\chi_{B_n}$  du lemme 1.4 on voit que  $\|\chi_{B_n}|_H\|_{A(H)}$  et  $\|\chi_{B_n}|_N\|_{A(N)}$  se comportent très différemment quand  $n$  tend



vers l'infini puisque le premier croît exponentiellement et le second polynomialement. En particulier  $\chi_{B_n}$  ne vérifierait pas les estimées du lemme 1.5 si on remplaçait  $\|\chi_{B_n}|_H\|_{A(H)}$  par  $\|\chi_{B_n}|_N\|_{A(N)}$ . Donc il n'y a pas d'implication logique entre les estimées des lemmes 1.5 et 1.3. De même il n'y pas d'implication logique entre l'estimée du corollaire 1.6 et celle des lemmes 1.1 et 1.2, et l'estimée du corollaire 1.6 ne serait plus vraie si on le remplaçait  $\|f|_H\|_{A(H)}$  par  $\|f|_N\|_{A(N)}$ .

## 1.1 Rappels sur la transformation de Fourier

Pour  $x \in F$  on note  $|x| = q^n$  si  $x \in \pi^{-n}\mathcal{O}^*$  et  $|x| = 0$  si  $x = 0$ . On munit  $F$  de la mesure de Haar telle que  $\int_{\mathcal{O}} da = 1$ . Pour  $\lambda \in F$  on a  $\int_{\lambda\mathcal{O}} da = |\lambda|$ , ce qui justifie la normalisation de  $|\cdot|$  par  $|\pi| = q^{-1}$ .

On fixe un caractère  $\psi : F/\mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}^*$  non trivial sur  $\pi^{-1}\mathcal{O}/\mathcal{O}$ .

La transformation de Fourier est l'isométrie

$$\mathcal{F} : L^2(F) \rightarrow L^2(F), f \mapsto \left( \xi \mapsto \int_{x \in F} \psi(\xi x) f(x) dx \right).$$

On note que  $\mathcal{F}(\chi_{\mathcal{O}}) = \chi_{\mathcal{O}}$ , de sorte que  $\chi_{\mathcal{O}}$  joue le même rôle qu'une gaussienne pour la transformation de Fourier réelle.

Plus généralement pour tout  $\lambda \in F^*$  on a  $\mathcal{F}(\chi_{\lambda\mathcal{O}}) = |\lambda| \chi_{\lambda^{-1}\mathcal{O}}$ , ce que l'on peut exprimer aussi en disant que  $\mathcal{F}$  envoie le vecteur  $|\lambda|^{-\frac{1}{2}} \chi_{\lambda\mathcal{O}}$  de norme 1 sur le vecteur  $|\lambda|^{\frac{1}{2}} \chi_{\lambda^{-1}\mathcal{O}}$  de norme 1.

## 1.2 Rappels sur la formule de Plancherel pour $N$

Dans tout ce texte on note  $\mathcal{H} = L^2(F)$ . Pour tout  $\lambda \in F^*$  on définit la représentation irréductible  $\rho_\lambda : N \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$  telle que pour  $a, b, c \in F, f \in \mathcal{H}$

$$\rho_\lambda \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (f)$$

soit la fonction

$$x \mapsto f(x+a) \psi(b\lambda x) \psi(\lambda c).$$

On note  $C_c^\infty(N)$  l'espace des fonctions localement constantes à support compact sur  $N$  et à valeurs complexes (une telle fonction ne prend donc qu'un nombre fini de valeurs). Pour  $h \in C_c^\infty(N)$  on a donc

$$((\rho_\lambda(h))(f))(x) = \int_{a,b,c \in F} h(a,b,c) f(x+a) \psi(b\lambda x) \psi(\lambda c) da db dc$$

(l'abus de notation  $h(a, b, c)$  sera systématique). On vérifie facilement que  $\rho_\lambda(h)$  est un opérateur de rang fini.

Pour  $h \in C_c^\infty(N)$  on a

$$\|h\|_{C_{\text{red}}^*(N)} = \sup_{\lambda \in F^*} \|\rho_\lambda(h)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}. \quad (8)$$

La formule de Plancherel pour  $N$  est donnée par le lemme suivant (qui est bien connu).

**Lemme 1.7** *Pour  $h \in C_c^\infty(N)$ , on a*

$$\|h\|_{L^2(N)}^2 = \int_{\lambda \in F^*} |\lambda| \|\rho_\lambda(h)\|_{HS}^2 d\lambda$$

où  $\|\cdot\|_{HS}$  est la norme de Hilbert-Schmidt, c'est-à-dire la norme dans  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*$ .

**Démonstration.** Soit  $h \in C_c^\infty(N)$  et  $\lambda \in F^*$ . Alors  $\rho_\lambda(h)$  est un opérateur de rang fini donné par le noyau

$$K(x, y) = \int_{b, c \in F} h(a, b, c) \psi(b\lambda x) \psi(\lambda c) dbdc \quad \text{où } a = y - x.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \|\rho_\lambda(h)\|_{HS}^2 &= \int_{x, y \in F} |K(x, y)|^2 dx dy \\ &= \int_{x, a \in F} \left| \int_{b, c \in F} h(a, b, c) \psi(b\lambda x) \psi(\lambda c) dbdc \right|^2 dx da \end{aligned}$$

grâce au changement de variable  $y = x + a$ . Donc

$$\begin{aligned} &\int_{\lambda \in F^*} |\lambda| \|\rho_\lambda(h)\|_{HS}^2 d\lambda \\ &= \int_{x, a \in F, \lambda \in F^*} |\lambda| \left| \int_{b, c \in F} h(a, b, c) \psi(b\lambda x) \psi(\lambda c) dbdc \right|^2 dx da d\lambda. \end{aligned}$$

On applique maintenant le changement de variables  $\tilde{x} = \lambda x$ . Comme  $d\tilde{x} = |\lambda| dx$  et comme  $\{0\} \subset F$  est de mesure nulle, on obtient

$$\int_{\lambda \in F^*} |\lambda| \|\rho_\lambda(h)\|_{HS}^2 d\lambda = \int_{\tilde{x}, a, \lambda \in F} \left| \int_{b, c \in F} h(a, b, c) \psi(b\tilde{x}) \psi(\lambda c) dbdc \right|^2 d\tilde{x} da d\lambda.$$

Or pour tout  $a \in F$  on a

$$\int_{\tilde{x}, \lambda \in F} \left| \int_{b, c \in F} h(a, b, c) \psi(b\tilde{x}) \psi(\lambda c) dbdc \right|^2 d\tilde{x} d\lambda = \int_{b, c \in F} |h(a, b, c)|^2 dbdc$$

car la transformation de Fourier est une isométrie.  $\square$

Il résulte de la formule de Plancherel pour  $N$  que pour  $h \in C_c^\infty(N)$  on a

$$\|h\|_{M_0A(N)} = \|h\|_{MA(N)} = \|h\|_{A(N)} = \int_{\lambda \in F^*} |\lambda| \|\rho_\lambda(h)\|_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*} d\lambda.$$

(l'égalité entre les trois normes vient du fait que  $N$  est moyennable).

### 1.3 Preuve des lemmes 1.1 et 1.2.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note

$$h'_n = \left( q^{-n} \sum_{j=0}^n \chi_{\pi^{-j}\mathcal{O}}(a) \chi_{\pi^{-n+j}\mathcal{O}}(b) \right) \left( q^{-n} \chi_{\pi^{-n-1} + \pi^{-n}\mathcal{O}}(c) \right) \in C_c^\infty(N)$$

$$h''_n = \left( q^{-n} \sum_{j=0}^n \chi_{\pi^{-j}\mathcal{O}}(a) \chi_{\pi^{-n+j}\mathcal{O}}(b) \right) \left( q^{-n} \chi_{\pi^{-n-2} + \pi^{-n}\mathcal{O}}(c) \right) \in C_c^\infty(N)$$

et on pose  $h_n = h'_n - h''_n$ .

