THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD

spécialité

MATHÉMATIQUES

présentée par

Vincent LAFFORGUE

Sujet de la thèse:

K-THÉORIE BIVARIANTE POUR LES ALGÈBRES DE BANACH ET CONJECTURE DE BAUM-CONNES

Thèse soutenue le lundi 15 mars 1999 devant le jury composé de

M. Jean-Benoît Bost (Directeur de thèse)
M. Laurent Clozel
M. Alain Connes
M. Michel Duflo
M. Guennadi Kasparov (Rapporteur)
M. Georges Skandalis

À mes parents

Remerciements.

Je remercie avant tout Jean-Benoît Bost pour m'avoir proposé comme sujet de thèse la construction d'une K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach en vue d'aborder la conjecture de Baum-Connes pour des groupes possédant la propriété (T). A la suite de ses travaux personnels sur le principe d'Oka, et grâce à sa propre intuition et à sa connaissance de la théorie des représentations, Jean-Benoît Bost avait acquis la conviction que l'on devait pouvoir démontrer un résultat analogue à la conjecture de Baum-Connes pour les algèbres L^1 des sous-groupes fermés des groupes de Lie semi-simples. Ce résultat, que je ne suis parvenu à établir qu'à la fin de ma thèse, a guidé toute ma recherche. Jean-Benoît Bost a dirigé ma thèse avec énormément d'attention. Au début de ma thèse il m'a demandé d'étudier les équivalences de Morita entre algèbres de Banach, et c'est ainsi que j'ai été amené à trouver une définition équivalente de la K-théorie des algèbres de Banach, en introduisant la notion de paire, qui est à la base de mon travail.

C'est grâce aux encouragements de Georges Skandalis que je suis parvenu à construire l'homotopie entre γ et 1 pour les groupes agissant sur des espaces boliques et il m'a donné une indication très importante pour la partie algébrique de l'homotopie. Je n'ai réussi à construire l'homotopie entre γ et 1 pour les groupes agissant sur des variétés de courbure négative ou nulle que quelques mois plus tard. J'ai utilisé pour cela une réalisation de l'élément γ obtenue en conjuguant le complexe de de Rham sur la variété par $e^{-\rho^2}$, où ρ est la distance à un point fixe. Cette réalisation m'a été expliquée par Alain Connes et Georges Skandalis.

Je remercie aussi Jean-Benoît Bost et Georges Skandalis pour avoir corrigé les versions préliminaires de ma thèse, et pour avoir beaucoup simplifié certaines démonstrations.

Michel Duflo m'a beaucoup aidé en m'expliquant les travaux de Zelobenko sur les groupes de Lie semi-simples complexes et en répondant avec gentillesse à toutes mes questions sur les groupes de Lie.

J'ai aussi profité de nombreuses discussions avec Yves Benoist sur les immeubles et sur les sous-groupes discrets des groupes de Lie.

Je remercie Laurent Clozel pour m'avoir aidé à rédiger la partie du chapitre 4 qui concerne les groupes p-adiques.

J'ai effectué ma thèse au Département de Mathématiques et d'Informatique de l'Ecole Normale Supérieure dans d'excellentes conditions. Je suis très reconnaissant à Jean-Bernard Zuber et aux autres membres du Service de Physique Théorique du centre de Saclay pour l'année que j'ai passée parmi eux, dans le cadre de mon service national.

Je remercie Joachim Cuntz et Guennadi Kasparov d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse.

Introduction.

Cette introduction est composée de trois parties : un exposé historique, l'explication de l'idée principale de la thèse, et la description des applications à la conjecture de Baum-Connes.

Exposé historique. Soient G un groupe localement compact et $\underline{E}G$ l'espace classifiant les actions propres de G, défini dans [BCH94]. On appelle K-théorie topologique de G et on note $K_*^{top}(G)$ la K-homologie G-équivariante de $\underline{E}G$. On rappelle que la C^*-algèbre réduite de G, notée $C_r^*(G)$, est la complétion de l'algèbre $C_c(G)$ des fonctions continues à support compact de G dans $\mathbb{C}$ pour l'action par convolution à gauche sur $L^2(G)$. L'article [BCH94] définit une application, dite de Baum-Connes, $\mu_r : K_*^{top}(G) \to K_*(C_r^*(G))$, de la K-théorie topologique de G vers la K-théorie de la C^*-algèbre réduite de G. La conjecture de Baum-Connes, élaborée progressivement dans [BC82, BC88a, BC88b, BCH94], affirme que pour tout groupe localement compact G, μ_r est une bijection.

L'idée de cette conjecture est que dans un certain nombre de cas $K_*^{top}(G)$ n'est pas trop difficile à calculer, tandis que la K-théorie de $C_r^*(G)$ donne des informations intéressantes sur les représentations unitaires tempérées de G, même lorsque G n'est pas de type I, et constitue un bon réceptacle pour les théorèmes d'indice G-équivariants. Supposons par exemple que G est un groupe de Lie semi-simple (nous appelons ainsi un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est semi-simple et dont le morphisme adjoint a un noyau fini) et notons K un sous-groupe compact maximal de G. Alors $\underline{E}G = G/K$ et d'après [BCH94], si nous supposons pour simplifier que la représentation spinorielle associée à la représentation adjointe de $\mathfrak{k}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ provient d'une représentation de K, alors $K_*^{top}(G)$ est égal à l'anneau des représentations de K. Au contraire $K_*(C_r^*(G))$ est lié à la topologie du dual tempéré de G, et contient en particulier une copie de $\mathbb{Z}$ pour chaque représentation de la série discrète de G. Dans ce cas la conjecture de Baum-Connes implique que les éléments de la série discrète de G s'obtiennent tous par induction de Dirac.

Rappelons la conjecture de Baum-Connes à coefficients, qui généralise la conjecture sans coefficients. Soient G un groupe localement compact et $\underline{E}G$ le classifiant des actions propres de G. Pour toute G-C^*-algèbre A on pose $K_*^{top}(G,A) = \varinjlim KK_G(C_0(Z), A)$ où la limite est prise suivant les parties G-invariantes et G-compactes Z de $\underline{E}G$. Dans l'article [BCH94], Baum, Connes et Higson définissent un homomorphisme $\mu_r^A : K_*^{top}(G,A) \to K_*(C_r^*(G,A))$ et conjecturent que cet homomorphisme est toujours bijectif. On dit qu'un groupe G vérifie la conjecture de Baum-Connes à coefficients si pour toute G-C^*-algèbre A, μ_r^A est une bijection. La conjecture de Baum-Connes à coefficients a la particularité suivante : si elle est vraie pour un groupe elle est aussi vraie pour tous ses sous-groupes fermés.

La conjecture de Baum-Connes sans coefficients a été vérifiée pour les groupes de Lie linéaires semi-simples connexes par Wassermann dans [Was87] et pour le groupe GL_n sur un corps p-adique par Baum, Higson et Plymen dans [BHP97], par identification des deux termes et en s'appuyant sur la connaissance explicite du dual tempéré de ces groupes, c'est-à-dire sur un immense travail. Il n'est pas possible de procéder ainsi pour les réseaux des groupes de Lie semi-simples ou des groupes réductifs sur un corps p-adique.

La méthode la plus puissante pour aborder la conjecture de Baum-Connes a été inventée par Kasparov afin de résoudre la conjecture de Novikov. Elle figure dans son preprint de 1981, antérieur à l'énoncé de la conjecture de Baum-Connes, et repose sur la KK-théorie équivariante de Kasparov. Le premier exemple d'application de cette méthode est le suivant. Soient G un groupe de Lie semi-simple (plus précisément un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est semi-simple et dont le morphisme adjoint a un noyau fini) et K un sous-groupe compact maximal de G. On suppose de nouveau que la représentation spinorielle associée à la représentation adjointe de $\mathfrak{k}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ provient d'une représentation de K. Kasparov construit alors, dans [Kas81, Kas88], un élément $[d] \in KK_G(C_0(G/K), \mathbb{C})$ défini à l'aide d'un opérateur de Dirac sur G/K et un élément dit "dual-Dirac" $\eta \in KK_G(\mathbb{C}, C_0(G/K))$. Il montre que $[d] \otimes_{\mathbb{C}} \eta = 1 \in KK_G(C_0(G/K), C_0(G/K))$. Par suite $\gamma = \eta \otimes_{C_0(G/K)} [d]$ est un idempotent de $KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ et, pour toute G-C^*-algèbre A, $j_r(\sigma_A(\gamma))$ est un idempotent dans $KK(C_r^*(G, A), C_r^*(G, A))$ et induit un projecteur sur $K_*(C_r^*(G, A))$ et Kasparov montre que μ_r^A est injective d'image l'image de ce projecteur dans $K_*(C_r^*(G, A))$.

Cette méthode, qui prouve l'injectivité de μ_r^A pour toute G-C^*-algèbre A, a été étendue à une classe extrêmement vaste de groupes, que nous notons $\mathcal{C}$, par Kasparov et Skandalis, et Higson et Kasparov : cette classe $\mathcal{C}$ est formée

– par les groupes agissant proprement, continûment et isométriquement sur une variété riemannienne complète simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle (voir [Kas88]), ou sur un immeuble de Bruhat-Tits affine (voir [KS91]), ou sur un espace métrique uniformément localement fini, faiblement géodésique et faiblement bolique (voir [KS94]) (ce cas contient le précédent)

– par les groupes discrets agissant proprement et par isométries sur un espace métrique faiblement géodésique, faiblement bolique et de géométrie grossière bornée (voir [KS])

– et par les groupes vérifiant la propriété de Haagerup, c'est-à-dire agissant de façon affine isométrique et propre sur un espace de Hilbert (voir [HK97]).

La classe $\mathcal{C}$ contient donc en particulier les groupes hyperboliques au sens de Gromov, les sous-groupes fermés des groupes de Lie semi-simples (dont l'algèbre de Lie est semi-simple et dont le morphisme adjoint a un noyau fini) et des groupes réductifs sur un corps p-adique et les groupes moyennables. L'injectivité de l'application de Baum-Connes à coefficients est donc démontrée pour tous ces groupes et repose en quelque sorte sur des considérations géométriques, alors que la surjectivité est plutôt un problème d'analyse.

Pour aborder la question de la surjectivité nous devons rappeler de façon plus précise le résultat auquel aboutit la construction Dirac-dual-Dirac pour les groupes appartenant à la classe $\mathcal{C}$. Nous rappelons d'abord la définition de $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$, donnée dans [Kas88]. Pour tout groupe localement compact G on note $E_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de triplets (H,π,F) où $H = H_+ \oplus H_-$ est un espace de Hilbert $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué, π est une représentation unitaire de G sur H préservant la graduation et F est un élément impair de $\mathcal{L}(H)$ tel que $F^2 - 1$ soit compact et que $g \mapsto \pi(g)F\pi(g)^{-1} - F$ soit une application continue de G dans l'espace $\mathcal{K}(H)$ des opérateurs compacts sur H. On note $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ le quotient de $E_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ par une relation d'homotopie faible dont l'idée est la suivante : deux éléments (H_0,π_0,F_0) et (H_1,π_1,F_1) de $E_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ sont homotopes s'il existe un champ continu d'espaces de Hilbert $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradués $(H_t)_{t\in[0,1]}$, au sens de [Dix64], muni d'un champ continu $(\pi_t)_{t\in[0,1]}$ de représentations unitaires de G et un champ continu d'opérateurs impairs $(F_t)_{t\in[0,1]}$, tels que $F_t^2 - 1$ et $\pi_t(g)F_t\pi_t(g)^{-1} - F_t$ soient compacts de façon uniforme en t et en g quand t parcourt $[0,1]$ et g parcourt un compact de G. La somme directe munit $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ d'une structure de groupe abélien. On note $1 \in KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ la classe de $(\mathbb{C}, \text{représentation triviale}, 0)$.

Les deux faits suivants sont fondamentaux pour nous :
a) d'après [Kas88] il existe, pour tout groupe localement compact G, un homomorphisme $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C}) \to \mathrm{End}(K_*(C_r^*(G)))$ tel que l'image de 1 par cet homomorphisme soit Id,
b) d'après [Kas88], [KS91], [KS94], [KS], [HK97], et [Tu98], pour tout groupe G dans la classe $\mathcal{C}$ il existe $\gamma \in KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ tel que l'image de γ par l'homomorphisme $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C}) \to \mathrm{End}(K_*(C_r^*(G)))$ soit un projecteur et que μ_r soit une bijection de $K_*^{top}(G)$ vers l'image de ce projecteur.

