Une remarque sur les fonctions conditionnellement de type négatif

Vincent Lafforgue

8 février 2012

Résumé. Nous montrons qu'un groupe localement compact n'ayant pas la propriété (T) possède des fonctions conditionnellement de type négatif dont la croissance est au moins linéaire.

Je remercie Georges Skandalis et Yves de Cornulier pour des discussions très utiles, et Pierre Julg pour m'avoir signalé [FH74].

Si G est un groupe localement compact on appelle longueur sur G une fonction continue ℓ de G dans $\mathbb{R}_+$ telle que $\ell(1) = 0$, $\ell(g^{-1}) = \ell(g)$ et $\ell(g_1g_2) \leq \ell(g_1) + \ell(g_2)$ pour g, g_1, g_2 dans G.

Théorème 1 *Soit G un groupe discret, et ℓ une longueur sur ce groupe. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on note $G_n = \{g \in G, \ell(g) \leq n\}$. Supposons que G_1 est fini et que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, tout élément de G_n est le produit de n éléments de G_1 (donc ℓ est propre). Supposons que G n'a pas la propriété (T) de Kazhdan. Alors il existe un espace de Hilbert H muni d'une action affine, isométrique de G et un point $v \in H$, tel que, en notant*

$$a_n = \sup_{g \in G_n} \|gv - v\|_H,$$

on a $a_1 > 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq \frac{\sqrt{n}}{2} a_1$.

Comme $f(g) = \|gv - v\|_H^2$ est une fonction conditionnellement de type négatif sur G, on traduit aisément cet énoncé en termes de fonctions conditionnellement de type négatif.

Si on note $r_n(v)$ le rayon de la plus petite boule contenant $\{gv, g \in G_n\}$, on a $r_n(v) \leq a_n \leq 2r_n(v)$. Quitte à passer à la limite sur les fonctions conditionnellement de type négatif (après les avoir normalisées pour que $a_1 = 1$), et grâce à la construction GNS, on voit qu'il suffit de montrer le lemme suivant.

Lemme 2 *Soit G un groupe localement compact, et ℓ une longueur propre sur ce groupe. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on note $G_n = \{g \in G, \ell(g) \leq n\}$. Supposons que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, tout élément de G_n est le produit de n éléments de G_1. Soit H un espace de Hilbert muni d'une action affine, isométrique, continue et sans point fixe de G. Soient N un entier et $\epsilon > 0$. Alors il existe $v \in H$, tel que en notant $r_n(v)$ le rayon de la plus petite boule contenant $\{gv, g \in G_n\}$, on a pour tout entier $n \in \{1, ..., N\}$,*

$$r_n(v) \geq \sqrt{(1-\epsilon)n}\, r_1(v)$$

(et donc, en notant $a_n(v) = \sup_{g \in G_n} \|gv - v\|_H$, $a_n(v) \geq \frac{\sqrt{n(1-\epsilon)}}{2} a_1(v)$).

Nous démontrons ce lemme par l'absurde. Supposons que la conclusion est fausse. Nous allons montrer que pour tout $v \in H$, il existe $v' \in H$ tel que $r_1(v') \leq \sqrt{1-\epsilon}\, r_1(v)$ et $d(v, v') \leq 2N r_1(v)$. Cela amène une contradiction car, partant d'un point $w_0 \in H$, on construit, par récurrence sur n, une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de H en posant $v = w_n$ et en choisissant pour w_{n+1} un v' comme ci-dessus : on a alors $r_1(w_n) \leq (1-\epsilon)^{n/2} r_1(w_0)$ et

$$d(w_n, w_{n+1}) \leq 2N(1-\epsilon)^{n/2} r_1(w_0),$$

donc la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et sa limite est fixe par G, ce qui contredit l'hypothèse que l'action de G sur H est sans point fixe.