Le lemme suivant nous servira à plusieurs reprises.

**Lemme 1.8** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Alors

$$\|A\| = \max(|a|, |b|, |c|) \quad \text{et} \quad \|A^{-1}\| = \max(|a|, |b|, |c - ab|).$$

De plus

$$A \in KD(i, j)K \quad \text{si et seulement si} \\ \max(|a|, |b|, |c|) = q^{\frac{2i+j}{3}} \quad \text{et} \quad \max(|a|, |b|, |c - ab|) = q^{\frac{i+2j}{3}}.$$

**Démonstration.** La première assertion vient du fait que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ab - c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

et la deuxième assertion résulte alors de (2).  $\square$

**Sous-lemme 1.9** Pour tout  $n$ ,  $h'_n$  est supportée par  $N \cap KD(n+1, n+1)K$  et  $h''_n$  est supportée par  $N \cap KD(n+2, n+2)K$ .

**Démonstration.** Cela résulte du lemme 1.8. En effet pour  $a, b \in \pi^{-n}\mathcal{O}$  tels que  $ab \in \pi^{-n}\mathcal{O}$  et pour  $c$  dans  $\pi^{-n-1}\mathcal{O}^*$  ou  $\pi^{-n-2}\mathcal{O}^*$ , on a  $\|A\| = |c|$  et  $\|A^{-1}\| = |c|$  car  $|c - ab| = |c|$ .  $\square$

**Sous-lemme 1.10** Pour  $m \in \mathbb{Z}$  et  $\lambda \in \pi^m\mathcal{O}^*$ , on a

$$\int_F \psi(\lambda c) \left( q^{-n} \chi_{\pi^{-n-1} + \pi^{-n}\mathcal{O}}(c) - q^{-n} \chi_{\pi^{-n-2} + \pi^{-n}\mathcal{O}}(c) \right) dc = 0 \quad (10)$$

si  $m \notin \{n, n+1\}$  et

$$\left| \int_F \psi(\lambda c) \left( q^{-n} \chi_{\pi^{-n-1} + \pi^{-n}\mathcal{O}}(c) - q^{-n} \chi_{\pi^{-n-2} + \pi^{-n}\mathcal{O}}(c) \right) dc \right| \leq 2 \quad (11)$$

si  $m \in \{n, n+1\}$ .  $\square$

**Sous-lemme 1.11** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \{n, n+1\}$  et  $\lambda \in \pi^m\mathcal{O}^*$ ,

$$\left\| f \mapsto \left( x \mapsto \left( \int_{a,b \in F} \left( q^{-n} \sum_{j=0}^n \chi_{\pi^{-j}\mathcal{O}}(a) \chi_{\pi^{-n+j}\mathcal{O}}(b) \right) f(x+a) \psi(b\lambda x) dadb \right) \right) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 3.$$

**Démonstration.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ ,  $m = n + \varepsilon$  et  $\lambda \in \pi^m\mathcal{O}^*$ . Pour  $j \in \{0, \dots, n\}$  on note

$$T_{\varepsilon,j} : f \mapsto \left( x \mapsto \left( \int_{a,b \in F} q^{-n} \chi_{\pi^{-j}\mathcal{O}}(a) \chi_{\pi^{-n+j}\mathcal{O}}(b) f(x+a) \psi(b\lambda x) dadb \right) \right)$$

de sorte que l'inégalité du sous-lemme est

$$\left\| \sum_{j=0}^n T_{\varepsilon,j} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 3. \quad (12)$$

On a

$$\int_{b \in F} \chi_{\pi^{-n+j}\mathcal{O}}(b) \psi(b\lambda x) db = q^{n-j} \chi_{\pi^{-j-\varepsilon}\mathcal{O}}(x).$$

Donc

$$T_{\varepsilon,j} : f \mapsto \left( x \mapsto \left( \int_{a \in \pi^{-j}\mathcal{O}} q^{-j} \chi_{\pi^{-j-\varepsilon}\mathcal{O}}(x) f(x+a) da \right) \right).$$

Soit  $\sigma : F/\mathcal{O} \rightarrow F$  une section de la projection  $F \rightarrow F/\mathcal{O}$ , telle que  $\sigma(0) = 0$  (le choix de  $\sigma$  n'a aucune importance). Pour  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in F/\mathcal{O}$  et pour  $\xi$  un caractère non trivial de  $\mathcal{O}/\pi\mathcal{O} = \mathbb{F}$  on introduit

$$f_{i,\xi,b} : x \mapsto q^{-\frac{i}{2}} \xi(\pi^i x - \sigma(b))$$

(où la notation indique que cette fonction est à support dans  $\pi^{-i}b + \pi^{-i}\mathcal{O}$ ). Alors  $(f_{i,\xi,b})_{i \in \mathbb{Z}, \xi \in \hat{\mathbb{F}} \setminus \{0\}, b \in F/\mathcal{O}}$  est une base orthonormale de  $\mathcal{H} = L^2(F)$ . On a par exemple, pour  $j \in \mathbb{Z}$ ,

$$q^{-\frac{j}{2}}\chi_{\pi^{-j}\mathcal{O}} = q^{-\frac{j}{2}} \sum_{\ell=1}^{\infty} q^{-\ell} (q\chi_{\pi^{-j-\ell+1}\mathcal{O}} - \chi_{\pi^{-j-\ell}\mathcal{O}}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} q^{-\frac{\ell}{2}} \sum_{\xi \in \hat{\mathbb{F}} \setminus \{0\}} f_{j+\ell,\xi,0}$$

car  $\sum_{\xi \in \hat{\mathbb{F}} \setminus \{0\}} f_{j+\ell,\xi,0} = q^{-\frac{j+\ell}{2}} (q\chi_{\pi^{-j-\ell+1}\mathcal{O}} - \chi_{\pi^{-j-\ell}\mathcal{O}})$ .

On a  $T_{\varepsilon,j}(f_{i,\xi,b}) = 0$  sauf si  $i > j$  et  $b = 0$ , et

$$\text{pour } i > j, T_{0,j}(f_{i,\xi,0}) = q^{-\frac{i}{2}}\chi_{\pi^{-j}\mathcal{O}} = \sum_{\ell=1}^{\infty} q^{-\frac{i-j+\ell}{2}} \sum_{\xi' \in \hat{\mathbb{F}} \setminus \{0\}} f_{j+\ell,\xi',0},$$

$$\text{pour } i = j + 1, T_{1,j}(f_{i,\xi,0}) = f_{i,\xi,0},$$

$$\text{pour } i > j + 1, T_{1,j}(f_{i,\xi,0}) = q^{-\frac{i}{2}}\chi_{\pi^{-j-1}\mathcal{O}} = \sum_{\ell=1}^{\infty} q^{-\frac{i-j-1+\ell}{2}} \sum_{\xi' \in \hat{\mathbb{F}} \setminus \{0\}} f_{j+1+\ell,\xi',0}.$$

On en déduit

$$\left\| \sum_{j=0}^n T_{\varepsilon,j} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 1 + (q-1)(q^{-1} + q^{-\frac{3}{2}} + \dots) = 1 + \frac{1-q^{-1}}{1-q^{-\frac{1}{2}}} \leq 2 + q^{-\frac{1}{2}} \leq 3.$$

□

**Sous-lemme 1.12** *Il existe  $C$  tel que pour toute suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à support fini on a*

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n h_n \right\|_{C_{\text{red}}^*(N)} \leq 12 \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|.$$

**Démonstration.** Par (8) on a

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n h_n \right\|_{C_{\text{red}}^*(N)} = \sup_{\lambda \in F^*} \left\| \rho_{\lambda} \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n h_n \right) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}.$$