Pour montrer la surjectivité de l'application de Baum-Connes, si l'on excepte les méthodes de [Was87] et [BHP97] que nous avons mentionnées cidessus, la seule voie connue jusqu'à présent était de montrer l'égalité $\gamma = 1$ dans $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$, pour des groupes G appartenant à la classe $\mathcal{C}$. Lorsque $\gamma = 1$ on obtient la conjecture de Baum-Connes à coefficients. Malheureusement les groupes pour lesquels on a $\gamma = 1$ ne représentent qu'une portion de la classe $\mathcal{C}$. L'égalité $\gamma = 1$ a été démontrée pour les groupes de Lorentz $SO(n,1)$ par Kasparov dans [Kas84], pour $SU(n,1)$ par Julg et Kasparov dans [JK95], pour $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ par Julg et Valette dans [JV84] et pour tous les groupes vérifiant la propriété de Haagerup par Higson et Kasparov dans [HK97, HKT98]. En fait, dans [JV84], Julg et Valette ont montré une égalité $\gamma = 1$ pour un certain élément γ mais sans posséder les éléments Dirac et dual-Dirac, qui furent construits par kasparov et Skandalis dans [KS91]. Cette égalité leur permettait de montrer la K-moyennabilité des groupes agissant proprement sur les arbres. Des résultats analogues avaient déjà été établis pour les groupes libres par Pimsner,Voiculescu et Cuntz dans [PV82] et [Cun83]. Le résultat de Julg et Valette permit à Pimsner dans [Pim86] de construire une suite exacte exprimant la K-théorie d'un groupe agissant sur un arbre en fonction des stabilisateurs des sommets et des arêtes. Cette méthode a été raffinée depuis et a permis à Oyono de montrer le résultat suivant : d'après [OO98] (voir aussi [Tu97, BBV96] pour des résultats voisins) la conjecture de Baum-Connes à coefficients est vraie pour tout groupe discret dénombrable agissant sur un arbre orienté à condition que les stabilisateurs des sommets la vérifient.

En revanche, pour tout groupe G dans la classe $\mathcal{C}$ γ est différent de 1 dans $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ dès que G est non compact et possède la propriété (T) de Kazdhan car l'égalité $\gamma = 1$ impliquerait la bijectivité de l'application de Baum-Connes à valeurs dans la C^*-algèbre maximale $\mu : K_*^{top}(G) \to K_*(C^*(G))$ et la bijectivité de l'application $K_*(C^*(G)) \to K_*(C_r^*(G))$. Or l'application $K_*(C^*(G)) \to K_*(C_r^*(G))$ n'est injective pour aucun groupe non compact vérifiant la propriété (T). Rappelons qu'un grand nombre de groupes possèdent la propriété (T), en particulier les groupes $Sp(n,1)$ et $F_{4(-20)}$ (d'après Kostant), et tous les groupes de Lie semi-simples connexes, ou réductifs sur un corps p-adique, de rang supérieur ou égal à deux, et tous les réseaux dans les groupes ci-dessus (d'après Kazdhan) : ces résultats sont exposés dans les chapitres 2, 3, et 9 de [dlHV89]. Julg a proposé dans [Jul97] une méthode susceptible de résoudre la conjecture de Baum-Connes à coefficients pour $Sp(n,1)$, et fondée sur la notion de représentation uniformément bornée d'un groupe dans un espace de Hilbert. Cette idée de Julg est voisine de l'idée principale de cette thèse, que nous allons maintenant exposer.

Idée principale. Lorsqu'un groupe G possède la propriété (T) la représentation triviale est isolée parmi les représentations unitaires de G. En revanche, pour tout groupe G localement compact et non compact, et pour toute suite $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[1,+\infty[$ tendant vers l'infini, la représentation de G par translation à gauche sur la somme directe $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}^{l^1} L^{p_i}(G)$ possède presque des vecteurs invariants, au sens de la définition 1 du chapitre 1 de [dlHV89], mais ne contient pas de vecteur invariant non nul. D'où l'idée de remplacer, dans la définition de $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$, les représentations unitaires de G dans des espaces de Hilbert par des représentations isométriques de G dans des espaces de Banach.

Dans cette thèse nous construisons, pour tout groupe localement compact G, une variante de $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$, notée $KK_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$, obtenue en remplaçant les espaces de Hilbert munis d'une représentation unitaire de G, qui interviennent dans la définition de $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$, par des espaces de Banach, munis d'une représentation isométrique de G, et nous possédons une application évidente $\iota : KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C}) \to KK_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Nous montrons une égalité légèrement plus faible que l'égalité $\iota(\gamma) = 1$ dans $KK_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ pour une classe de groupes $\mathcal{C}'$ à peine moins vaste que la classe $\mathcal{C}$, et contenant un grand nombre de groupes possédant la propriété (T).

La classe $\mathcal{C}'$ est formée par les groupes localement compacts agissant de façon continue, isométrique et propre

- sur une variété riemannienne complète simplement connexe, dont la courbure sectionnelle est négative ou nulle et bornée inférieurement,
- ou sur un immeuble affine de Bruhat-Tits uniformément localement fini
- ou sur un espace métrique uniformément localement fini, faiblement géodésique, faiblement bolique et vérifiant une condition supplémentaire de bolicité forte (ce cas contient le précédent),

et par les groupes vérifiant la propriété de Haagerup. La classe $\mathcal{C}'$ contient en particulier les sous-groupes fermés des groupes de Lie semi-simples (dont l'algèbre de Lie est semi-simple et dont le morphisme adjoint a un noyau fini) et des groupes réductifs sur un corps p-adique et les groupes discrets agissant de façon continue, isométrique, propre et cocompacte sur un espace $CAT(0)$.

Avant de passer aux applications donnons un énoncé précis du résultat ci-dessus.

On appelle $\mathbb{C}$-paire un triplet $(E^<, E^>, \langle\ ,\ \rangle)$, où $E^<$ et $E^>$ sont des espaces de Banach et $\langle\ ,\ \rangle : E^< \otimes E^> \to \mathbb{C}$ est une application bilinéaire telle que $|\langle \xi, x\rangle| \leq \|\xi\|_{E^<}\|x\|_{E^>}$ pour $\xi \in E^<$ et $x \in E^>$.

Lorsque E et F sont des $\mathbb{C}$-paires on appelle morphisme de $\mathbb{C}$-paires de E dans F un couple $f = (f^<, f^>)$, où $f^> : E^> \to F^>$ et $f^< : F^< \to E^<$ sont des applications linéaires continues formellement transposées l'une de l'autre, c'est-à-dire telles que $\langle f^<(\eta), x\rangle = \langle \eta, f^>(x)\rangle$ pour $\eta \in F^<$ et $x \in E^>$. On pose $\|f\| = \max(\|f^<\|, \|f^>\|)$ si bien que l'espace $\mathcal{L}(E,F)$ des morphismes de $\mathbb{C}$-paires de E dans F, muni de cette norme, est un espace de Banach.

Pour tous $y_0 \in F^>$ et $\xi_0 \in E^<$ on note $|y_0\rangle\langle\xi_0|$ le morphisme f de $\mathbb{C}$-paires de E dans F défini par $f^>(x) = y_0\langle\xi_0, x\rangle$ et $f^<(\eta) = \langle\eta, y_0\rangle\xi_0$. On note $\mathcal{K}(E,F)$ l'adhérence dans $\mathcal{L}(E,F)$ de l'espace vectoriel engendré par les morphismes du type $|y_0\rangle\langle\xi_0|$. On appelle opérateurs compacts les éléments de $\mathcal{K}(E,F)$.

Lorsque G est un groupe localement compact, on appelle norme sur G une application continue $N : G \to [1,+\infty[$ telle que $N(g_1g_2) \leq N(g_1)N(g_2)$ pour tous $g_1, g_2 \in G$. On appelle (G,N)-$\mathbb{C}$-paire une $\mathbb{C}$-paire $E = (E^<, E^>)$, avec $E^<$ et $E^>$ munis d'actions continues de G telles que $\langle g\xi, gx\rangle = \langle\xi, x\rangle$, $\|g\xi\|_{E^<} \leq N(g^{-1})\|\xi\|_{E^<}$ et $\|gx\|_{E^>} \leq N(g)\|x\|_{E^>}$ pour $g \in G$, $\xi \in E^<$ et $x \in E^>$. On note $E^{\mathrm{ban}}_{G,N}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de couples (E,T) où E est une (G,N)-$\mathbb{C}$-paire $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée, et T est un élément impair de $\mathcal{L}(E)$ tel que $T^2 - \mathrm{Id}_E$ soit compact et que $g \mapsto g(T) - T$ soit une application continue de G dans $\mathcal{K}(E)$, en notant $g(T) = (gT^<g^{-1}, gT^>g^{-1}) \in \mathcal{L}(E)$. On note $KK^{\mathrm{ban}}_{G,N}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ le quotient de $E^{\mathrm{ban}}_{G,N}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ par une relation d'homotopie faible semblable à celle utilisée pour définir $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$. La somme directe munit $KK^{\mathrm{ban}}_{G,N}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ d'une structure de groupe abélien. On note $1 \in KK^{\mathrm{ban}}_{G,N}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ la classe de $(\mathbb{C}, 0)$.

Pour toute norme N sur G on a un homomorphisme évident $\iota : KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C}) \to KK^{\mathrm{ban}}_{G,N}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.

Nous montrons le résultat suivant : pour tout groupe G dans la classe $\mathcal{C}'$ il existe une suite $(N_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de normes sur G, décroissante et convergeant uniformément vers 1 sur tout compact de G et telle que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ on ait $\iota(\gamma) = 1$ dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,N_i}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.

Applications à la conjecture de Baum-Connes. Pour appliquer ce résultat à la conjecture de Baum-Connes nous construisons une variante de la KK-théorie équivariante de Kasparov adaptée à la catégorie des algèbres de Banach que nous notons KK^{ban}. Si A et B sont deux algèbres de Banach (avec BB dense dans B) nous construisons un homomorphisme $KK^{\mathrm{ban}}(A,B) \to \mathrm{Hom}(K_*(A), K_*(B))$ mais nous ne savons pas construire le produit de Kasparov en général. En revanche nous possédons encore une application de descente. Nous appelons bonne complétion de $C_c(G)$ une complétion de $C_c(G)$ pour une norme telle que $\|f\|$ ne dépende que de $g \mapsto |f(g)|$ et en dépende de manière croissante. En particulier $L^1(G)$ est toujours une bonne complétion de $C_c(G)$. Pour tout groupe localement compact G, pour toute norme N sur G et pour toute bonne complétion $\mathcal{A}(G)$ de $C_c(G)$ nous construisons un homomorphisme $KK^{\mathrm{ban}}_{G,N}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}_N(G), \mathcal{A}(G))$, où $\mathcal{A}_N(G)$ désigne la complétion de $C_c(G)$ pour la norme $\|f\| = \big\|g \mapsto N(g)|f(g)|\big\|_{\mathcal{A}(G)}$. De plus cette KK-théorie banachique vérifie toutes sortes de compatibilités avec la théorie de Kasparov.

Pour toute bonne complétion $\mathcal{A}(G)$ de $C_c(G)$, pour toute suite $(N_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de normes sur G, décroissante et convergeant uniformément vers 1 sur tout compact de G, $\mathcal{A}(G)$ est la limite inductive au sens des algèbres de Banach des $\mathcal{A}_{N_i}(G)$, et on a donc $K_*(\mathcal{A}(G)) = \varinjlim K_*(\mathcal{A}_{N_i}(G))$. Il résulte de ce qui précède que pour tout groupe G dans la classe $\mathcal{C}'$ l'image de $\iota(\gamma)$ par $KK_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}(G),\mathcal{A}(G)) \to \mathrm{End}(K_*(\mathcal{A}(G))$ est Id.

Nous en tirons essentiellement deux conséquences concernant la conjecture de Baum-Connes.

D'abord nous énonçons une conjecture analogue à celle de Baum-Connes en remplaçant $C_r^*(G)$ par une bonne complétion de $C_c(G)$: pour tout groupe localement compact G et pour toute bonne complétion $\mathcal{A}(G)$ de $C_c(G)$ nous construisons une application de Baum-Connes $\mu_{\mathcal{A}} : K_*^{top}(G) \to K_*(\mathcal{A}(G))$. Nous montrons que cette application est bijective pour tout groupe G dans la classe $\mathcal{C}'$ et pour toute bonne complétion $\mathcal{A}(G)$ de $C_c(G)$. Il y a également un énoncé à coefficients.