Il reste donc à montrer, sous l'hypothèse que la conclusion du lemme est fausse, que pour tout $v \in H$, il existe $v' \in H$ tel que

$$r_1(v') \leq \sqrt{1-\epsilon}\, r_1(v) \text{ et } d(v, v') \leq 2N r_1(v).$$

Soit $v \in H$. Il existe $n \in \{0, ..., N-1\}$ tel que $r_{n+1}(v)^2 - r_n(v)^2 \leq (1-\epsilon) r_1(v)^2$. Notons $B_n(v)$ la plus petite boule (de rayon $r_n(v)$) contenant $\{gv, g \in G_n\}$, et notons $c_n(v)$ son centre. On a $\{gv, g \in G_n\} \subset B_{n+1}(v)$ donc

$$\|c_n(v) - c_{n+1}(v)\|_H^2 \leq r_{n+1}(v)^2 - r_n(v)^2 \leq (1-\epsilon) r_1(v)^2$$

par un argument facile (lemme 4.7.1 de [Cor06]). De même pour tout $h \in G_1$, $h(\{gv, g \in G_n\}) \subset B_{n+1}(v)$ donc

$$\|h(c_n(v)) - c_{n+1}(v)\|_H^2 \leq r_{n+1}(v)^2 - r_n(v)^2 \leq (1-\epsilon) r_1(v)^2$$

par le même argument. On en déduit $r_1(c_n(v))^2 \leq (1-\epsilon) r_1(v)^2$. Or la distance entre v et $c_n(v)$ est inférieure ou égale à $2n r_1(v) \leq 2N r_1(v)$. On peut prendre $v' = c_n(v)$, donc le lemme est démontré.

On peut améliorer un peu la conclusion du théorème en remarquant que l'on a $a_{2n} \leq 2r_n(v)$, car a_{2n} est le diamètre de l'ensemble $\{gv, g \in G_n\}$, puisque tout élément de G_{2n} est le produit de deux éléments de G_n. On en déduit $a_n \geq \frac{\sqrt{n}}{2}a_2$. Dans le lemme précédent on peut de la même façon renforcer la conclusion par l'inégalité $a_n(v) \geq \frac{\sqrt{n(1-\epsilon)}}{2}a_2(v)$.

Pour les groupes localement compacts on ne peut pas faire une extraction diagonale comme dans l'argument précédent. Néanmoins on a le théorème suivant.

Théorème 3 *Soit G un groupe localement compact, et ℓ une longueur propre sur ce groupe. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on note $G_n = \{g \in G, \ell(g) \leq n\}$. Supposons que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, tout élément de G_n est le produit de n éléments de G_1. Supposons que G n'a pas la propriété (T) de Kazhdan. Alors il existe un espace de Hilbert H muni d'une action affine, isométrique et continue de G et un point $v \in H$, tel que, en notant $a_n = \sup_{g \in G_n} \|gv - v\|_H$, on a $a_1 > 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq (\frac{\sqrt{n}}{2} - 2)a_1$.*

Soit χ une fonction continue positive à support dans $G_{1/2}$, d'intégrale 1. En appliquant le lemme 2, et la remarque qui le suit, à $N = i$ et $\epsilon = 1/i$ on obtient pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ un espace de Hilbert affine H_i, muni d'une action isométrique et continue de G, et un point v_i de H_i, tels que, en posant $f_i(g) = \|gv_i - v_i\|^2$, on ait $\sup_{G_2} \sqrt{f_i} = 1$ et pour tout $n \in \{1, ..., i\}$, $\sup_{G_n} \sqrt{f_i} \geq \frac{\sqrt{n(1-1/i)}}{2}$. Posons $\tilde{v}_i = \int_G \chi(g)gv_i dg$ (cette intégrale a un sens car χ est d'intégrale 1) et posons $\tilde{f}_i(g) = \|g\tilde{v}_i - \tilde{v}_i\|^2$. Ces fonctions sont conditionnellement de type négatif, et equicontinues sur tout compact de G, donc par Ascoli on peut en extraire une sous-suite $\tilde{f}_{i_j}$, qui converge uniformément sur tout compact de G vers une fonction $\tilde{f}$, qui est aussi continue et conditionnellement de type négatif. Pour $g \in G_1$, on a