Soit  $m \in \mathbb{Z}$  et  $\lambda \in \pi^m \mathcal{O}^*$ . D'après l'égalité (10) du sous-lemme 1.10 on a

$$\rho_{\lambda} \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n h_n \right) = \rho_{\lambda} (a_{m-1} h_{m-1} + a_m h_m).$$

Enfin d'après l'inégalité (11) du sous-lemme 1.10 et le sous-lemme 1.11,  $\|\rho_{\lambda}(h_{m-1})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 6$  et  $\|\rho_{\lambda}(h_m)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 6$ . □

Pour  $f, h \in C_c^\infty(N)$  on a

$$\left| \int_N fh \right| \leq \|f\|_{A(N)} \|h\|_{C_{\text{red}}^*(N)}. \quad (13)$$

Soit  $f \in C_c(G)$  une fonction  $K$ -biinvariante. D'après le sous-lemme 1.9, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_N f|_N h_n = (n+1)(f(D(n+1, n+1)) - f(D(n+2, n+2))). \quad (14)$$

Il résulte du sous-lemme 1.12 et de (13) et (14) que pour toute suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à support fini, et pour  $f$  comme ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (n+1) (f(D(n+1, n+1)) - f(D(n+2, n+2))) \right| \\ & \leq 12 (\max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|) \|f|_N\|_{A(N)}. \end{aligned} \quad (15)$$

**Démonstration du lemme 1.1.** Soit  $f \in C_c(G)$  une fonction  $K$ -biinvariante. Soit  $m$  assez grand pour que  $f(D(i, i)) = 0$  pour  $i > m$ . On applique (15) à la suite  $(a_n)$  donnée par  $a_n = 1$  pour  $n \leq m$  et  $a_n = 0$  pour  $n > m$ . Par ailleurs on a évidemment  $|f(D(0, 0))| \leq \|f|_N\|_{A(N)}$ .  $\square$

**Démonstration du lemme 1.2.** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on applique (15) à la suite  $(a_i)$  donnée par

$$a_i = \frac{f(D(i+1, i+1)) - f(D(i+2, i+2))}{|f(D(i+1, i+1)) - f(D(i+2, i+2))|}$$

pour  $i \leq n$  et  $f(D(i+1, i+1)) \neq f(D(i+2, i+2))$ , et  $a_i = 0$  sinon, puis on fait tendre  $n$  vers l'infini.  $\square$

## 1.4 Démonstration du lemme 1.3.

L'estimée (5) se déduit de l'estimée (4) par l'automorphisme

$$\theta : A \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^t A^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de  $G$  qui préserve  $K$  et  $N$ . En effet  $\theta(D(i, j)) = D(j, i)$ . Il suffit donc de montrer (4). Comme  $|f(D(i, j))| \leq \|f|_N\|_{A(N)}$  il suffit de montrer (4) pour  $i \leq j - 6$ , ce que l'on fait maintenant. Soit donc  $(i, j) \in \Lambda$  vérifiant  $i \leq j - 6$ .

On pose  $\gamma = \frac{2i+j}{3} - 1 \in \mathbb{N}$ , et on note  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$  tels que  $\alpha - \beta \in \{0, 1\}$  et  $\alpha + \beta = \frac{i+2j}{3} - 2$ . On a donc

$$\beta + 1 \leq \alpha + 1 \leq \gamma + 1 < \gamma + 2 < \alpha + \beta + 2. \quad (16)$$

On vérifie que pour  $a \in \pi^{-\alpha-1}\mathcal{O}^*$ ,  $b \in \pi^{-\beta-1}\mathcal{O}^*$

– pour  $c \in \pi^{-\gamma-1}\mathcal{O}^*$  on a

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in KD(i, j)K$$

– pour  $c \in \pi^{-\gamma-2}\mathcal{O}^*$  on a

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in KD(i+2, j-1)K$$

Cela résulte du lemme 1.8 car

$$\max(|a|, |b|, |c|) = q^{\gamma+1} = q^{\frac{2i+j}{3}} \text{ et } \max(|a|, |b|, |c-ab|) = q^{\alpha+\beta+2} = q^{\frac{i+2j}{3}}$$

dans le cas où  $c \in \pi^{-\gamma-1}\mathcal{O}^*$  et

$$\begin{aligned} \max(|a|, |b|, |c|) &= q^{\gamma+2} = q^{\frac{2(i+2)+(j-1)}{3}} \\ \text{et } \max(|a|, |b|, |c-ab|) &= q^{\alpha+\beta+2} = q^{\frac{(i+2)+2(j-1)}{3}} \end{aligned}$$

dans le cas où  $c \in \pi^{-\gamma-2}\mathcal{O}^*$ .

Soit maintenant

$$\begin{aligned} h' &= q^{-\alpha-\beta-\gamma} \chi_{\pi^{-\alpha-1}+\pi^{-\alpha}\mathcal{O}}(a) \chi_{\pi^{-\beta-1}+\pi^{-\beta}\mathcal{O}}(b) \chi_{\pi^{-\gamma-1}+\pi^{-\gamma}\mathcal{O}}(c), \\ h'' &= q^{-\alpha-\beta-\gamma} \chi_{\pi^{-\alpha-1}+\pi^{-\alpha}\mathcal{O}}(a) \chi_{\pi^{-\beta-1}+\pi^{-\beta}\mathcal{O}}(b) \chi_{\pi^{-\gamma-2}+\pi^{-\gamma}\mathcal{O}}(c) \end{aligned}$$

et  $h = h' - h''$ . D'après ce qui précède,  $h'$  est supporté par  $KD(i, j)K$  et  $h''$  est supporté par  $KD(i+2, j-1)K$ . Donc pour toute fonction  $K$ -biinvariante  $f \in C_c(G)$ , on a

$$\int_N f|_N h = f(D(i, j)) - f(D(i-1, j+2)).$$

D'après (13), et comme  $\frac{i-j}{3} = \gamma - \alpha - \beta - 1$ , le lemme 1.3 est donc impliqué par le lemme suivant.

**Lemme 1.13** *Il existe  $C$  tel que pour  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$  vérifiant  $\max(\alpha, \beta) \leq \gamma < \alpha + \beta$ , on a*

$$\|h\|_{C_{\text{red}}^*(N)} \leq Cq^{\frac{\gamma-\alpha-\beta}{2}}.$$

Le sous-lemme suivant reprend le sous-lemme 1.10 avec des notations différentes.

**Sous-lemme 1.14** *Pour  $m \in \mathbb{Z}$  et  $\lambda \in \pi^m \mathcal{O}^*$ , on a*

$$\int_F \psi(\lambda c) \left( q^{-\gamma} \chi_{\pi^{-\gamma-1} + \pi^{-\gamma} \mathcal{O}}(c) - q^{-\gamma} \chi_{\pi^{-\gamma-2} + \pi^{-\gamma} \mathcal{O}}(c) \right) dc = 0$$

si  $m \notin \{\gamma, \gamma + 1\}$  et

$$\left| \int_F \psi(\lambda c) \left( q^{-\gamma} \chi_{\pi^{-\gamma-1} + \pi^{-\gamma} \mathcal{O}}(c) - q^{-\gamma} \chi_{\pi^{-\gamma-2} + \pi^{-\gamma} \mathcal{O}}(c) \right) dc \right| \leq 2$$

si  $m \in \{\gamma, \gamma + 1\}$ . □

On note

$$T_\lambda : f \mapsto \left( x \mapsto \left( q^{-\alpha-\beta} \int_{a \in \pi^{-\alpha-1} + \pi^{-\alpha} \mathcal{O}, b \in \pi^{-\beta-1} + \pi^{-\beta} \mathcal{O}} f(x+a) \psi(b\lambda x) dadb \right) \right)$$