Nous en déduisons la conjecture de Baum-Connes classique sans coefficients, c'est-à-dire la bijectivité de $\mu_r : K_*^{top}(G) \to K_*(C_r^*(G))$, pour les groupes G de la classe $\mathcal{C}'$ tels que $C_r^*(G)$ possède une sous-algèbre dense $\mathcal{A}(G)$ qui est une bonne complétion de $C_c(G)$ et telle que $K_*(\mathcal{A}(G)) \to K_*(C_r^*(G))$ soit surjective (c'est le cas en particulier si $\mathcal{A}(G)$ est stable par calcul fonctionnel holomorphe dans $C_r^*(G)$). Parmi ces groupes figurent les suivants :

– les groupes de Lie semi-simples (plus précisément les groupes de Lie dont l'algèbre de Lie est semi-simple et dont le morphisme adjoint a un noyau fini) et pour les groupes réductifs sur un corps p-adique,

– tous les groupes discrets appartenant à la classe $\mathcal{C}'$ et possédant la propriété (RD) de Jolissaint donc en particulier les sous-groupes discrets cocompacts de $Sp(n,1)$ et $SL_3(\mathbb{R})$ et les sous-groupes discrets de type fini de $SL_3(\mathbb{F})$, où $\mathbb{F}$ est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.

En effet si G est un groupe de Lie semi-simple (au sens défini ci-dessus) ou un groupe réductif sur un corps p-adique, nous définissons au chapitre 4 une variante $\mathcal{A}(G)$ de l'espace de Schwartz de G de la façon suivante : on se donne Φ une fonction d'Harish-Chandra sur G, $\|.\|$ une norme matricielle sur G et $s \in \mathbb{R}_+$ assez grand, et on pose $\|f\|_{\mathcal{A}(G)} = \sup_{g\in G} |f(g)|\Phi(g)^{-1}(1+\log\|g\|)^s$. Alors $\mathcal{A}(G)$ est une bonne complétion de $C_c(G)$ et une sous-algèbre de $C_r^*(G)$ dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe.

D'autre part si Γ est un groupe discret vérifiant la propriété (RD) de Jolissaint, relativement à une longueur l (voir [Jol90]), pour $s \in \mathbb{R}_+$ assez grand, l'algèbre de Jolissaint $H^s(\Gamma)$ définie comme la complétion de $\mathbb{C}\Gamma$ pour la norme $\|f\| = \left(\sum_{g\in\Gamma} |f(g)|^2(1+l(g))^{2s}\right)^{\frac{1}{2}}$ est une bonne complétion de $C_c(G)$ et une sous-algèbre de $C^*_r(G)$ dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe.

Or d'après [dlH88, RRS97, Laf98] les groupes hyperboliques les sous-groupes discrets de type fini de $SL_3(\mathbb{F})$, où $\mathbb{F}$ est un corps p-adique, et les sous-groupes discrets cocompacts de $SL_3(\mathbb{R})$ possèdent la propriété (RD).

Pour conclure notons qu'il serait souhaitable d'établir un lien entre la KK-théorie banachique développée ci-dessous et la kk-théorie construite par Cuntz [Cun97]. Par exemple le produit de Kasparov est bien défini dans la théorie de Cuntz mais nous ne savons pas le construire pour KK^{ban}.

Dans le premier chapitre nous définissons la KK-théorie banachique et nous étudions ses propriétés. Nous réalisons l'homotopie entre γ et 1 pour les groupes agissant sur des espaces boliques dans le deuxième chapitre et pour les groupes agissant sur des variétés de courbure négative ou nulle dans le troisième chapitre. Dans le quatrième chapitre nous construisons les espaces de Schwartz que nous avons évoqués ci-dessus. Enfin nous récapitulons les résultats obtenus dans la conclusion.

Chapitre 1

Une version naïve de la K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach

1.1 Paires

Dans la suite les algèbres de Banach ne sont pas supposées unitaires.

Commençons par rappeler les notions d'algèbre de Banach et de module de Banach.

On appelle espace de Banach un espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$ muni d'une norme $\|.\|_E$ qui le rend complet. Une *algèbre de Banach* B est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ muni d'une norme $\|.\|_B$ qui en fait un espace de Banach et d'une structure d'algèbre sur $\mathbb{C}$ telle que, pour $a, b \in B$, $\|ab\|_B \leq \|a\|_B \|b\|_B$. On dit qu'une algèbre de Banach B est *non dégénérée* si le sous-espace vectoriel BB de B engendré par les produits de deux éléments de B est dense dans B ou en d'autres termes si le produit $B \otimes^{alg} B \to B$ est d'image dense.

Si B est une algèbre de Banach, on appelle *B-module de Banach* à droite (resp. à gauche) un espace de Banach E dont la norme est notée $\|.\|_E$, muni d'une structure de B-module à droite (resp. à gauche) telle que pour $x \in E$, et $b \in B$, on ait $\|xb\|_E \leq \|x\|_E \|b\|_B$ (respectivement $\|bx\|_E \leq \|b\|_B \|x\|_E$). On dit que E est un B-module de Banach *non dégénéré* si le sous-espace vectoriel EB (resp BE) de E engendré par les produits d'un élément de E par un élément de B est dense dans E.

Une algèbre de Banach B est dite *unitaire* s'il existe un élément unité $1_B \in B$ tel que $\|1_B\| = 1$. Dans ce cas on appelle B-module de Banach *unitaire* un B-module de Banach E qui vérifie : pour tout $x \in E$, $x1_B = x$ (resp. $1_B x = x$).

Soit B une algèbre de Banach. On note $\tilde{B}$ l'algèbre de Banach unitaire associée à B : $\tilde{B} = B \oplus \mathbb{C}$ est munie du produit $(a, \lambda).(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$ et de la norme $\|(a, \lambda)\|_{\tilde{B}} = \|a\|_B + |\lambda|$. Son élément unité est $1_{\tilde{B}} = (0, 1)$. Tout module de Banach sur B est aussi un module de Banach unitaire sur $\tilde{B}$ et inversement.

Si B et C sont deux algèbres de Banach, on appelle morphisme d'algèbres de Banach un morphisme d'algèbres $\theta : B \to C$ tel que pour tout $b \in B$ on ait $\|\theta(b)\|_C \leq \|b\|_B$.

Soient E et F des modules de Banach, à gauche ou à droite, sur une algèbre de Banach B. On appelle morphisme de B-modules de Banach une application linéaire continue $f : E \to F$ qui est un morphisme de B-modules au sens algébrique, et on pose

$$\|f\| = \sup_{x \in E,\ \|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F.$$

Voici quelques rappels sur les produits tensoriels complétés. Soient B une algèbre de Banach, E un B-module de Banach à droite et F un B-module de Banach à gauche. On note $E \otimes_B^{\pi} F$ la complétion de $E \otimes^{alg} F$ pour la plus grande semi-norme $\|.\|$ telle que $\|x \otimes by - xb \otimes y\| = 0$ et $\|x \otimes y\| \leq \|x\|\|y\|$ pour $x \in E, y \in F, b \in B$. Pour tout espace de Banach G, les applications h $\mathbb{C}$-bilinéaires continues de norme inférieure ou égale à 1 de $E \times F$ dans G, et vérifiant $h(xb, y) = h(x, by)$ pour $x \in E$, $y \in F$ et $b \in B$, sont en bijection avec les applications linéaires continues de norme inférieure ou égale à 1 de $E \otimes_B^{\pi} F$ dans G.

Expliquons enfin la fonctorialité pour les modules de Banach non dégénérés. Soient B et C des algèbres de Banach et $\theta : B \to C$ un morphisme d'algèbres de Banach. Soit E un B-module de Banach à droite non dégénéré. On pose $\theta_*(E) = E \otimes_{\tilde{B}}^{\pi} \tilde{C}$. Pour $x \in E$, $a \in \tilde{C}$ et $c \in C$ on pose $(x \otimes a)c = x \otimes ac$ et ceci fait de $\theta_*(E)$ un C-module de Banach à droite. Celui-ci est non dégénéré. En effet pour $x \in E$ et $a \in \tilde{C}$, $x \otimes a$ appartient à $\overline{\theta_*(E)C}$ car x appartient à $\overline{EBB}$, puisque E est non dégénéré, et $yb_1b_2 \otimes a = (y \otimes \theta(b_1))(\theta(b_2)a)$ pour $y \in E$ et $b_1, b_2 \in B$.

Lemme 1.1.1 *Soient B une algèbre de Banach et E un B-module de Banach à droite non dégénéré. On a $\mathrm{Id}_*(E) = E$. D'autre part si B_1 et B_2 sont deux algèbres de Banach et $\theta_1 : B \to B_1$ et $\theta_2 : B_1 \to B_2$ deux morphismes d'algèbres de Banach on a $\theta_{2,*}(\theta_{1,*}(E)) = (\theta_2 \circ \theta_1)_*(E)$.*

Soient B une algèbre de Banach et E un B-module de Banach à droite non dégénéré. Dans toute la suite on note $B[0, 1] = C([0, 1], B)$ et $E[0, 1] = C([0, 1], E)$ comme $B[0, 1]$-module de Banach à droite. Pour $t \in [0, 1]$ on note $\sigma_t : B[0, 1] \to B$ l'évaluation en t.

Lemme 1.1.2 *Soient B une algèbre de Banach et E un B-module de Banach à droite non dégénéré. Alors, pour tout $t \in [0,1]$, $\sigma_{t,*}(E[0,1]) = E$ comme B-module de Banach à droite, de façon isométrique.*

Supposons maintenant que B est une algèbre de Banach unitaire. Dans ce cas un B-module de Banach est non dégénéré si et seulement si il est unitaire. De plus si E est un B-module de Banach à droite unitaire, C une algèbre de Banach unitaire et $\theta : B \to C$ un morphisme unitaire, on a un isomorphisme canonique $\theta_*(E) = E \otimes_B^\pi C$.

Définition d'une paire

Définition 1.1.3 *Soit B une algèbre de Banach. Une B-paire est la donnée*

- *d'un B-module de Banach à droite $E^>$ non dégénéré,*
- *d'un B-module de Banach à gauche $E^<$ non dégénéré,*
- *et d'un crochet $\langle .,. \rangle : E^< \times E^> \to B$, qui est $\mathbb{C}$-bilinéaire, et tel que pour tout $x \in E^>$, pour tout $\xi \in E^<$, pour tout $b \in B$, on ait*

$$\langle b\xi, x\rangle = b\langle \xi, x\rangle, \langle \xi, xb\rangle = \langle \xi, x\rangle b, \|\langle \xi, x\rangle\|_B \leq \|\xi\|_{E^<}\|x\|_{E^>}.$$

Nous noterons toujours une B-paire sous la forme $E = (E^<, E^>)$, en omettant le crochet. Si E et F sont deux B-paires, leur somme directe est $E \oplus F = (E^< \oplus F^<, E^> \oplus F^>)$: la norme de $(x,y) \in E^> \oplus F^>$ est $\|x\| + \|y\|$, la norme de $(\xi, \eta) \in E^< \oplus F^<$ est $\|\xi\| + \|\eta\|$ et le crochet est $\langle (\xi,\eta),(x,y)\rangle = \langle \xi, x\rangle + \langle \eta, y\rangle$.

Soient E,F,G des B-paires. Un *morphisme de B-paires* $f : E \to F$ est un couple $(f^<, f^>)$, où

- $f^> : E^> \to F^>$ est un morphisme de B-modules de Banach à droite,
- et $f^< : F^< \to E^<$ est un morphisme de B-modules de Banach à gauche,

de sorte que pour tout $x \in E^>$, pour tout $\eta \in F^<$, on ait

$$\langle \eta, f^>(x)\rangle = \langle f^<(\eta), x\rangle.$$

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des morphismes de B-paires de E dans F. Muni de la norme $\|f\| = \max(\|f^>\|, \|f^<\|)$ c'est un espace de Banach. Le composé de deux morphismes de B-paires $f = (f^<, f^>)$ de E vers F et $g = (g^<, g^>)$ de F vers G est $g \circ f = (f^< \circ g^<, g^> \circ f^>)$ de E vers G.

Pour $\xi_0 \in E^<$ et $y_0 \in F^>$ on note $|y_0\rangle\langle\xi_0| \in \mathcal{L}(E,F)$ le morphisme de B-paires f défini par $f^>(x) = y_0\langle \xi_0, x\rangle$ pour $x \in E^>$ et $f^<(\eta) = \langle \eta, y_0\rangle\xi_0$ pour

$\eta \in F^<$. On note $\mathcal{K}(E,F)$ l'adhérence dans $\mathcal{L}(E,F)$ du sous-espace vectoriel engendré par les morphismes de la forme $|y_0\rangle\langle\xi_0|$ et on dit qu'un morphisme est *compact* s'il appartient à $\mathcal{K}(E,F)$. Le composé d'un morphisme compact avec un autre morphisme est compact. On pose $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$ et $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E,E)$. On voit que $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre de Banach et $\mathcal{K}(E)$ un idéal bilatère fermé de $\mathcal{L}(E)$.