$$\sqrt{\tilde{f}_i(g)} = \| \int_{G_{1/2} \times G_{1/2}} \chi(h_1)\chi(h_2)(gh_1v_i - h_2v_i)dh_1dh_2\| \leq \sup_{G_2} \sqrt{f_i} = 1,$$

car $\|gh_1v_i - h_2v_i\| = \|h_2^{-1}gh_1v_i - v_i\|$ et $\ell(h_2^{-1}gh_1) \leq 2$. Par des inégalités triangulaires évidentes on a pour $n \leq i$,

$$\sup_{G_n} \sqrt{\tilde{f}_i} \geq \sup_{G_n} \sqrt{f_i} - 2.$$

D'où

$$\sup_{G_1} \sqrt{\tilde{f}} \leq 1 \text{ et } \sup_{G_n} \sqrt{\tilde{f}} \geq \frac{\sqrt{n}}{2} - 2.$$

Yves de Cornulier m'a fait remarquer que d'après [VK82] (voir aussi le petit texte "A lemma about conditionally negative definite functions" qui constitue le paragraphe 7.5 de la thèse de Cornulier [Cor05]), la suite des f_i possède une valeur d'adhérence pour la topologie duale de l'espace des fonctions f telles que $|f|f_0$ soit intégrable (où f_0 est une certaine fonction mesurable strictement positive sur G, bornée sur tout compact) et cette valeur d'adhérence est une fonction continue conditionnellement de type négatif mais dont la valeur en 0 n'est pas forcément égale à 0 (elle est seulement positive ou nulle). Cela donne un autre argument, avec une inégalité similaire mais un peu meilleure.

Le théorème 3 est en un sens optimal car nous allons montrer que pour le groupe $PGL_2(\mathbb{Q}_p)$ toute fonction continue conditionnellement de type négatif est de croissance au plus linéaire en la longueur. On rappelle que $G = PGL_2(\mathbb{Q}_p)$ agit isométriquement sur un arbre X de telle sorte que $K = PGL_2(\mathbb{Z}_p)$ soit le stabilisateur d'un sommet x. Soit ℓ la longueur $\ell(g) = d(x, gx)$. On sait que ℓ est une fonction conditionnellement de type négatif.

Proposition 4 *Soit f une fonction continue conditionnellement de type négatif sur $G = PGL_2(\mathbb{Q}_p)$. Alors $\frac{f(g)}{\ell(g)+1}$ admet une limite quand $\ell(g)$ tend vers l'infini.*

D'abord on peut supposer f biinvariante par K, quitte à modifier $\sqrt{f}$ par une fonction bornée (car toute action isométrique affine et continue de G sur un espace de Hilbert admet un point fixe par K). Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions sphériques continues de type positif de G, c'est-à-dire l'ensemble des coefficients de matrices de vecteurs K-invariants de norme 1 des représentations unitaires continues irréductibles de G. Pour $c \in \mathcal{C}$ on note $f_c = \frac{1-\Re c}{\sup_{g \in G_1}(1-\Re c)}$ et on note f_1 la limite des f_c quand c tend vers 1 : c'est une fonction continue conditionnellement de type négatif propre. On munit alors $\mathcal{C}$ de la topologie de la convergence sur les compacts (c'est la topologie de Fell si l'on identifie $\mathcal{C}$ à la partie sphérique du dual unitaire de G). Alors si f est une fonction conditionnellement de type négatif K-biinvariante, il existe une mesure positive ν sur $\mathcal{C}$ telle que $f = \int_{\mathcal{C}} f_c d\nu(c)$. En effet pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{-tf} = \int_{\mathcal{C}} c d\nu_t(c)$ pour une certaine mesure positive ν_t sur $\mathcal{C}$, et $f = \lim_{t \mapsto 0} \frac{1-e^{-tf}}{t}$. La limite de $\frac{f_1(g)}{\ell(g)+1}$ quand $\ell(g)$ tend vers l'infini existe et est non-nulle (on a une formule explicite pour f_1) et $\sup_{c \in \mathcal{C}, g \in G} \frac{f_c(g)}{\ell(g)+1} < +\infty$, donc $\frac{f(g)}{\ell(g)+1}$ admet une limite quand $\ell(g)$ tend vers l'infini, égale au produit de la limite pour f_1 et du poids de $\{1\}$ dans la mesure ν.