**Sous-lemme 1.15** *Il existe  $C$  tel que pour  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$  vérifiant  $\max(\alpha, \beta) \leq \gamma < \alpha + \beta$ , pour  $m \in \{\gamma, \gamma + 1\}$  et  $\lambda \in \pi^m \mathcal{O}^*$ , on a  $\|T_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq Cq^{\frac{\gamma-\alpha-\beta}{2}}$ .*

**Démonstration.** On vérifie facilement que  $T_\lambda$  a la même norme que l'opérateur

$$T'_\lambda : f \mapsto \left( x \mapsto \left( q^{-\alpha-\beta} \int_{a \in \pi^{-\alpha} \mathcal{O}, b \in \pi^{-\beta} \mathcal{O}} f(x+a) \psi(b\lambda x) dadb \right) \right)$$

qui est aussi égal à

$$T'_\lambda : f \mapsto \left( x \mapsto \left( q^{-\alpha} \int_{a \in \pi^{-\alpha} \mathcal{O}} f(x+a) \chi_{\pi^{\beta-m} \mathcal{O}}(x) da \right) \right).$$

Comme  $\beta - m \geq \beta - (\gamma + 1) \geq -\alpha$ , on voit que cet opérateur est de rang 1, égal à

$$q^{\frac{-\alpha-\beta+m}{2}} |q^{\frac{\beta-m}{2}} \chi_{\pi^{\beta-m} \mathcal{O}} \rangle \langle q^{-\frac{\alpha}{2}} \chi_{\pi^{-\alpha} \mathcal{O}} |$$

et sa norme est donc égale à  $q^{\frac{-\alpha-\beta+m}{2}} \leq q^{\frac{-\alpha-\beta+\gamma+1}{2}}$ . □

**Démonstration du lemme 1.13.** Le lemme résulte de (8) et des sous-lemmes 1.14 et 1.15. □



## 1.5 Démonstration du lemme 1.4

Le lemme 1.8 montre que

$$\begin{aligned} B_n \cap N &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \pi^{-n}\mathcal{O}, b \in \pi^{-n}\mathcal{O}, c \in \pi^{-n}\mathcal{O}, (c - ab) \in \pi^{-n}\mathcal{O} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \pi^{-n}\mathcal{O}, b \in \pi^{-n}\mathcal{O}, ab \in \pi^{-n}\mathcal{O}, c \in \pi^{-n}\mathcal{O} \right\}. \end{aligned}$$

On a

$$\|\chi_{B_n}|_N\|_{A(N)} = \int_{\lambda \in F^*} |\lambda| \|\rho_\lambda(\chi_{B_n}|_N)\|_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*} d\lambda.$$

Soit  $\lambda \in F^*$ . Alors, pour  $f \in \mathcal{H}$ ,

$$\begin{aligned} \rho_\lambda(\chi_{B_n}|_N)(f) &= \left( \int_{c \in \pi^{-n}\mathcal{O}} \psi(\lambda c) dc \right) \\ &\left( x \mapsto \int_{a \in \pi^{-n}\mathcal{O}, b \in \pi^{-n}\mathcal{O}, ab \in \pi^{-n}\mathcal{O}} f(x+a) \psi(b\lambda x) dadb \right). \end{aligned}$$

On a  $\int_{c \in \pi^{-n}\mathcal{O}} \psi(\lambda c) dc = q^n \chi_{\pi^n\mathcal{O}}(\lambda)$ . D'où

$$\begin{aligned} \|\chi_{B_n}|_N\|_{A(N)} &= q^n \int_{\lambda \in \pi^n\mathcal{O} \setminus \{0\}} |\lambda| \\ \left\| f \mapsto \left( x \mapsto \int_{a \in \pi^{-n}\mathcal{O}, b \in \pi^{-n}\mathcal{O}, ab \in \pi^{-n}\mathcal{O}} f(x+a) \psi(b\lambda x) dadb \right) \right\|_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*} & d\lambda. \end{aligned} \quad (17)$$

On va montrer que  $m \geq n$  et  $\lambda \in \pi^m\mathcal{O}^*$  on a

$$\left\| f \mapsto \left( x \mapsto \int_{a \in \pi^{-n}\mathcal{O}, b \in \pi^{-n}\mathcal{O}, ab \in \pi^{-n}\mathcal{O}} f(x+a) \psi(b\lambda x) dadb \right) \right\|_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*} \leq q^m (2n+1). \quad (18)$$

On voit déjà que (18) implique le lemme 1.4. En effet, grâce à (17) et à (18), et comme le volume de  $\pi^m\mathcal{O}^*$  est  $(1 - q^{-1})q^{-m}$ , on a

$$\|\chi_{B_n}|_N\|_{A(N)} \leq q^n \sum_{m \geq n} \int_{\lambda \in \pi^m\mathcal{O}^*} |\lambda| q^m (2n+1) = \sum_{m \geq n} (1 - q^{-1}) q^{n-m} (2n+1) = 2n+1.$$

Il reste donc à montrer (18). Soit  $m \geq n$  et  $\lambda \in \pi^m\mathcal{O}^*$ . Grâce à la décomposition en réunion disjointe

$$\{(a, b) \in (\pi^{-n}\mathcal{O})^2, ab \in \pi^{-n}\mathcal{O}\} = (\mathcal{O} \times \pi^{-n}\mathcal{O}) \cup \bigcup_{j=1}^n (\pi^{-j}\mathcal{O}^* \times \pi^{-n+j}\mathcal{O})$$

et comme  $\pi^{-j}\mathcal{O}^* = \pi^{-j}\mathcal{O} \setminus \pi^{-j+1}\mathcal{O}$ , on a

$$\begin{aligned} & \left( f \mapsto \left( x \mapsto \int_{a \in \pi^{-n}\mathcal{O}, b \in \pi^{-n}\mathcal{O}, ab \in \pi^{-n}\mathcal{O}} f(x+a)\psi(b\lambda x)dad b \right) \right) \\ & \quad = T_{0,\lambda} + \sum_{j=1}^n (T'_{j,\lambda} - T''_{j,\lambda}) \\ \text{où } & T_{0,\lambda} : f \mapsto \left( x \mapsto \int_{a \in \mathcal{O}, b \in \pi^{-n}\mathcal{O}} f(x+a)\psi(b\lambda x)dad b \right) \\ & T'_{j,\lambda} : f \mapsto \left( x \mapsto \int_{a \in \pi^{-j}\mathcal{O}, b \in \pi^{-n+j}\mathcal{O}} f(x+a)\psi(b\lambda x)dad b \right) \\ \text{et } & T''_{j,\lambda} : f \mapsto \left( x \mapsto \int_{a \in \pi^{-j+1}\mathcal{O}, b \in \pi^{-n+j}\mathcal{O}} f(x+a)\psi(b\lambda x)dad b \right). \end{aligned}$$

Comme  $\int_{b \in \pi^{-n+j}\mathcal{O}} \psi(b\lambda x)db = q^{n-j}\chi_{\pi^{n-m-j}\mathcal{O}}(x)$  on a

$$\begin{aligned} T_{0,\lambda}(f) &= q^n \left( x \mapsto \int_{a \in \mathcal{O}} f(x+a)\chi_{\pi^{n-m}\mathcal{O}}(x)da \right) \\ T'_{j,\lambda}(f) &= q^{n-j} \left( x \mapsto \int_{a \in \pi^{-j}\mathcal{O}} f(x+a)\chi_{\pi^{n-m-j}\mathcal{O}}(x)da \right) \\ \text{et } T''_{j,\lambda}(f) &= q^{n-j} \left( x \mapsto \int_{a \in \pi^{-j+1}\mathcal{O}} f(x+a)\chi_{\pi^{n-m-j}\mathcal{O}}(x)da \right). \end{aligned}$$

L'opérateur  $T_{0,\lambda}$  est de rang  $q^{m-n}$ , et on peut le considérer comme égal à  $q^n \text{Id}_{\ell^2(\pi^{n-m}\mathcal{O}/\mathcal{O})}$ , donc  $\|T_{0,\lambda}\|_{\mathcal{H}^{\otimes \pi} \mathcal{H}^*} = q^m$ .