Lien avec les modules hilbertiens

Proposition 1.1.4 *Soient B une C^*-algèbre et E un B-module hilbertien muni de la forme sesquilinéaire $\langle .,. \rangle : E \times E \to B$. Alors E est un B-module de Banach à droite non dégénéré, et si on note $\bar{E}$ le B-module de Banach à gauche non dégénéré tel qu'il existe une isométrie $\mathbb{C}$-antilinéaire $* : E \to \bar{E}$ vérifiant $b^*x^* = (xb)^*$ pour $x \in E$ et $b \in B$, et si on pose $\langle x^*, y\rangle = \langle x, y\rangle$ pour $x, y \in E$, alors $(\bar{E}, E)$ est une B-paire. Soient F un deuxième B-module hilbertien, $f : E \to F$ un morphisme de B-modules hilbertiens, $f^* : F \to E$ son adjoint et $\overline{f^*}$ l'application $(*)f^*(*)^{-1} : \bar{F} \to \bar{E}$. Alors $(\overline{f^*}, f)$ est un morphisme de B-paires de $(\bar{E}, E)$ vers $(\bar{F}, F)$ et est compact si f est compact.*

Sommes et idempotents Soient B une algèbre de Banach, E et F deux B-paires et $G = E \oplus F$. On appelle inclusion i de E dans G parallèlement à F le morphisme de B-paires $i = (i^<, i^>)$ de E vers G, où $i^>$ est l'inclusion de $E^>$ dans $G^>$ et $i^<$ la projection de $G^<$ sur $E^<$ parallèlement à $F^<$. De même on appelle projection π de G sur E parallèlement à F le morphisme de B-paires $\pi = (\pi^<, \pi^>)$ de G vers E où $\pi^>$ est la projection de $G^>$ sur $E^>$ parallèlement à $F^>$ et $\pi^<$ l'inclusion de $E^<$ dans $G^<$. Souvent nous omettons "parallèlement à F" lorsque le supplémentaire est tout désigné. Enfin par abus on appelle aussi projection sur E le composé $q = i \circ \pi = (\pi^< i^<, i^> \pi^>) \in \mathcal{L}(G)$ qui, lui, est vraiment constitué de deux projections au sens usuel.

Il y a une construction inverse. Soit G une B-paire et $q \in \mathcal{L}(G)$ tel que $q^2 = q$. Notons $q = (q^<, q^>)$. Alors $q^> : G \to G$ est un projecteur donc on a $G^> = \mathrm{Im}q^> \oplus \mathrm{Ker}q^>$ en tant que B-module à droite. En fait $\mathrm{Im}q^>$ et $\mathrm{Ker}q^>$ sont des sous-modules de $G^>$, donc munis de la norme de sous-module. L'isomorphisme ci-dessus n'est pas une isométrie mais il est bicontinu. De même $q^< : G^< \to G^<$ est un projecteur donc on a $G^< = \mathrm{Im}q^< \oplus \mathrm{Ker}q^<$ en tant que B-module à gauche. De plus $\mathrm{Ker}q^<$ et $\mathrm{Im}q^>$ sont orthogonaux pour le crochet de G, de même que $\mathrm{Im}q^<$ et $\mathrm{Ker}q^>$. Par suite $G = (\mathrm{Im}q^<, \mathrm{Im}q^>) \oplus (\mathrm{Ker}q^<, \mathrm{Ker}q^>)$ en tant que B-paire, à équivalence des normes près. En suivant la terminologie du paragraphe précédent on peut dire que le morphisme de B-paires $q : G \to G$ est la projection sur la B-paire $(\mathrm{Im}q^<, \mathrm{Im}q^>)$ parallèlement à $(\mathrm{Ker}q^<, \mathrm{Ker}q^>)$. La projection $\pi : G \to$

$(\mathrm{Im}q^<, \mathrm{Im}q^>)$ et l'inclusion $i : (\mathrm{Im}q^<, \mathrm{Im}q^>) \to G$ sont aussi des morphismes de B-paires et vérifient $\pi \circ q = \pi, q \circ i = i, \pi \circ i = \mathrm{Id}, i \circ \pi = q$. Nous résumons la discussion dans la proposition suivante.

Proposition 1.1.5 *Soient G une B-paire et $q \in \mathcal{L}(G)$ tel que $q^2 = q$. Alors G est isomorphe à la somme directe des B-paires $(\mathrm{Im}q^<, \mathrm{Im}q^>)$ et $(\mathrm{Ker}q^<, \mathrm{Ker}q^>)$.*

Paires dérivées de la paire standard Soit B une algèbre de Banach non dégénérée. Posons $F^< = B$ et $F^> = B$ munis des structures de B-modules à gauche et à droite évidentes. Soit $\langle .,. \rangle : B \times B \to B$ le produit usuel. Alors $(F^<, F^>, \langle .,. \rangle)$ est une B-paire, appelée B-paire standard, et notée B. Soit E une B-paire. On définit $\Psi_{E^>} : E^> \to \mathcal{L}(B, E)$ par $\Psi_{E^>}(x)^>(b) = xb$ et $\Psi_{E^>}(x)^<(\xi) = \langle \xi, x \rangle$ pour $\xi \in E^<$, $x \in E^>$ et $b \in B$. On définit de même $\Psi_{E^<} : E^< \to \mathcal{L}(E, B)$.

Lemme 1.1.6 *Soit B une algèbre de Banach non dégénérée. Pour toute B-paire E, $\mathcal{K}(B, E)$ est l'adhérence de $\Psi_{E^>}(E^>)$ dans $\mathcal{L}(B, E)$ et $\mathcal{K}(E, B)$ est l'adhérence de $\Psi_{E^<}(E^<)$ dans $\mathcal{L}(E, B)$.*

En effet comme E est une B-paire, $E^> B$ est dense dans $E^>$ et $BE^<$ est dense dans $E^<$.

On note $B^p = B \oplus ... \oplus B$, p fois. Ainsi $B^p = (E^<, E^>, \langle .,. \rangle)$, où $E^> = B^p$ est muni de la norme $\|(x_1, ...x_p)\| = \|x_1\| + ... + \|x_p\|$, $E^< = B^p$ est muni de la même norme, et $\langle (\xi_1, ...\xi_p), (x_1, ...x_p) \rangle = \sum_{i=1}^p \xi_i x_i$.

Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$. On a une application linéaire continue $\Psi : M_{n,p}(\tilde{B}) \to \mathcal{L}(B^p, B^n)$. Pour la définir on note $B^p = (E^<, E^>, \langle .,. \rangle)$ et $B^n = (F^<, F^>, \langle .,. \rangle)$. Soit $q \in M_{n,p}(\tilde{B})$. Alors, pour $x \in E^>$ et $\eta \in F^<$, on pose $\Psi(q)^>(x) = qx$ et $\Psi(q)^<(\eta) = \eta q$ en écrivant x sous la forme d'un vecteur colonne et η sous la forme d'un vecteur ligne. Ceci définit $\Psi(q) \in \mathcal{L}(B^p, B^n)$, souvent noté q par abus. Le résultat suivant, qui est capital pour les applications à la K-théorie, est un corollaire du lemme 1.1.6

Lemme 1.1.7 *Soient B une algèbre de Banach non dégénérée, et $p, n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\mathcal{K}(B^p, B^n)$ est l'adhérence de $\Psi(M_{n,p}(B))$ dans $\mathcal{L}(B^p, B^n)$.*

On dispose aussi d'une application bilinéaire $\theta : \mathcal{L}(B^p, B^n) \times M_{p,q}(B) \to M_{n,q}(B)$ telle que $\Psi(\theta(x, y)) = x \circ \Psi(y)$: si $y = (y_1, \ldots, y_q)$ est la décomposition de y en vecteurs colonnes, on pose $\theta(x, y) = (x^>(y_1), \ldots, x^>(y_q))$. Il existe une application bilinéaire analogue de $M_{n,p}(B) \times \mathcal{L}(B^q, B^p)$ vers $M_{n,q}(B)$.

Soit maintenant $q \in M_p(\tilde{B})$ vérifiant $q^2 = q$. Notons par abus $\Psi(q) = q = (q^<, q^>)$. Comme $q^2 = q$ dans $\mathcal{L}(B^p)$, d'après la proposition 1.1.5, $B^p =$

$(\mathrm{Im}q^<, \mathrm{Im}q^>) \oplus (\mathrm{Ker}q^<, \mathrm{Ker}q^>)$ en tant que B-paire, à équivalence de normes près. Nous noterons parfois $\mathrm{Im}q$ ou $(B^p q, qB^p)$ au lieu de $(\mathrm{Im}q^<, \mathrm{Im}q^>)$.

Voici enfin un résultat qui nous sera utile en K-théorie.

Proposition 1.1.8 *Soient B une algèbre de Banach non dégénérée, E et F des B-paires, et $f : E \to F$ un morphisme compact. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier n, et des morphismes compacts $R : B^n \to F$ et $S : E \to B^n$ tels que $\|f - RS\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \epsilon$.*

En effet on peut supposer $f = \sum_{i=1}^n |y_i\rangle\langle\xi_i|$, et on pose alors $S = \begin{pmatrix} \Psi_{E^<}(\xi_1) \\ \dots \\ \Psi_{E^<}(\xi_n) \end{pmatrix}$ et $R = (\Psi_{F^>}(y_1), \dots, \Psi_{F^>}(y_n))$.

Fonctorialité Soient A et B deux algèbres de Banach et θ un morphisme d'algèbres de Banach de A vers B. Soit $E = (E^<, E^>)$ une A-paire. Posons $\theta_*(E) = (\theta_*(E^<), \theta_*(E^>)) = (\tilde{B} \otimes^\pi_{\tilde{A}} E^<, E^> \otimes^\pi_{\tilde{A}} \tilde{B})$. Alors $\theta_*(E)$ est une B-paire, appelée *image directe* de E par le morphisme θ : le crochet est défini par $\langle b \otimes \xi, x \otimes b' \rangle = b\theta(\langle \xi, x \rangle)b' \in B$, pour $b, b' \in \tilde{B}, x \in E^>, \xi \in E^<$. L'image directe d'une paire par Id est la paire elle-même, et l'image directe par le composé de deux morphismes d'algèbres de Banach est l'image directe de l'image directe. Soient A, B, E, θ comme ci-dessus et $F = (F^<, F^>)$ une deuxième A-paire, et $f = (f^<, f^>)$ un morphisme de A-paires de E vers F. Alors $\theta_*(f) = (1 \otimes f^<, f^> \otimes 1)$ est un morphisme de B-paires de $\theta_*(E)$ dans $\theta_*(F)$ et si f est compact, $\theta_*(f)$ est compact : en effet, pour $y \in F^>$ et $\xi \in E^<$, on a $\theta_*(|y\rangle\langle\xi|) = |y \otimes 1\rangle\langle 1 \otimes \xi|$.

Pour toute B-paire E on note $E[0,1]$ la $B[0,1]$-paire $(E^<[0,1], E^>[0,1])$. Pour tout $t \in [0,1]$, en notant $\sigma_t : B[0,1] \to B$ l'évaluation en t on a $\sigma_{t,*}(E[0,1]) = E$ comme conséquence du lemme 1.1.2.

Définition 1.1.9 *Soient A et B deux algèbres de Banach. On appelle (A, B)-bimodule de Banach une B-paire E dotée d'un morphisme d'algèbres de Banach de A dans $\mathcal{L}(E)$.*

En d'autres termes une B-paire $E = (E^<, E^>)$ est un (A, B)-bimodule de Banach si $E^>$ est muni d'une structure de A-module de Banach à gauche, $E^<$ d'une structure de A-module de Banach à droite, ces structures commutant aux structures de B-modules sur $E^>$ et $E^<$, et vérifiant de plus $\langle \xi a, x \rangle = \langle \xi, ax \rangle$ pour $a \in A, x \in E^>, \xi \in E^<$.

Si A et B sont deux C^*-algèbres et E un (A, B)-bimodule au sens de [Kas88], alors $(\bar{E}, E)$ est un (A, B)-bimodule de Banach.

1.2 Une version naïve de la KK-théorie pour les algèbres de Banach

Définition 1.2.1 *Soit G un groupe topologique. On appelle norme sur G une fonction continue $N : G \to [1, +\infty[$ telle que $N(g_1 g_2) \leq N(g_1)N(g_2)$ quels que soient $g_1, g_2 \in G$.*

Soit G un groupe topologique. On appelle G-algèbre de Banach une algèbre de Banach B munie d'une action continue de G par automorphismes préservant la norme de B.

Soient N une norme sur G et B une G-algèbre de Banach.

On appelle (G, N)-B-module de Banach à droite un B-module de Banach à droite E muni d'une action continue de G telle que $g(xb) = (gx)(gb)$ et $\|gx\|_E \leq N(g)\|x\|_E$ pour $g \in G, x \in E, b \in B$.