La proposition est vraie aussi avec $SO(n,1)$ (avec la fonction longueur ℓ associée à la distance hyperbolique sur l'espace symétrique) au lieu de $PGL_2(\mathbb{Q}_p)$: la démonstration est la même (voir [FH74] pages 207 et 208).

Yves de Cornulier m'a fait remarquer qu'un de ses résultats permet d'obtenir un groupe discret de type fini, n'ayant pas la propriété (T), dont les fonctions conditionnellement de type négatif croissent au plus linéairement en la longueur ce qui montre que le théorème 1 est en un sens optimal. En effet d'après les théorèmes 4.3.1 et 4.7.6 de Cornulier [Cor06], si Γ est un réseau irréductible dans $SO(4,1) \times SO(3,2)$, le morphisme d'image dense $\Gamma \to SO(4,1)$ est une "résolution affine", c'est-à-dire que pour toute action affine isométrique de Γ sur un espace de Hilbert H, il existe un sous-espace affine Γ-invariant tel que l'action de Γ sur ce sous-espace se prolonge une action continue de $SO(4,1)$. Par conséquent si ℓ est la fonction longueur sur Γ provenant de la fonction longueur sur $SO(4,1)$, et si f est une fonction conditionnellement de type négatif sur Γ, alors $\frac{f(g)}{\ell(g)+1}$ admet une limite quand $\ell(g)$ tend vers l'infini (et donc a fortiori f croît au plus linéairement par rapport à la longueur des mots de Γ).

Enfin remarquons que le théorème 1 permet de retrouver un résultat de Shalom [Sha00].

Corollaire 5 *(Shalom) Soit Γ un groupe de type fini ayant la propriété (T). Alors il existe un groupe de présentation finie Γ' ayant la propriété (T) tel que Γ soit un quotient de Γ'.*

En effet il existe des groupes de présentation finie Γ_i pour $i \in \mathbb{N}$, avec des morphismes surjectifs $\Gamma_i \to \Gamma_{i+1}$ tels que Γ soit la limite inductive des Γ_i. On choisit un système de générateurs de Γ_0 puis on munit chaque Γ_i de la fonction longueur associée à l'image de ce système de générateurs. Si aucun des Γ_i n'a la propriété (T), chacun possède une fonction conditionnellement de type négatif f_i telle que $\sup_{(\Gamma_i)_1} f_i = 1$ et $\sup_{(\Gamma_i)_n} f_i \geq n/4$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par extraction diagonale il existe une sous-suite i_j telle que les f_{i_j} convergent vers une fonction f sur Γ. Cette fonction est conditionnellement de type négatif et vérifie aussi $\sup_{(\Gamma)_1} f = 1$ et $\sup_{(\Gamma)_n} f \geq n/4$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et ceci contredit l'hypothèse selon laquelle Γ a la propriété (T).

Références

[Cor05] Y. de Cornulier. On Haagerup and Kazhdan Properties. Thèse, Lausanne, EPFL, 2005, disponible à l'adresse
`http://www.normalesup.org/~cornulier/ThesComp.pdf`

[Cor06] Y. de Cornulier. Relative Kazhdan property. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 39(2) : 301–333, 2006.

[FH74] J. Faraut et K. Harzallah. Distances hilbertiennes invariantes sur un espace homogène. *Ann Inst Fourier*, 24(3) :171–217, 1974.

[Sha00] Y. Shalom. Rigidity of commensurators and irreducible lattices. *Invent. Math.*, 141(1) :1–54, 2000.

[VK82] A.M. Vershik and S.I. Karpushev. Cohomology of groups in unitary representations, neighborhood of the identity and conditionally positive definite functions. (Russian) *Mat. Sb. (N.S.)* 119(161) no. 4, 521–533, 590 (1982), traduit dans *Math USSR Sbornik* 47(2) :513–526, 1984.