L'opérateur  $T'_{j,\lambda}$  est de rang  $q^{m-n}$ , et on peut le considérer comme égal à  $q^n \text{Id}_{\ell^2(\pi^{n-m-j}\mathcal{O}/\pi^{-j}\mathcal{O})}$ , donc  $\|T'_{j,\lambda}\|_{\mathcal{H}^{\otimes \pi} \mathcal{H}^*} = q^m$ .

L'opérateur  $T''_{j,\lambda}$  est de rang  $q^{m-n+1}$ , et on peut le considérer comme égal à  $q^{n-1} \text{Id}_{\ell^2(\pi^{n-m-j}\mathcal{O}/\pi^{-j+1}\mathcal{O})}$ , donc  $\|T''_{j,\lambda}\|_{\mathcal{H}^{\otimes \pi} \mathcal{H}^*} = q^m$ .

On a donc

$$\left\| T_{0,\lambda} + \sum_{j=1}^n (T'_{j,\lambda} - T''_{j,\lambda}) \right\|_{\mathcal{H}^{\otimes \pi} \mathcal{H}^*} \leq (2n+1)q^m,$$

et l'inégalité (18) en résulte. Ceci termine la preuve du lemme 1.4.

## 1.6 Démonstration du lemme 1.5

Pour montrer le lemme 1.5, on commence par un calcul dans  $N$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  on définit

$$h_n = q^{-n}\chi_{\pi^{-n}\mathcal{O}}(a)\chi_{\mathcal{O}}(b)\chi_{\pi^{-1}\mathcal{O}}(c)\psi(-c) \in C_c^\infty(N).$$

**Lemme 1.16** On a  $\|h_n\|_{C_{\text{red}}^*(N)} \leq q^{1-\frac{n}{2}}$ .

**Démonstration.** On a  $\int_{c \in \pi^{-1}\mathcal{O}} \psi(-c)\psi(\lambda c)dc = q$  pour  $\lambda \in 1 + \pi\mathcal{O}$  et cette intégrale vaut 0 sinon. Donc  $\rho_\lambda(h_n) = 0$  pour  $\lambda \notin 1 + \pi\mathcal{O}$ , et pour  $\lambda \in 1 + \pi\mathcal{O}$  on a

$$\begin{aligned} (\rho_\lambda(h_n)(f))(x) &= q^{1-n} \int_{a \in \pi^{-n}\mathcal{O}, b \in \mathcal{O}} f(x+a)\psi(\lambda bx)dad b \\ &= q^{1-n} \int_{a \in \pi^{-n}\mathcal{O}} f(x+a)\chi_{\mathcal{O}}(x)da \end{aligned}$$

donc  $\rho_\lambda(h_n)$  est l'opérateur  $q^{1-\frac{n}{2}}|\chi_{\mathcal{O}}\langle q^{-\frac{n}{2}}\chi_{\pi^{-n}\mathcal{O}}|$ , qui est de norme  $q^{1-\frac{n}{2}}$ .  $\square$

**Démonstration du lemme 1.5.** L'estimée (7) résulte de l'estimée (6) par le même argument que dans la preuve du lemme 1.3. On montre (6).

Soit  $(i, j) \in \Lambda$  avec  $j \geq 1$ . On pose

$$D'(i, j) = \pi^{\frac{i+2j}{3}} \begin{pmatrix} \pi^{-j} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & & \pi^{-(i+j)} \end{pmatrix} \in G.$$

On a bien sûr  $KD'(i, j)K = KD(i, j)K$ . On considère

$$h_{i,j} = h_j e_{D'(i,j)} \in C_c^\infty(H).$$

Autrement dit en notant

$$A_{a,b,c}^{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} D'(i, j) = \pi^{\frac{i+2j}{3}} \begin{pmatrix} \pi^{-j} & a & \pi^{-(i+j)}c \\ 0 & 1 & \pi^{-(i+j)}b \\ 0 & 0 & \pi^{-(i+j)} \end{pmatrix} \in H \quad (19)$$

on a

$$h_{i,j} = q^{-j} \int_{a \in \pi^{-j}\mathcal{O}, b \in \mathcal{O}, c \in \pi^{-1}\mathcal{O}} e_{A_{a,b,c}^{i,j}} \psi(-c)dad bdc \in C_c^\infty(H).$$

Il résulte du lemme 1.16 que

$$\|h_{i,j}\|_{C_{\text{red}}^*(H)} \leq q^{1-\frac{j}{2}}. \quad (20)$$

On calcule

$$\begin{aligned} (A_{a,b,c}^{i,j})^{-1} &= D'(i, j)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -a & ab-c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \pi^{-\frac{i+2j}{3}} \begin{pmatrix} \pi^j & -\pi^j a & \pi^j(ab-c) \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & \pi^{i+j} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (21)$$

Pour  $a \in \pi^{-j}\mathcal{O}, b \in \mathcal{O}, c \in \pi^{-1}\mathcal{O}$  on a  $\|A_{a,b,c}^{i,j}\| = q^{\frac{2i+j}{3}} \max(1, |c|)$  et comme  $j \geq 1$  on a  $\|(A_{a,b,c}^{i,j})^{-1}\| = q^{\frac{i+2j}{3}}$ . Donc d'après (2),

- si  $c \in \mathcal{O}$  on a  $A_{a,b,c}^{i,j} \in KD(i, j)K$ ,
- si  $c \in \pi^{-1}\mathcal{O}^*$  on a  $A_{a,b,c}^{i,j} \in KD(i+2, j-1)K$ .

Donc pour toute fonction  $K$ -biinvariante  $f \in C_c(G)$ , on a

$$\int_H f|_H h_{i,j} = f(D(i, j)) - f(D(i+2, j-1)) \quad (22)$$

puisque  $\int_{c \in \pi^{-1}\mathcal{O}^*} \psi(c)dc = -1$ . Enfin

$$\left| \int_H f|_H h_{i,j} \right| \leq \|f|_H\|_{A(H)} \|h_{i,j}\|_{C_{\text{red}}^*(H)}. \quad (23)$$

Le lemme 1.5 résulte de (20), (22) et (23).  $\square$

## 2 Le cas de $Sp_4$

Soit  $F$  un corps local non archimédien,  $\mathcal{O}$  son anneau d'entiers et  $\pi$  une uniformisante de  $\mathcal{O}$ . Soit  $\mathbb{F}$  le corps résiduel de  $F$ . On note  $q$  le cardinal de  $\mathbb{F}$ . On suppose que  $q$  est impair.

Soit  $G = Sp_4(F)$  et  $K = Sp_4(\mathcal{O})$ . Plus précisément on note  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $F^4$  et on munit  $F^4$  de la forme symplectique  $w$  telle que  $w(e_1, e_4) = 1$ ,  $w(e_2, e_3) = 1$  et  $w(e_i, e_j) = 0$  pour  $i+j \neq 5$ .

Soit  $\Lambda = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2, i \geq j\}$ . Pour  $(i, j) \in \Lambda$  on note

$$D(i, j) = \begin{pmatrix} \pi^{-i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi^{-j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi^i \end{pmatrix} \in G$$

L'application qui à  $(i, j) \in \Lambda$  associe  $KD(i, j)K$  induit une bijection entre  $\Lambda$  et  $K \backslash G / K$ .