On appelle (G, N)-B-module de Banach à gauche un B-module de Banach à gauche E muni d'une action continue de G telle que $g(b\xi) = (gb)(g\xi)$ et $\|g\xi\|_E \leq N(g^{-1})\|\xi\|_E$ pour $g \in G, \xi \in E, b \in B$.

On appelle (G, N)-B-paire une B-paire $E = (E^<, E^>)$ avec une action de G sur $E^<$ et $E^>$ telle que $E^>$ soit un (G, N)-B-module de Banach à droite et $E^<$ un (G, N)-B-module de Banach à gauche et que $g(\langle \xi, x\rangle) = \langle g\xi, gx\rangle$ pour $g \in G, x \in E^>, \xi \in E^<$.

Enfin si A est une G-algèbre de Banach on appelle (G, N)-(A, B)-bimodule de Banach un (A, B)-bimodule de Banach E muni d'une action de G compatible avec les structures de A-module et telle que E soit une (G, N)-B-paire.

Lorsque E et F sont des (G, N)-B-paires et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in G$, on note $g(T) = (gT^< g^{-1}, gT^> g^{-1}) \in \mathcal{L}(E, F)$.

Dans toutes ces notations on omet N lorsque $N = 1$.

Définition 1.2.2 *Soient G un groupe localement compact, N une norme sur G et A et B deux G-algèbres de Banach. On note $E^{\mathrm{ban}}_{G,N}(A, B)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de couples (E, T) avec E un (G, N)-(A, B)-bimodule de Banach $\mathbb{Z}/2$-gradué et $T \in \mathcal{L}(E)$ impair tel que pour tout $a \in A$, $[a, T]$ et $a(\mathrm{Id}_E - T^2)$ appartiennent à $\mathcal{K}(E)$ et $g \mapsto a(T - g(T))$ soit une application continue de G dans $\mathcal{K}(E)$.*

Si C est une autre G-algèbre de Banach et $\theta : B \to C$ un morphisme G-équivariant d'algèbres de Banach, et $(E, T) \in E^{\mathrm{ban}}_{G,N}(A, B)$, on a $(\theta_*(E), \theta_*(T)) \in E^{\mathrm{ban}}_{G,N}(A, C)$. On obtient ainsi une application $\theta_* : E^{\mathrm{ban}}_{G,N}(A, B) \to E^{\mathrm{ban}}_{G,N}(A, C)$.

Pour $t \in [0, 1]$ on note $\sigma_t : B[0, 1] \to B$ l'évaluation en t. On dit que deux éléments x et y de $E^{\mathrm{ban}}_{G,N}(A, B)$ sont homotopes si ce sont les images par $\sigma_{0,*}$ et $\sigma_{1,*}$ d'un même élément de $E^{\mathrm{ban}}_{G,N}(A, B[0, 1])$.

L'homotopie est une relation d'équivalence sur $E_{G,N}^{\mathrm{ban}}(A,B)$ et on note $KK_{G,N}^{\mathrm{ban}}(A,B)$ le quotient de $E_{G,N}^{\mathrm{ban}}(A,B)$ par cette relation.

Lorsque $N=1$ on omet N et lorsque G est trivial on omet G.

Par la suite nous noterons indifféremment un élément de $E_{G,N}^{\mathrm{ban}}(A,B)$ sous la forme (E,T) ou sous la forme $(E_0 \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} E_1)$ lorsque $T = \begin{pmatrix} 0 & g \\ f & 0 \end{pmatrix}$.

Si N' est une autre norme sur G avec, pour tout $g \in G$, $N(g) \leq N'(g)$, on a une application évidente $KK_{G,N}^{\mathrm{ban}}(A,B) \to KK_{G,N'}^{\mathrm{ban}}(A,B)$.

Si A et B sont deux G-algèbres de Banach, B étant non dégénérée, et θ un morphisme G-équivariant de A vers B, on note $[\theta]$ l'élément de $KK_G^{\mathrm{ban}}(A,B)$ défini par $(E,0) \in E_G^{\mathrm{ban}}(A,B)$ où E est la B-paire standard munie de sa structure évidente de G-(A,B)-bimodule de Banach, et graduée de façon triviale. Pour vérifier que $(E,0)$ appartient à $E_G^{\mathrm{ban}}(A,B)$ on utilise le lemme 1.1.7. En particulier si $A=B$ et $\theta = \mathrm{Id}_B$ on note $1 = [\mathrm{Id}_B] \in KK_G^{\mathrm{ban}}(B,B)$.

Soient G un groupe localement compact, A, B, D des G-algèbres de Banach, D étant non dégénérée, et $\alpha \in KK_{G,N}^{\mathrm{ban}}(A,B)$, et $(E,T) \in E_{G,N}^{\mathrm{ban}}(A,B)$ représentant α. On définit $\sigma_D^{\mathrm{ban}}(\alpha)$ comme la classe de $(E \otimes^\pi D, T \otimes 1)$ dans $KK_{G,N}^{\mathrm{ban}}(A \otimes^\pi D, B \otimes^\pi D)$.

Voici quelques lemmes pour illustrer la notion d'homotopie. Nous montrons en particulier que, sous les hypothèses de la définition, $KK_{G,N}^{\mathrm{ban}}(A,B)$ est un groupe abélien.

Lemme 1.2.3 *Soient G un groupe localement compact, N une norme sur G, A et B des G-algèbres de Banach et $(E,T) \in E_{G,N}^{\mathrm{ban}}(A,B)$. Soit $T' \in \mathcal{L}(E)$ impair, de sorte que pour tout $a \in A$, $a(T'-T)$ et $(T'-T)a$ soient compacts. Alors (E,T') appartient à $E_{G,N}^{\mathrm{ban}}(A,B)$ et (E,T) et (E,T') sont homotopes dans $E_{G,N}^{\mathrm{ban}}(A,B)$.*

Pour justifier la dernière assertion, notons $\bar{T} = (\bar{T}_t)_{t\in[0,1]}$ le morphisme de $B[0,1]$-paires de $E[0,1]$ dans lui-même défini par $\bar{T}_t = (1-t)T + tT'$. Alors $(E[0,1], \bar{T})$ appartient à $E_{G,N}^{\mathrm{ban}}(A, B[0,1])$ et réalise une homotopie entre (E,T) et (E,T').

Lemme 1.2.4 *Soient G un groupe localement compact, N une norme sur G et A et B des G-algèbres de Banach. Soient E un (G,N)-(A,B)-bimodule de Banach $\mathbb{Z}/2$-gradué et $T \in \mathcal{L}(E)$ impair tels que pour tout $a \in A$, pour tout $g \in G$, $[a,T]$, $a(1-T^2)$ et $a(g(T)-T)$ soient nuls. Alors (E,T) appartient à $E_{G,N}^{\mathrm{ban}}(A,B)$ et il est homotope à 0.*

On dit qu'un tel complexe est dégénéré. En particulier, pour tout (G,N)-(A,B)-bimodule de Banach F, le complexe $(F \underset{\mathrm{Id}}{\overset{\mathrm{Id}}{\rightleftarrows}} F)$ est dégénéré. Montrons le lemme : $\bar{E} = C_0(]0,1],E)$ est un (G,N)-$(A,B[0,1])$-bimodule de Banach et considérons le morphisme de $B[0,1]$-paires $\bar{T} = (\bar{T}_t)_{t\in[0,1]}$ de $\bar{E}$ vers $\bar{E}$ où $\bar{T}_t = T$ si $t \in]0,1]$ et $\bar{T}_0 = 0$. Alors $(\bar{E},\bar{T})$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}_{G,N}(A,B[0,1])$ et réalise une homotopie entre 0 et (E,T).

Lemme 1.2.5 *Soient G un groupe localement compact, N une norme sur G et A et B des G-algèbres de Banach. Si (E_1,T_1) et (E_2,T_2) sont deux éléments de $E^{\mathrm{ban}}_{G,N}(A,B)$ leur somme directe $(E_1,T_1) \oplus (E_2,T_2) = (E_1 \oplus E_2, T_1 \oplus T_2)$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}_{G,N}(A,B)$. Cette opération est compatible à l'homotopie et définit sur $KK^{\mathrm{ban}}_{G,N}(A,B)$ une structure de groupe abélien.*

En effet soit $x = (E_0 \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} E_1) \in E^{\mathrm{ban}}_{G,N}(A,B)$ et posons $y = (E_1 \underset{f}{\overset{g}{\rightleftarrows}} E_0)$. Alors $x \oplus y$ est homotope à un élément dégénéré au moyen de $z \in E^{\mathrm{ban}}_{G,N}(A,B[0,1])$ défini par

$$z = \left(E_0[0,1] \oplus E_1[0,1] \underset{\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}t)g & \sin(\frac{\pi}{2}t)\mathrm{Id} \\ -\sin(\frac{\pi}{2}t)\mathrm{Id} & \cos(\frac{\pi}{2}t)f \end{pmatrix}_{t\in[0,1]}}{\overset{\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}t)f & -\sin(\frac{\pi}{2}t)\mathrm{Id} \\ \sin(\frac{\pi}{2}t)\mathrm{Id} & \cos(\frac{\pi}{2}t)g \end{pmatrix}_{t\in[0,1]}}{\rightleftarrows}} E_1[0,1] \oplus E_0[0,1]\right).$$

Etudions la fonctorialité.

Proposition 1.2.6 *Soit G un groupe localement compact et N une norme sur G. Alors $(A,B) \mapsto KK^{\mathrm{ban}}_{G,N}(A,B)$ est un bifoncteur de la catégorie des G-algèbres de Banach dans la catégorie des groupes abéliens.*

Dans la catégorie des G-algèbres de Banach les flèches sont les morphismes G-équivariants. La fonctorialité en A est immédiate. La fonctorialité en B est contenue dans la définition 1.2.2.

Nous rappelons la définition de la K-théorie (voir [Bos90], A.1.1 et A.1.3).

Définition 1.2.7 *Soit A une algèbre de Banach. Lorsque $p,n \in \mathbb{N}$, on note $L_{p,n}(A)$ l'ensemble des matrices $q \in M_{p+n}(\tilde{A})$ telles que $q^2 = q$ et $q - \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{p+n}(A)$. On note $L(A)$ la limite inductive des $L_{p,n}(A)$ lorsque $p,n \to \infty$, définie à l'aide des applications $\tau_{p,n,r,s}$, où $\tau_{p,n,r,s} : L_{p,n}(A) \to L_{p+r,n+s}(A)$ est défini pour $r,s \in \mathbb{N}$ par $\tau_{p,n,r,s}(q) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 1_r & 0 \\ 0 & 0 & 0_s \end{pmatrix}$ en permutant les deux ensembles d'indices de cardinaux n et r.*

Tout morphisme d'algèbres de Banach $\theta : A \to B$ détermine $\theta_{*,p,n} : L_{p,n}(A) \to L_{p,n}(B)$, d'où $\theta_* : L(A) \to L(B)$. On dit que deux éléments $x, y \in L(A)$ sont homotopes si ce sont les images par $\sigma_{0,*}$ et $\sigma_{1,*}$ d'un même élément de $L(A[0,1])$, où $\sigma_0 : A[0,1] \to A$ désigne l'évaluation en 0 et σ_1 l'évaluation en 1, et on note $K_0(A)$ le quotient de $L(A)$ par cette relation d'homotopie.

Lorsque $p, n, p', n' \in \mathbb{N}$, $q \in L_{p,n}(A)$, et $q' \in L_{p',n'}(A)$, on note $q \oplus q' = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q' \end{pmatrix} \in L_{p+p',n+n'}(A)$, en permutant les deux ensembles d'indices de cardinaux p' et n . Ceci munit $L(A)$ d'une loi de semi-groupe, et cette loi fait de $K_0(A)$ un groupe.

Soit B une algèbre de Banach non dégénérée. Construisons une application $\zeta : K_0(B) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$, fonctorielle en B. Soit $x \in K_0(B)$. Soient $p, n \in \mathbb{N}$ et $q \in L_{p,n}(B)$ un représentant de x. Posons $q_0 = q$ et $q_1 = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_0 = (B^{p+n}q_0, q_0B^{p+n})$ et $E_1 = (B^{p+n}q_1, q_1B^{p+n})$ les B-paires, pour la description détaillée desquelles nous renvoyons au paragraphe "Paires dérivées de la paire standard" de la section 1.1. Notons i_0 l'inclusion de E_0 dans B^{p+n} et π_o la projection de B^{p+n} sur E_0, qui sont des morphismes de B-paires attachés à q_0, décrits au même endroit, et de même introduisons i_1 et π_1. La classe de $(E_0 \overset{\pi_1 i_0}{\underset{\pi_0 i_1}{\rightleftarrows}} E_1) \in E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ ne dépend que de x et nous la notons $\zeta(x)$.

Le résultat suivant est crucial.

Théorème 1.2.8 *Pour toute algèbre de Banach B non dégénérée, l'application $\zeta : K_0(B) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ définie ci-dessus est un isomorphisme de groupes abéliens, fonctoriel en B.*

La démonstration occupe la section suivante.

Remarque. Considérons l'algèbre de Banach B des fonctions holomorphes sur la couronne de centre 0 et de rayons $1/2$ et 2 dans le plan complexe, et s'annulant en 1, avec pour norme la norme du sup sur la couronne. Comme $\tilde{B}$ a pour K-théorie la K-théorie du cercle, $K_1(B)$ est non nul. Mais si on note $B^{(n)}$ le sous-espace vectoriel de B engendré par les produits de n éléments de B, et $\overline{B^{(n)}}$ son adhérence dans B, on a $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \overline{B^{(n)}} = \{0\}$. Par conséquent dans toute B-paire le crochet est nul. Il en résulte que tout opérateur compact entre deux B-paires est nul et donc $KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B) = 0$. L'hypothèse de non-dégénérescence est donc bien nécessaire dans le théorème précédent.

Nous sommes maintenant armés pour montrer que tout élément de KK-théorie banachique induit un homomorphisme en K-théorie.

Proposition 1.2.9 *Il existe un unique homomorphisme*

$$p : KK^{\text{ban}}(A,B) \to \mathrm{Hom}(K_0(A), K_0(B))$$

défini pour A algèbre de Banach et B algèbre de Banach non-dégénérée, qui est fonctoriel en A et B, et qui est égal à l'inverse de l'isomorphisme ζ du théorème 1.2.8 si $A = \mathbb{C}$.

Pour tout $(E,T) \in E^{\text{ban}}(A,B)$, $(C_0(\mathbb{R},E), T\otimes 1)$ appartient à $E^{\text{ban}}(C_0(\mathbb{R},A), C_0(\mathbb{R},B))$. D'où un homomorphisme $KK^{\text{ban}}(A,B) \to KK^{\text{ban}}(C_0(\mathbb{R},A), C_0(\mathbb{R},B))$ à l'aide duquel on construit $p : KK^{\text{ban}}(A,B) \to \mathrm{Hom}(K_1(A), K_1(B))$.

Démonstration de l'unicité. Nous utilisons le lemme suivant, qui m'a été suggéré par Georges Skandalis.

Lemme 1.2.10 *Soient A et B deux algèbres de Banach. Alors l'homomorphisme $KK^{\text{ban}}(\tilde{A},B) \to KK^{\text{ban}}(A,B)$ associé à l'inclusion $A \to \tilde{A}$ est surjectif.*

En effet soit $(E_0 \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} E_1) \in E^{\text{ban}}(A,B)$. On note encore E_0 et E_1 les $(\tilde{A},B)$-bimodules de Banach obtenus en étendant les structures de A-modules en structures de $\tilde{A}$-bimodules. Soit $\epsilon : \tilde{A} \to \mathbb{C}$ l'augmentation. On note E'_0 et E'_1 les $(\tilde{A},B)$-bimodules de Banach égaux à E_0 et E_1 en tant que B-paires et munis des structures de $\tilde{A}$-modules suivantes : si $x \in E_0'^{>}$, $\xi \in E_0'^{<}$ et $a \in \tilde{A}$, $ax = \epsilon(a)x$ et $\xi a = \epsilon(a)\xi$, et de même pour E'_1. Alors

$$\left(E_0 \oplus E'_1 \quad \underset{\begin{pmatrix} 2g - gfg & 1 - gf \\ -(1-fg) & f \end{pmatrix}}{\overset{\begin{pmatrix} f & -(1-fg) \\ 1 - gf & 2g - gfg \end{pmatrix}}{\rightleftarrows}} \quad E_1 \oplus E'_0\right)$$

appartient à $E^{\text{ban}}(\tilde{A},B)$ et l'image dans $KK^{\text{ban}}(A,B)$ de la classe de cet élement est égale à la classe de $(E_0 \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} E_1)$.

Pour montrer l'unicité de p nous pouvons donc nous restreindre au cas où A est unitaire. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et p un projecteur de $M_n(A)$. L'inclusion standard $i : A \to M_n(A)$ (définie par $i(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0_{n-1} \end{pmatrix}$) induit une application surjective $i^* : KK^{\text{ban}}(M_n(A),B) \to KK^{\text{ban}}(A,B)$ car si $(E,T) \in E^{\text{ban}}(A,B)$, (E^n,T^n) appartient à $E^{\text{ban}}(M_n(A),B)$ et $i^*(E^n,T^n)$ est homotope à (E,T). Enfin p définit un morphisme $\mathbb{C} \to M_n(A)$, d'où un homomorphisme $KK^{\text{ban}}(M_n(A),B) \to KK^{\text{ban}}(\mathbb{C},B)$. L'unicité en résulte.

Démonstration de l'existence. Nous pourrions établir l'existence en réutilisant les arguments ayant servi pour l'unicité. Nous proposons une construction directe.

Pour tout $x \in K_0(A)$ nous allons définir une application $(x \otimes .) : KK^{\mathrm{ban}}(A, B) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$. D'après le théorème 1.2.8, $KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ est en bijection avec $K_0(B)$, ce qui nous permet de poser, pour $x \in K_0(A)$, et $y \in KK^{\mathrm{ban}}(A, B)$, $p(y)(x) = \zeta^{-1}(x \otimes y) \in K_0(B)$.

Soit $x \in K_0(A)$. D'après la définition 1.2.7 il existe $p, n \in \mathbb{N}$ et $q \in L_{p,n}(A)$ représentant x. Posons $q^0 = q$ et $q^1 = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi q^0 et q^1 sont des projecteurs de $M_{p+n}(\tilde{A})$ tels que $q^1 - q^0$ appartienne à $M_{p+n}(A)$. Nous allons construire une application $((q^0, q^1) \otimes .) : E^{\mathrm{ban}}(A, B) \to E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ fonctorielle en B, d'où, en passant au quotient par homotopie, une application bien définie de $KK^{\mathrm{ban}}(A, B)$ dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$. Nous montrons que cette dernière application ne dépend que de x et nous la notons $(x \otimes .) : KK^{\mathrm{ban}}(A, B) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$.

Soit $y \in E^{\mathrm{ban}}(A, B)$. Notons $y = (E_0 \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} E_1)$. Pour $i \in \{0, 1\}$, $j \in \{0, 1\}$, posons

$$\mathcal{E}_j^i = ((E_j^<)^{p+n} q^i, q^i (E_j^>)^{p+n}).$$

Nous rappelons que $(E_j^<)^{p+n} q^i$ est un sous-module facteur direct de $(E_j^<)^{p+n}$ que nous munissons de la norme induite et de même pour $q^i (E_j^>)^{p+n}$. D'après la proposition 1.1.5, $\mathcal{E}_j^i$ est une B-paire. Pour tout $j \in \{0, 1\}$ notons $i_j^0 : \mathcal{E}_j^0 \to (E_j)^{p+n}$ l'injection et $\pi_j^0 : (E_j)^{p+n} \to \mathcal{E}_j^0$ la projection associées à q^0, qui sont des morphismes de B-paires, et de même introduisons i_j^1 et π_j^1. Enfin nous notons q_j^0 et q_j^1 les morphismes de B-paires de $(E_j)^{p+n}$ dans lui-même associés à q^0 et q^1. On a par exemple $q_j^0 i_j^0 = i_j^0$ et $\pi_j^0 i_j^0 = q_j^0$.

Posons $\mathcal{E}_+ = \mathcal{E}_0^0 \oplus \mathcal{E}_1^1$ et $\mathcal{E}_- = \mathcal{E}_0^1 \oplus \mathcal{E}_1^0$ et notons $\mathcal{E}$ la B-paire $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée égale à $\mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_-$. Notons T_1 l'élément impair de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ défini par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_0^0 & \underset{0}{\overset{0}{\rightleftarrows}} & \mathcal{E}_1^0 \\ {\scriptstyle \pi_0^1 i_0^0} \downarrow\uparrow {\scriptstyle \pi_0^0 i_0^1} & & {\scriptstyle \pi_1^1 i_1^0} \downarrow\uparrow {\scriptstyle \pi_1^0 i_1^1} \\ \mathcal{E}_0^1 & \underset{0}{\overset{0}{\rightleftarrows}} & \mathcal{E}_1^1 \end{array}$$

et T_2 l'élément impair de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ défini par

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{E}_0^0 & \overset{\pi_1^0 f^{p+n} i_0^0}{\underset{\pi_0^0 g^{p+n} i_1^0}{\rightleftarrows}} & \mathcal{E}_1^0 \\
0 \downarrow\uparrow 0 & & 0 \downarrow\uparrow 0 \\
\mathcal{E}_0^1 & \overset{-\pi_1^1 f^{p+n} i_0^1}{\underset{-\pi_0^1 g^{p+n} i_1^1}{\rightleftarrows}} & \mathcal{E}_1^1
\end{array}$$

Il est immédiat que $q_1^1 f^{p+n} = f^{p+n} q_0^1$ et que $q_1^0 f^{p+n} - f^{p+n} q_0^0$ est compact de E_0^{p+n} dans E_1^{p+n} et il en va de même pour g. Par suite le supercommutateur $[T_1, T_2]$ appartient à $\mathcal{K}(\mathcal{E})$. On a aussi $(\mathrm{Id} - T_1^2)(\mathrm{Id} - T_2^2) \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$.

Définissons alors M_0 et M_1 dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ par

$$M_0 = \begin{pmatrix} (\mathrm{Id} - T_1^2) \mid_{\mathcal{E}_0^0 \oplus \mathcal{E}_0^1} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_1^0 \oplus \mathcal{E}_1^1} \end{pmatrix} \text{ et } M_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_0^0 \oplus \mathcal{E}_0^1} & 0 \\ 0 & (\mathrm{Id} - T_1^2) \mid_{\mathcal{E}_1^0 \oplus \mathcal{E}_1^1} \end{pmatrix}.$$

On a $[M_0, T_1] = 0$, $[M_1, T_1] = 0$, et $M_0 T_2 - T_2 M_1$ et $M_1 T_2 - T_2 M_0$ sont compacts car $[\mathrm{Id} - T_1^2, T_2]$ est compact. On pose enfin $T = T_1 + M_0 T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$. A un compact près on a alors $T^2 = T_1^2 + M_0 M_1 T_2^2 = T_1^2 + (\mathrm{Id} - T_1^2) T_2^2 = \mathrm{Id}$ d'où $(\mathcal{E}, T) \in E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$.

Ainsi nous avons construit $((q^0, q^1) \otimes .) : E^{\mathrm{ban}}(A, B) \to E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ en associant $(\mathcal{E}, T) \in E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ à $y = (E_0 \overset{f}{\underset{g}{\rightleftarrows}} E_1) \in E^{\mathrm{ban}}(A, B)$. On vérifie que l'application de $KK^{\mathrm{ban}}(A, B)$ dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ obtenue en passant au quotient par homotopie ne dépend pas de n, p, q mais seulement de $x \in K_0(A)$.

Lorsque A est unitaire on peut supposer que $p = 0$, d'où $q^1 = 0$, q projecteur de $M_n(A)$ et la construction devient beaucoup plus simple : à $(E_0 \overset{f}{\underset{g}{\rightleftarrows}} E_0) \in E^{\mathrm{ban}}(A, B)$ on associe $(\mathcal{E}_0 \overset{\pi f^n i}{\underset{\pi g^n i}{\rightleftarrows}} \mathcal{E}_1) \in E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$, en notant, pour $i \in \{0, 1\}$, $\mathcal{E}_i = ((E_i^<)^n q, q(E_i^>)^n)$ et $i : \mathcal{E}_i \to E_i^n$ l'inclusion et $\pi : E_i^n \to \mathcal{E}_i$ la projection associées à q.

1.3 Preuve du théorème 1.2.8

Montrons d'abord que ζ est fonctorielle. Soient B et C des algèbres de Banach non dégénérées et $\theta : B \to C$ un morphisme d'algèbres de Banach. Si on considère B comme un B-module de Banach à droite non dégénéré on a un morphisme de C-modules de Banach à droite $u : \theta_*(B) \to C$ de norme inférieure ou égale à 1. En effet on rappelle que $\theta_*(B) = B \otimes_{\tilde{B}}^{\pi} \tilde{C}$ et on pose $u(b \otimes c) = \theta(b)c$. Notons $E^>$ le $C[0, 1]$-module de Banach à droite suivant: $E^{>} = \{(h,x) \in C[0,1] \times \theta_*(B), h(0) = u(x)\}$ muni de la norme $\|(h,x)\| = \max(\sup_{t\in[0,1]} \|h(t)\|_C, \|x\|_{\theta_*(B)})$. On construit de même un $C[0,1]$-module de Banach à gauche $E^{<}$ et $E = (E^{<}, E^{>})$ est une $C[0,1]$-paire. Pour tout $b \in B$ la multiplication par b est un morphisme compact de $C[0,1]$-paires de E dans lui-même. Si $q = q_0$ et q_1 sont comme dans la construction qui précède le théorème 1.2.8, et en notant $\mathcal{E}_i = (E^{<,p+n} q_i, q_i E^{>,p+n})$ pour $i \in \{0,1\}$, et i_0, i_1, π_0 et π_1 les inclusions et projections associées à q_0 et q_1, $(\mathcal{E}_0 \underset{\pi_0 i_1}{\overset{\pi_1 i_0}{\rightleftarrows}} \mathcal{E}_1)$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, C[0,1])$ et réalise une homotopie entre $\theta_*(\zeta(q))$ et $\zeta(\theta_*(q))$.