On rappelle que pour une matrice  $A = (a_{kl})$  on note  $\|A\| = \max(|a_{kl}|)$ . Alors pour  $A \in G$ ,

$$A \in KD(i, j)K \text{ si et seulement si } \|A\| = q^i \text{ et } \|\Lambda^2 A\| = q^{i+j}. \quad (24)$$

On note  $B$  le sous-groupe de Borel de  $G$  (formé des matrices triangulaires supérieures) et

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z & w \\ 0 & 1 & y & z - xy \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y, z, w \in F \right\}$$

son radical unipotent. On note  $N_1$  et  $N_2$  les radicaux unipotents des paraboliques de  $G$  qui stabilisent la droite  $Fe_1$ , respectivement le plan lagrangien  $Fe_1 \oplus Fe_2$ . Ce sont les sous-groupes de  $N$  définis par

$$N_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y, z \in F \right\}$$

et

$$N_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & y & z \\ 0 & 1 & x & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y, z \in F \right\}.$$

On remarque que  $N_1$  est un groupe de Heisenberg et que  $N_2$  est abélien.

On va montrer les deux lemmes suivants.

**Lemme 2.1** *Pour toute fonction  $K$ -biinvariante  $f \in C_c(G)$ ,*

$$|f(D(i, j)) - f(D(i + 1, j - 1))| \leq (2q)q^{-\frac{j}{2}} \|f|_N\|_{A(N)}$$

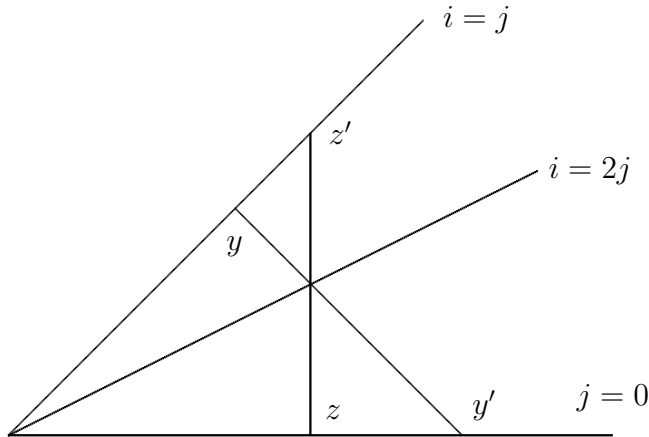
*pour  $(i, j) \in \Lambda$  vérifiant  $j \geq 3$ .*

**Lemme 2.2** *Pour toute fonction  $K$ -biinvariante  $f \in C_c(G)$ ,*

$$|f(D(i, j)) - f(D(i, j + 1))| \leq 2q^{-\frac{i-j}{2}} \|f|_{N_2}\|_{A(N_2)}$$

*pour  $(i, j) \in \Lambda$  vérifiant  $i \geq j + 1$ .*

Les lemmes 2.1 et 2.1 permettent de comparer les valeurs de  $f(D(i, j))$  en deux points voisins sur les segments  $yy'$  et  $zz'$  respectivement. Les estimées deviennent banales quand on se rapproche de  $y'$  ou de  $z'$ .

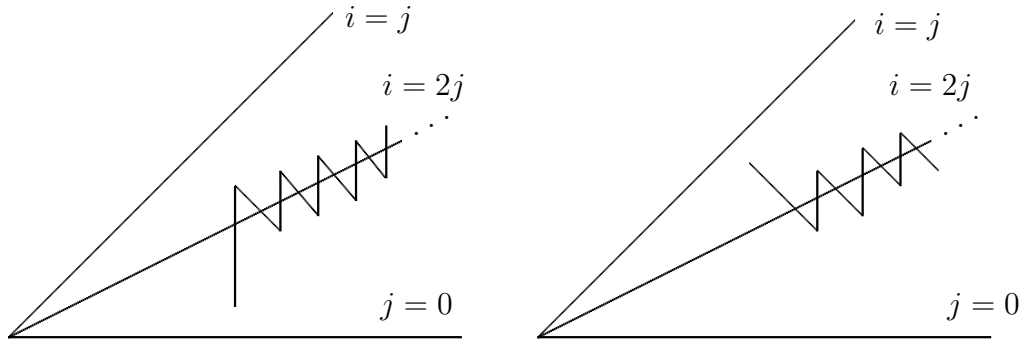


La situation est donc comparable à celle du lemme 1.5 (et non à celle du lemme 1.3, ce qui est étonnant puisqu'on utilise ici  $\|f|_N\|_{A(N)}$  et  $\|f|_{N_2}\|_{A(N_2)}$ , au lieu de  $\|f|_B\|_{A(B)}$ ). En particulier comme  $\|f|_{N_2}\|_{A(N_2)} \leq \|f|_N\|_{A(N)}$ , et en zigzaguant on déduit des lemmes 2.1 et 2.2 le corollaire suivant.

**Corollaire 2.3** *Il existe une constante  $C$  telle que pour toute fonction  $K$ -biinvariante  $f \in C_c(G)$ ,*

$$|f(D(i, j))| \leq Cq^{-\max(\frac{i+j}{6}, \frac{i}{4})} \|f|_N\|_{A(N)}.$$

**Démonstration.** La figure ci-dessous illustre l'argument de zigzag en partant d'un point arbitraire.  $\square$



Il est évident que le corollaire 2.3 implique l'existence d'une constante  $C$  telle que pour toute fonction  $K$ -biinvariante  $f \in C_c(G)$  on ait

$$\left| \sum_{i \in \mathbb{N}} f(D(i, 0)) \right| \leq C \|f|_N\|_{A(N)},$$

ce qui est l'analogie non archimédienne du lemme 0.6. Cependant le corollaire 2.3 est beaucoup plus fort.

## 2.1 Préliminaires à la démonstration des lemmes 2.1 et 2.2

Pour montrer les lemmes 2.1 et 2.2 on doit minorer les normes  $\|f|_N\|_{A(N)}$  et  $\|f|_{N_2}\|_{A(N_2)}$ . On pourrait utiliser la formule de Plancherel pour  $N$  comme on l'a fait pour  $SL_3$  mais cela serait un peu plus compliqué ici car  $N$  n'est pas un groupe de Heisenberg et il faudrait utiliser la théorie de Kirillov. Donc on utilisera plutôt les normes  $\|f|_N\|_{M_0A(N)}$  et  $\|f|_{N_2}\|_{M_0A(N_2)}$ , qui sont évidemment égales aux précédentes, et que l'on minorera en appliquant le lemme 2.6 ci-dessous à  $G = N$  et  $G = N_2$ .

Le lemme suivant est très proche du lemme 5.5 de [Laf09a] (et des estimées qui le suivent).

Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $k \in \{0, \dots, m\}$  on note

$$T_k = ((T_k)_{(a,b),(x,y)})_{(a,b) \in (\mathcal{O}/\pi^m \mathcal{O})^2, (x,y) \in (\mathcal{O}/\pi^m \mathcal{O})^2}$$

la matrice définie par

$$\begin{aligned} (T_k)_{(a,b),(x,y)} &= q^{-m} \text{ si } y = ax + b + \pi^k \text{ dans } \mathcal{O}/\pi^m \mathcal{O}, \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

On note que  $T_k$  est normalisé pour être un opérateur de norme 1 sur  $\ell^2((\mathcal{O}/\pi^m \mathcal{O})^2)$ . En fait le vecteur de norme 1 de  $\ell^2((\mathcal{O}/\pi^m \mathcal{O})^2)$  dont toutes les coordonnées sont égales à  $q^{-m}$  est vecteur propre de  $T_k$  avec comme valeur propre 1. Il en résulte que pour  $k \in \{1, \dots, m\}$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ,

$$\|\lambda T_k - \mu T_{k-1}\| \geq |\lambda - \mu|. \quad (25)$$

**Lemme 2.4** *Pour  $k \in \{1, \dots, m\}$ , on a  $\|T_k - T_{k-1}\| \leq 2q^{-\frac{k}{2}}$ .*

**Démonstration.** Comme  $(T_k)_{(a,b),(x,y)}$  et  $(T_{k-1})_{(a,b),(x,y)}$  ne dépendent que de  $y - b$  on a

$$\|T_k - T_{k-1}\| = \left( \sup_{\eta \in \widehat{\mathcal{O}/\pi^m \mathcal{O}}} |\eta(\pi^k) - \eta(\pi^{k-1})| q^{-m} \left\| (\eta(ax))_{a,x \in \mathcal{O}/\pi^m \mathcal{O}} \right\|_{\mathcal{L}(\ell^2(\mathcal{O}/\pi^m \mathcal{O}))} \right).$$