Montrons maintenant que ζ est un isomorphisme. L'idée d'utiliser des algèbres unitaires m'a été suggérée par Georges Skandalis et cela simplifie beaucoup la démonstration.

Nous allons montrer les deux propositions suivantes.

Proposition 1.3.1 *Soit B une algèbre de Banach non dégénérée. Alors $\zeta : K_0(B) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ est surjective.*

Proposition 1.3.2 *Soit B une algèbre de Banach unitaire. Alors $\zeta : K_0(B) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ est injective.*

Les deux propositions impliquent le théorème 1.2.8. En effet soit B une algèbre de Banach non dégénérée. Le diagramme suivant, où les flèches verticales proviennent de l'inclusion $i : B \to \tilde{B}$, commute par fonctorialité de ζ :

$$\begin{array}{ccc} K_0(B) & \overset{\zeta_B}{\to} & KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B) \\ \downarrow i_* & & \downarrow \\ K_0(\tilde{B}) & \overset{\zeta_{\tilde{B}}}{\to} & KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, \tilde{B}) \end{array}$$

Comme $\zeta_{\tilde{B}}$ et i_* sont injectives, ζ_B est injective, et d'autre part ζ_B est surjective.

Avant de démontrer les deux propositions, énonçons deux lemmes d'intérêt général.

Lemme 1.3.3 *Soient B une algèbre de Banach non dégénérée, E_0 et E_1 des B-paires, et $f \in \mathcal{L}(E_0, E_1)$ et $g \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$ tels que $\mathrm{Id}_{E_1} - fg \in \mathcal{K}(E_1)$. Alors il existe $p \in \mathbb{N}$ et $\check{f} \in \mathcal{L}(E_0 \oplus B^p, E_1)$ et $\check{g} \in \mathcal{L}(E_1, E_0 \oplus B^p)$ tels que $\check{f} - (f,0)$ et $\check{g} - \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}$ soient compacts et $\check{f}\check{g} = \mathrm{Id}_{E_1}$.*

Démonstration. D'après la proposition 1.1.8 il existe $p \in \mathbb{N}$ et des morphismes compacts $R : B^p \to E_1$ et $S : E_1 \to B^p$ tels que $\|fg + RS - \mathrm{Id}_{E_1}\|_{\mathcal{K}(E_1)} \leq \frac{1}{2}$. Notons W l'inverse de $fg + RS$. Bien sûr $W - \mathrm{Id}_{E_1}$ est compact. Notons $\check{f} = (f, R) \in \mathcal{L}(E_0 \oplus B^p, E_1)$ et $\check{g} = \begin{pmatrix} g \\ S \end{pmatrix} W \in \mathcal{L}(E_1, E_0 \oplus B^p)$. On a bien $\check{f} - (f, 0)$ et $\check{g} - \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}$ compacts et $\check{f}\check{g} = \mathrm{Id}_{E_1}$.

Lemme 1.3.4 *Soient B une algèbre de Banach non dégénérée et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $y \in M_n(B)$, le spectre de y dans $M_n(B)$ est égal au spectre de $\Psi(y)$ dans $\mathcal{K}(B^n)$.*

On rappelle que l'application $\Psi : M_n(B) \to \mathcal{K}(B^n)$ a été définie juste avant le lemme 1.1.7. Le spectre de y dans l'algèbre non nécessairement unitaire $M_n(B)$ est par définition le spectre de y dans l'algèbre unitaire associée et il en va de même pour le spectre de $\Psi(y)$ dans $\mathcal{K}(B^n)$. Le lemme découle de la proposition A.2.8 de l'appendice de [Bos90] car on a défini, juste après le lemme 1.1.7, une application bilinéaire continue $\theta : \mathcal{K}(B^n) \times M_n(B) \to M_n(B)$ telle que $\Psi(\theta(x, y)) = x\Psi(y)$.

1.3.1 Démonstration de la proposition 1.3.1

Soit B une algèbre de Banach non dégénérée. Nous commençons par trois lemmes.

Lemme 1.3.5 *Tout élément de $E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ est homotope à un élément de $E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ de la forme $(E \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B^p)$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Partons de $(E_0 \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} E_1) \in E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$. On peut supposer que $1 \in \mathbb{C}$ agit par Id sur E_0 et E_1 (quitte à remplacer E_0 et E_1 par les images du projecteur associé à $1 \in \mathbb{C}$, au moyen d'une homotopie). Grâce au lemme 1.3.3 il existe $p \in \mathbb{N}$ et $\check{f} \in \mathcal{L}(E_0 \oplus B^p, E_1)$ et $\check{g} \in \mathcal{L}(E_1, E_0 \oplus B^p)$ tels que $\check{f} - (f, 0)$ et $\check{g} - \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}$ soient compacts et $\check{f}\check{g} = \mathrm{Id}_{E_1}$. Par suite $\check{q} = \check{g}\check{f}$ est un projecteur de $\mathcal{L}(E_0 \oplus B^p)$ et $\check{q} - \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{E_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est compact. Notons $\hat{q} = \mathrm{Id}_{E_0 \oplus B^p} - \check{q}$, si bien que $\hat{q}$ est un projecteur de $\mathcal{L}(E_0 \oplus B^p)$ et $\hat{q} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{B^p} \end{pmatrix}$ est compact. Introduisons les B-paires $\mathrm{Im}\check{q} = (\mathrm{Im}\check{q}^<, \mathrm{Im}\check{q}^>)$ et $\mathrm{Im}\hat{q} = (\mathrm{Im}\hat{q}^<, \mathrm{Im}\hat{q}^>)$, si bien que $E_0 \oplus B^p = \mathrm{Im}\check{q} \oplus \mathrm{Im}\hat{q}$ et notons $\check{\imath}$, $\check{\pi}$, $\hat{\imath}$ et $\hat{\pi}$ les inclusions et les projections associées à $\check{q}$ et $\hat{q}$. Notons également i_0 l'inclusion de B^p dans $E_0 \oplus B^p$ parallèlement à E_0 et π_0 la projection correspondante.

D'après le lemme 1.2.4, $(E_0 \overset{f}{\underset{g}{\rightleftarrows}} E_1)$ est homotope à $(E_0 \oplus B^p \overset{\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{B^p} \end{pmatrix}}{\underset{\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{B^p} \end{pmatrix}}{\rightleftarrows}}$ $E_1 \oplus B^p)$, qui se réécrit aussi sous la forme $(E_0 \oplus B^p \overset{\begin{pmatrix} (f,0) \\ \pi_0 \end{pmatrix}}{\underset{(\begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}, i_o)}{\rightleftarrows}} E_1 \oplus B^p)$.

D'après le lemme 1.2.3, cet elément est homotope à $(E_0 \oplus B^p \overset{\begin{pmatrix} \check{f} \\ \pi_0 \hat{q} \end{pmatrix}}{\underset{(\check{g}, \hat{q} i_o)}{\rightleftarrows}} E_1 \oplus B^p)$, puisque $\check{f} - (f,0)$, $\check{g} - \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}$, $\pi_0 \hat{q} - \pi_0$ et $\hat{q} i_0 - i_0$ sont compacts. Ce dernier élément est la somme directe de $(\mathrm{Im}\check{q} \overset{\check{f}\check{i}}{\underset{\check{\pi}\check{g}}{\rightleftarrows}} E_1)$ et de $(\mathrm{Im}\hat{q} \overset{\pi_0 \hat{i}}{\underset{\hat{\pi} i_0}{\rightleftarrows}} B^p)$. Or $\check{f}\check{i}$ et $\check{\pi}\check{g}$ sont inverses l'un de l'autre, donc $(\mathrm{Im}\check{q} \overset{\check{f}\check{i}}{\underset{\check{\pi}\check{g}}{\rightleftarrows}} E_1)$ est homotope à 0 d'après le lemme 1.2.4.

Lemme 1.3.6 *Soient $p \in \mathbb{N}$, E une B-paire et $f \in \mathcal{L}(E, B^p)$ et $g \in \mathcal{L}(B^p, E)$ tels que $gf - \mathrm{Id}_E$ et $fg - \mathrm{Id}_{B^p}$ soient compacts. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$, et $q \in \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + M_{p+n}(B)$ tels que $q^2 = q$ et qu'en posant $q_0 = q$, $q_1 = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, i_0, π_0, π_1, i_1 les inclusions et projections associées à q_0 et q_1 et $\mathrm{Im}q = ((B^{p+n})q, q(B^{p+n}))$, il existe un isomorphisme de B-paires $\theta : E \to \mathrm{Im}q$ avec $f - \pi_1 i_0 \theta \in \mathcal{K}(E, B^p)$ et $g - \theta^{-1} \pi_0 i_1 \in \mathcal{K}(B^p, E)$.*

Dans les notations du lemme $(E \overset{f}{\underset{g}{\rightleftarrows}} B^p)$ est homotope à $(\mathrm{Im}q \overset{\pi_1 i_0}{\underset{\pi_0 i_1}{\rightleftarrows}} B^p)$, en vertu du lemme 1.2.3.

Démonstration du lemme 1.3.6. D'après le lemme 1.3.3 il existe $n \in \mathbb{N}$ et $\check{f} \in \mathcal{L}(E, B^{p+n})$ et $\check{g} \in \mathcal{L}(B^{p+n}, E)$ tels que $\check{f} - \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\check{g} - (g, 0)$ soient compacts et $\check{g}\check{f} = \mathrm{Id}_E$. Il en résulte que $\check{q} = \check{f}\check{g}$ est un projecteur de $\mathcal{L}(B^{p+n})$ et $\check{q} - \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{B^p} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{K}(B^{p+n})$. On note $\mathrm{Im}\check{q} = (\mathrm{Im}\check{q}^{<}, \mathrm{Im}\check{q}^{>})$ et on note

$\check{i} \in \mathcal{L}(\mathrm{Im}\check{q}, B^{p+n})$ et $\check{\pi} \in \mathcal{L}(B^{p+n}, \mathrm{Im}\check{q})$ l'inclusion et la projection associées à $\check{q}$. On a le lemme suivant, que nous démontrons plus loin.

Lemme 1.3.7 *Soient $p, n \in \mathbb{N}$ et $\check{q} \in \mathcal{L}(B^{p+n})$ tel que $\check{q}^2 = \check{q}$ et $\check{q} - \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{B^p} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{K}(B^{p+n})$. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $q \in M_{p+n}(\tilde{B})$ tel que $q - \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{p+n}(B)$ et $q^2 = q$ dans $M_{p+n}(\tilde{B})$, et que $\|\Psi(q) - \check{q}\|_{\mathcal{K}(B^{p+n})} \leq \epsilon$, en notant $\Psi(q)$ l'image de q dans $\mathcal{L}(B^{p+n})$.*

Si ϵ est assez petit et q comme dans le lemme, $\lambda = \Psi(q)\check{q} + (1 - \Psi(q))(1 - \check{q})$ vérifie $\|\lambda - \mathrm{Id}_{B^{p+n}}\|_{\mathcal{K}(B^{p+n})} \leq \frac{1}{2}$, donc λ est inversible dans $\mathcal{L}(B^{p+n})$, et on a $\lambda^{-1} - \mathrm{Id}_{B^{p+n}} \in \mathcal{K}(B^{p+n})$. Comme $\lambda\check{q} = \Psi(q)\lambda$, λ induit un isomorphisme de B-paires λ' de $\mathrm{Im}\check{q}$ vers $\mathrm{Im}q$, en écrivant $\mathrm{Im}q$ au lieu de $\mathrm{Im}\Psi(q)$, par abus. Comme $\check{\pi}\check{f} : E \to \mathrm{Im}\check{q}$ est un isomorphisme de B-paires, d'inverse $\check{g}\check{i}$, $\theta = \lambda'\check{\pi}\check{f} : E \to \mathrm{Im}q$ est un isomorphisme de B-paires.