Si  $\eta(\pi^k) - \eta(\pi^{k-1}) \neq 0$  on a  $|\eta(\pi^k) - \eta(\pi^{k-1})| \leq 2$  et il existe  $l \in \{k, \dots, m\}$  tel que  $\eta$  se factorise par un caractère non dégénéré de  $\mathcal{O}/\pi^l \mathcal{O}$  (c'est-à-dire non trivial sur  $\pi^{l-1} \mathcal{O}/\pi^l \mathcal{O}$ ). Or pour un tel caractère on a

$$q^{-m} \left\| (\eta(ax))_{a,x \in \mathcal{O}/\pi^m \mathcal{O}} \right\|_{\mathcal{L}(\ell^2(\mathcal{O}/\pi^m \mathcal{O}))} = q^{-l} \left\| (\eta(ax))_{a,x \in \mathcal{O}/\pi^l \mathcal{O}} \right\|_{\mathcal{L}(\ell^2(\mathcal{O}/\pi^l \mathcal{O}))} = q^{-\frac{l}{2}}$$

car la matrice

$$q^{-\frac{l}{2}} (\eta(ax))_{a,x \in \mathcal{O}/\pi^l \mathcal{O}}$$

est unitaire (c'est une matrice de transformation de Fourier).  $\square$

**Lemme 2.5** *Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $G$  un groupe localement compact,  $f \in C_c(G)$  et  $\alpha, \beta : \{1, \dots, n\} \rightarrow G$  deux applications. Alors*

$$\left\| (f(\alpha(i)\beta(j))A_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \right\|_{M_n(\mathbb{C})} \leq \|f\|_{M_0 A(G)} \|A\|_{M_n(\mathbb{C})}.$$

**Démonstration.** C'est une des définitions équivalentes de  $\|\cdot\|_{M_0A(G)}$  (habituellement on écrit plutôt cette définition avec  $f(\alpha(i)^{-1}\beta(j))$  au lieu  $f(\alpha(i)\beta(j))$  mais les deux versions sont équivalentes).  $\square$

On utilisera une forme combinée des deux lemmes précédents.

**Lemme 2.6** *Soit  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \{1, \dots, m\}$ . Soit  $G$  un groupe localement compact et  $f \in C_c(G)$ . Soient  $\alpha, \beta : (\mathcal{O}/\pi^m\mathcal{O})^2 \rightarrow G$  deux applications et  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  tels que*

$$\begin{aligned} f(\alpha(a, b)\beta(x, y)) &= \lambda \quad \text{si } y = ax + b + \pi^k \text{ dans } \mathcal{O}/\pi^m\mathcal{O} \\ \text{et } f(\alpha(a, b)\beta(x, y)) &= \mu \quad \text{si } y = ax + b + \pi^{k-1} \text{ dans } \mathcal{O}/\pi^m\mathcal{O}. \end{aligned}$$

Alors  $|\lambda - \mu| \leq 2q^{-\frac{k}{2}}\|f\|_{M_0A(G)}$ .

**Démonstration.** Cela résulte immédiatement du lemme 2.5 appliqué à  $A = T_k - T_{k-1}$ , du lemme 2.4 et de (25).  $\square$

Pour la démonstration des lemmes 2.1 et 2.2 on fixera, pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , une section  $\sigma_m : \mathcal{O}/\pi^m\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$  de la projection  $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}/\pi^m\mathcal{O}$ . Le choix de cette section n'a aucune importance.

## 2.2 Démonstration du lemme 2.1

On va étudier séparément le cas où  $i + j$  est pair et le cas où  $i + j$  est impair.

**Démonstration du lemme 2.1 lorsque  $i + j$  est pair.**

Dans ce cas les calculs ont lieu dans  $N_1$  (et non dans  $N$ ).

Soit  $m = \frac{i+j}{2} - 1 \in \mathbb{N}^*$ . On définit les applications  $\alpha, \beta : (\mathcal{O}/\pi^m\mathcal{O})^2 \rightarrow N_1$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \alpha(a, b) &= \begin{pmatrix} 1 & -\pi^{-m-1} - \pi^{-m}\sigma_m(a) & 0 & -\pi^{-2m}\sigma_m(b) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \pi^{-m-1} + \pi^{-m}\sigma_m(a) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{et } \beta(x, y) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \pi^{-m}\sigma_m(x) & \pi^{-2m-1}\sigma_m(x) + \pi^{-2m}\sigma_m(y) \\ 0 & 1 & 0 & \pi^{-m}\sigma_m(x) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



On calcule

$$\alpha(a, b)\beta(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -\pi^{-m-1} - \pi^{-m}\sigma_m(a) & \pi^{-m}\sigma_m(x) & \pi^{-2m}(\sigma_m(y) - \sigma_m(b) - \sigma_m(a)\sigma_m(x)) \\ 0 & 1 & 0 & \pi^{-m}\sigma_m(x) \\ 0 & 0 & 1 & \pi^{-m-1} + \pi^{-m}\sigma_m(a) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que si  $y - (ax + b) = \pi^l$  dans  $\mathcal{O}/\pi^m\mathcal{O}$ , avec  $l \in \{0, \dots, m-1\}$ , on a

$$\|\alpha(a, b)\beta(x, y)\| = q^{2m-l} \text{ et } \|\Lambda^2(\alpha(a, b)\beta(x, y))\| = q^{2m+2}$$

et donc, grâce à (24),

$$\alpha(a, b)\beta(x, y) \in KD(2m-l, l+2)K. \quad (26)$$

Comme  $i+j = 2m+2$  et grâce à l'hypothèse  $j \geq 3$ , on a  $i \in \{m+1, 2m-1\}$ . On prend  $k = 2m-i \in \{1, \dots, m-1\}$ . On applique alors le lemme 2.6 avec  $N_1$  au lieu de  $G$ ,  $m, k, \alpha, \beta$  comme ci-dessus,

$$\lambda = f(D(i, j)) \text{ et } \mu = f(D(i+1, j-1)).$$

En appliquant (26) pour  $l = k$  et  $l = k-1$ , et comme

$$\begin{aligned} (i, j) &= (2m-l, l+2) \text{ pour } l = k \\ \text{et } (i+1, j-1) &= (2m-l, l+2) \text{ pour } l = k-1, \end{aligned}$$

les hypothèses du lemme 2.6 sont satisfaites. On obtient donc

$$|f(D(i, j)) - f(D(i+1, j-1))| \leq 2q^{-\frac{k}{2}} \|f|_{N_1}\|_{M_0A(N_1)} \leq 2q^{-\frac{k}{2}} \|f|_N\|_{M_0A(N)}.$$

$$\text{Or } \frac{k}{2} = \frac{2m-i}{2} = \frac{j}{2} - 1. \quad \square$$

**Démonstration du lemme 2.1 lorsque  $i+j$  est impair.**

Soit  $m = \frac{i+j-1}{2} \in \mathbb{N}^*$ . On définit les applications  $\alpha, \beta : (\mathcal{O}/\pi^m\mathcal{O})^2 \rightarrow N$  de la façon suivante :

$$\alpha(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & -\pi^{-m} - \pi^{-m+1}\sigma_m(a) & 0 & -\pi^{-2m+1}\sigma_m(b) \\ 0 & 1 & \pi^{-1} & \pi^{-m-1} + \pi^{-m}\sigma_m(a) \\ 0 & 0 & 1 & \pi^{-m} + \pi^{-m+1}\sigma_m(a) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \beta(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \pi^{-m}\sigma_m(x) & \pi^{-2m}\sigma_m(x) + \pi^{-2m+1}\sigma_m(y) \\ 0 & 1 & 0 & \pi^{-m}\sigma_m(x) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule

$$\alpha(a, b)\beta(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -\pi^{-m} - \pi^{-m+1}\sigma_m(a) & \pi^{-m}\sigma_m(x) & \pi^{-2m+1}(\sigma_m(y) - \sigma_m(b) - \sigma_m(a)\sigma_m(x)) \\ 0 & 1 & \pi^{-1} & \pi^{-m-1} + \pi^{-m}(\sigma_m(x) + \sigma_m(a)) \\ 0 & 0 & 1 & \pi^{-m} + \pi^{-m+1}\sigma_m(a) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que si  $y - (ax + b) = \pi^l$  dans  $\mathcal{O}/\pi^m\mathcal{O}$ , avec  $l \in \{0, \dots, m-2\}$ , on a

$$\|\alpha(a, b)\beta(x, y)\| = q^{2m-1-l} \text{ et } \|\Lambda^2(\alpha(a, b)\beta(x, y))\| = q^{2m+1}$$

et donc, grâce à (24),

$$\alpha(a, b)\beta(x, y) \in KD(2m-1-l, l+2)K. \quad (27)$$

Comme  $i+j = 2m+1$  et grâce à l'hypothèse  $j \geq 3$ , on a  $i \in \{m+1, 2m-2\}$ . On prend  $k = 2m-1-i \in \{1, \dots, m-2\}$ . On applique alors le lemme 2.6 avec  $N$  au lieu de  $G$ ,  $m, k, \alpha, \beta$  comme ci-dessus,

$$\lambda = f(D(i, j)) \text{ et } \mu = f(D(i+1, j-1)).$$

En appliquant (27) pour  $l = k$  et  $l = k-1$ , et comme

$$\begin{aligned} (i, j) &= (2m-1-l, l+2) \text{ pour } l = k \\ \text{et } (i+1, j-1) &= (2m-1-l, l+2) \text{ pour } l = k-1, \end{aligned}$$

les hypothèses du lemme 2.6 sont satisfaites. On obtient donc

$$|f(D(i, j)) - f(D(i+1, j-1))| \leq 2q^{-\frac{k}{2}} \|f|_N\|_{M_0A(N)}.$$

Or  $\frac{k}{2} = \frac{2m-1-i}{2} = \frac{j}{2} - 1$ . □

## 2.3 Démonstration du lemme 2.2

C'est maintenant que l'on utilise l'hypothèse que  $q$  est impair. Soit  $m = i \in \mathbb{N}^*$ . On définit les applications  $\alpha, \beta : (\mathcal{O}/\pi^m\mathcal{O})^2 \rightarrow N_2$  de la façon suivante :

$$\alpha(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \pi^{-m}\sigma_m(a) & \pi^{-m}\sigma_m(a^2 - b) \\ 0 & 1 & \pi^{-m} & \pi^{-m}\sigma_m(a) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \beta(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \pi^{-m}\sigma_m(\frac{x}{2}) & \pi^{-m}\sigma_m(\frac{x^2}{4} + y) \\ 0 & 1 & 0 & \pi^{-m}\sigma_m(\frac{x}{2}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme  $N_2$  est abélien on a évidemment

$$\alpha(a, b)\beta(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \pi^{-m}(\sigma_m(\frac{x}{2}) + \sigma_m(a)) & \pi^{-m}(\sigma_m(\frac{x^2}{4} + y) + \sigma_m(a^2 - b)) \\ 0 & 1 & \pi^{-m} & \pi^{-m}(\sigma_m(\frac{x}{2}) + \sigma_m(a)) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En notant

$$A = \begin{pmatrix} \pi^{-m}(\sigma_m(\frac{x}{2}) + \sigma_m(a)) & \pi^{-m}(\sigma_m(\frac{x^2}{4} + y) + \sigma_m(a^2 - b)) \\ \pi^{-m} & \pi^{-m}(\sigma_m(\frac{x}{2}) + \sigma_m(a)) \end{pmatrix}$$

la matrice extraite en haut à droite, on a

$$A = \begin{pmatrix} \pi^{-m}(\frac{x}{2} + a) & \pi^{-m}(\frac{x^2}{4} + y + a^2 - b) \\ \pi^{-m} & \pi^{-m}(\frac{x}{2} + a) \end{pmatrix} \bmod M_2(\mathcal{O})$$

et donc

$$\det(A) = -\pi^{-2m}(y - (ax + b)) \bmod \pi^{-m}\mathcal{O}.$$

Il en résulte que si  $y - (ax + b) = \pi^l$  dans  $\mathcal{O}/\pi^m\mathcal{O}$ , avec  $l \in \{0, \dots, m\}$ , on a

$$\|\alpha(a, b)\beta(x, y)\| = q^m \text{ et } \|\Lambda^2(\alpha(a, b)\beta(x, y))\| = q^{2m-l}$$

et donc, grâce à (24),

$$\alpha(a, b)\beta(x, y) \in KD(m, m-l)K. \quad (28)$$

On prend  $k = m - j = i - j \in \{1, \dots, m\}$  grâce à l'hypothèse  $i \geq j + 1$ . On applique alors le lemme 2.6 avec  $N_2$  au lieu de  $G$ ,  $m, k, \alpha, \beta$  comme ci-dessus,

$$\lambda = f(D(i, j)) \text{ et } \mu = f(D(i, j + 1)).$$

En appliquant (28) pour  $l = k$  et  $l = k - 1$ , et comme

$$(i, j) = (m, m - l) \text{ pour } l = k \text{ et } (i, j + 1) = (m, m - l) \text{ pour } l = k - 1,$$

les hypothèses du lemme 2.6 sont satisfaites. On obtient donc

$$|f(D(i, j)) - f(D(i, j + 1))| \leq 2q^{-\frac{k}{2}} \|f|_{N_2}\|_{M_0A(N_2)}.$$

Or  $\frac{k}{2} = \frac{i-j}{2}$ . □

## Références

- [CH85] J. De Cannière et U. Haagerup. Multipliers of the Fourier algebras of some simple Lie groups and their discrete subgroups. *Amer. J. Math.* 107(2) :455–500, 1985.
- [CDSW05] M. Cowling, B. Dorofaeff, A. Seeger et J. Wright. A family of singular oscillatory integral operators and failure of weak amenability. *Duke Math. J.* 127(3) : 429–486, 2005.
- [CH89] M. Cowling et U. Haagerup. Completely bounded multipliers of the Fourier algebra of a simple Lie group of real rank one. *Invent. Math.* 96(3) :507–549, 1989.
- [Dor93] B. Dorofaeff. The Fourier algebra of  $SL(2, \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , has no multiplier bounded approximate unit. *Math. Ann.* 297(4) : 707–724, 1993.
- [Haa86] U. Haagerup. Group  $C^*$ -algebras without the completely bounded approximation property, Preprint, 1986.
- [Laf08] V. Lafforgue. Un renforcement de la propriété  $(T)$ . *Duke Math. J.*, 143(3) :559–602, 2008.
- [Laf09a] V. Lafforgue. Propriété  $(T)$  renforcée et conjecture de Baum-Connes. Article destiné aux proceedings de la conférence "Géométrie non commutative en l'honneur d'Alain Connes" qui a eu lieu en 2007 à Paris. Cet article est disponible à l'adresse <http://people.math.jussieu.fr/~vlafforg/>
- [Laf09b] V. Lafforgue. Propriété  $(T)$  renforcée banachique et transformation de Fourier rapide. *Journal of Topology and Analysis* 1 (2009) no. 3, 191–206.