Montrons par exemple que $f - \pi_1 i_0 \theta$ appartient à $\mathcal{K}(E, B^p)$. Comme $f = \pi_1 \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$, il suffit de montrer que $\begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} - i_0\theta$ appartient à $\mathcal{K}(E, B^{p+n})$. Or $i_0\theta = i_0\lambda'\check{\pi}\check{f}$ et $i_0\lambda' = \lambda\check{i}$ et $\lambda\check{i}\check{\pi}\check{f} = \lambda\check{q}\check{f} = \lambda\check{f}$. Enfin $(\lambda - \mathrm{Id}_{B^{p+n}}) \in \mathcal{K}(B^{p+n})$ et $\check{f} - \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{K}(E, B^{p+n})$. On montre de même que $g - \theta^{-1}\pi_0 i_1$ appartient à $\mathcal{K}(B^p, E)$.

Démonstration du lemme 1.3.7. Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $\check{q}$ dans $\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{B^p} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{K}(B^{p+n})$ tel que pour tout $y \in \mathcal{V}$, le spectre de $y^2 - y$ dans $\mathcal{K}(B^{p+n})$ soit inclus dans le disque ouvert $D(0, 1/4)$ de rayon $1/4$ et de centre 0 dans $\mathbb{C}$. Par densité de $\Psi(M_{p+n}(B))$ dans $\mathcal{K}(B^{p+n})$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + M_{p+n}(B)$ telle que $\Psi(x_n)$ appartienne à $\mathcal{V}$ et que la suite $(\Psi(x_n))$ tende vers $\check{q}$. D'après le lemme 1.3.4, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le spectre de $x_n^2 - x_n$ dans $M_{p+n}(B)$ est inclus dans $D(0, 1/4)$ et par suite le spectre de x_n dans $M_{p+n}(\tilde{B})$ est inclus dans $D(0, 1/2) \cup D(1, 1/2)$. Notons $\mu : D(0, 1/2) \cup D(1, 1/2) \to \mathbb{C}$ la fonction qui vaut 0 sur $D(0, 1/2)$ et 1 sur $D(1, 1/2)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu(x_n)$ est un projecteur de $M_{p+n}(\tilde{B})$ et appartient à $\begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + M_{p+n}(B)$ et la suite $\Psi(\mu(x_n)) = \mu(\Psi(x_n))$ tend vers $\check{q}$ par continuité du calcul fonctionnel holomorphe. On pose $q = \mu(x_n)$ pour n assez grand.

Fin de la démonstration de la proposition 1.3.1. D'après le lemme 1.3.5 tout élément de $E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ est homotope à un élément de la forme $(E \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B^p)$, avec $p \in \mathbb{N}$. D'après le lemme 1.3.6 et la remarque qui suit ce lemme, ce dernier est homotope à un élément de la forme $(\mathrm{Im} q_0 \underset{\pi_0 i_1}{\overset{\pi_1 i_0}{\rightleftarrows}} B^p)$, avec q_0 comme dans le lemme 1.3.6, et la classe de cet élément dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ appartient à l'image de ζ par la construction même de ζ.

1.3.2 Démonstration de la proposition 1.3.2

Soit B une algèbre de Banach unitaire.

Lemme 1.3.8 *L'application $E \mapsto E^>$ établit une bijection, fonctorielle en B, entre les classes d'isomorphisme de B-paires E telles que Id_E soit compacte, à équivalence des normes sur $E^<$ et $E^>$ près, et les classes d'isomorphisme de B-modules à droite projectifs de type fini.*

En effet d'après le lemme 1.3.6, dont la preuve se simplifie beaucoup dans ce cas particulier, pour toute B-paire E telle que Id_E soit compacte il existe un entier n, un projecteur q dans $M_n(B)$ et un isomorphisme de B-paires $\theta : E \to \mathrm{Im} q$. Par suite $E^> = qB^n$ est un B-module à droite projectif de type fini. Réciproquement à tout B-module à droite projectif de type fini on associe un élément dans $\varinjlim_{n \to +\infty}$ {classes de conjugaison de projecteurs dans $M_n(B)$} et alors pour tout représentant q de cet élément la B-paire correspondante est $(B^n q, qB^n)$ et ne dépend pas du choix de q,à équivalence des normes près.

On sait que $K_0(B)$ est le groupe universel associé au semi-groupe formé par les classes d'isomorphisme de B-modules à droite projectifs de type fini pour la somme directe et $\zeta : K_0(B) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ est défini en posant $\zeta([E^>])$ égal à la classe de $(E \underset{0}{\overset{0}{\rightleftarrows}} 0)$ dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$ pour toute B-paire E telle que Id_E soit compacte. Comme $K_0(B[0,1]) = K_0(B)$ le lemme suivant prouve l'injectivité de ζ. Nous n'en avons pas besoin mais il est encore plus facile de montrer la surjectivité de ζ.

Lemme 1.3.9 *Soient $n \in \mathbb{N}$ et E_0 et E_1 deux B-paires telles que Id_{E_0} et Id_{E_1} soient compactes et que $(E_0 \underset{0}{\overset{0}{\rightleftarrows}} 0)$ et $(E_1 \underset{0}{\overset{0}{\rightleftarrows}} 0)$ soient homotopes dans $E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B)$. Alors il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ et une $B[0,1]$-paire E telle que Id_E soit un morphisme compact de $B[0,1]$-paires, et que $\sigma_{0,*}(E)$ soit une B-paire isomorphe à $E_0 \oplus B^r$ et $\sigma_{1,*}(E)$ une B-paire isomorphe à $E_1 \oplus B^r$, en notant $\sigma_t : B[0,1] \to B$ l'évaluation en t, pour $t \in [0,1]$.*

En effet il existe un élément $(E \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} F)$ de $E^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, B[0,1])$ tel que $\sigma_{0,*}(E) = E_0$, $\sigma_{0,*}(F) = 0$, $\sigma_{1,*}(E) = E_1$ et $\sigma_{1,*}(F) = 0$. On peut supposer que $1 \in \mathbb{C}$ agit par Id sur E et F. Comme $\mathrm{Id}_F - fg \in \mathcal{K}(F)$, en vertu du lemme 1.3.3 il existe $r \in \mathbb{N}$ et $\check{f} \in \mathcal{L}(E \oplus B[0,1]^r, F)$ et $\check{g} \in \mathcal{L}(F, E \oplus B[0,1]^r)$ tels que $\check{f} - (f, 0)$ et $\check{g} - \begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}$ soient compacts et $\check{f}\check{g} = \mathrm{Id}_F$. Alors $\check{q} = \check{g}\check{f}$ est un projecteur de $\mathcal{L}(E \oplus B[0,1]^r)$ et $\hat{q} = \mathrm{Id}_{E \oplus B[0,1]^r} - \check{q}$ vérifie les propriétés suivantes. Comme B est unitaire, $B[0,1]$ est unitaire et $\mathrm{Id}_{B[0,1]^r}$ est compact, par suite $\hat{q} \in \mathcal{K}(E \oplus B[0,1]^r)$. De plus $\sigma_{0,*}(\hat{q}) = \mathrm{Id}_{E_0 \oplus B^r}$ et $\sigma_{1,*}(\hat{q}) = \mathrm{Id}_{E_1 \oplus B^r}$. Par conséquent $\mathrm{Im}\hat{q}$ est une $B[0,1]$-paire telle que $\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\hat{q}}$ soit compact et que $\sigma_{0,*}(\mathrm{Im}\hat{q}) = E_0 \oplus B^r$ et $\sigma_{1,*}(\mathrm{Im}\hat{q}) = E_1 \oplus B^r$.

1.4 Deux résultats d'homotopie

Soient G un groupe localement compact, N une norme sur G et A et B des G-algèbres de Banach. On dit qu'un (G,N)-(A,B)-bimodule de Banach E est $\mathbb{Z}$-gradué s'il existe des (G,N)-(A,B)-bimodules de Banach E_i pour $i \in \mathbb{Z}$ tels que $E = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} E_i$: plus précisément $E^>$ est muni de la norme $\|(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}\|_{E^>} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \|x_i\|_{E_i^>}$ et $E^<$ est muni de la norme $\|(\xi_i)_{i\in\mathbb{Z}}\|_{E^<} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \|\xi_i\|_{E_i^<}$.

Définition 1.4.1 *On note $E_{G,N}^{\mathrm{ban,com}}(A,B)$ l'ensemble des triplets (E,f,g) avec E un (G,N)-(A,B)-bimodule de Banach $\mathbb{Z}$-gradué et f et g des éléments de $\mathcal{L}(E)$ de degrés 1 et -1 respectivement tels que pour tout $a \in A$, $[a,f]$, $[a,g]$, af^2, ag^2 et $a(1-fg-gf)$ appartiennent à $\mathcal{K}(E)$ et $(a(f-h(f)))_{h\in G}$ et $(a(g-h(g)))_{h\in G}$ soient deux applications continues de G dans $\mathcal{K}(E)$.*

Si C est une algèbre de Banach et $\theta : B \to C$ un morphisme d'algèbres de Banach, pour $x = (E,f,g) \in E_{G,N}^{\mathrm{ban,com}}(A,B)$ on pose $\theta_*(x) = (\theta_*(E), \theta_*(f), \theta_*(g)) \in E_{G,N}^{\mathrm{ban,com}}(A,C)$. D'où une application $\theta_* : E_{G,N}^{\mathrm{ban,com}}(A,B) \to E_{G,N}^{\mathrm{ban,com}}(A,C)$.

Pour $t \in [0,1]$ notons $\sigma_t : B[0,1] \to B$ l'évaluation en t. On dit que deux éléments x et y de $E_{G,N}^{\mathrm{ban,com}}(A,B)$ sont homotopes si ce sont les images par $\sigma_{0,*}$ et $\sigma_{1,*}$ d'un même élément de $E_{G,N}^{\mathrm{ban,com}}(A,B[0,1])$.

Par la suite nous appellerons souvent un élément de $E_{G,N}^{\mathrm{ban,com}}(A,B)$ un complexe et nous le noterons parfois sous la forme $(\ldots E_1 \underset{g_1}{\overset{f_1}{\rightleftarrows}} \ldots \underset{g_{n-2}}{\overset{f_{n-2}}{\rightleftarrows}} E_{n-1} \underset{g_{n-1}}{\overset{f_{n-1}}{\rightleftarrows}} E_n \ldots)$.

Pour tout $x = (E,f,g) \in E_{G,N}^{\mathrm{ban,com}}(A,B)$, notons E' le (G,N)-(A,B)-bimodule de Banach $\mathbb{Z}/2$-gradué associé à E et posons $T = f + g$. Alors (E', T) appartient à $E_{G,N}^{\mathrm{ban}}(A,B)$. On note $x_R = (E',T)$ et on dit que x_R est le complexe replié associé à x. Si x et y sont deux éléments homotopes de $E_{G,N}^{\mathrm{ban,com}}(A,B)$, x_R et y_R sont homotopes dans $E_{G,N}^{\mathrm{ban}}(A,B)$. Pour tout $x \in E_{G,N}^{\mathrm{ban,com}}(A,B)$ on appelle classe de x la classe de x_R dans $KK_{G,N}^{\mathrm{ban}}(A,B)$.

Lemme 1.4.2 *Soient G un groupe localement compact, N une norme sur G et A et B des G-algèbres de Banach. Soit $(E,f,g) \in E_{G,N}^{\mathrm{ban,com}}(A,B)$ et $g' \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(E,f,g') \in E_{G,N}^{\mathrm{ban,com}}(A,B)$. Alors $(E,f,g)_R$ et $(E,f,g')_R$ sont homotopes dans $E_{G,N}^{\mathrm{ban}}(A,B)$.*

Démonstration. Considérons les éléments $\bar{f}$ et $\bar{g}$ de $\mathcal{L}(E[0,1])$ définis par $\bar{f} = (f)_{t\in[0,1]}$ et $\bar{g} = ((1-t)g + tg')_{t\in[0,1]}$. Alors $(E[0,1], \bar{f}, \bar{g}\bar{f}\bar{g})$ appartient à $E_{G,N}^{\mathrm{ban,com}}(A,B[0,1])$. En effet pour tout $a \in A$, $[a,\bar{f}]$, $[a,\bar{g}]$, $a\bar{f}^2$ et $a(\bar{f}\bar{g} + \bar{g}\bar{f} - \mathrm{Id})$ sont compacts. Par suite, modulo les compacts, $a(\bar{f}\bar{g})^2 - a(\bar{f}\bar{g}) = a(\bar{f}\bar{g} + \bar{g}\bar{f} - \mathrm{Id})(\bar{f}\bar{g}) = 0$. De même $a(\bar{g}\bar{f})^2 - a(\bar{g}\bar{f})$ est compact. Il en résulte d'une part que $a(\bar{f}(\bar{g}\bar{f}\bar{g}) + (\bar{g}\bar{f}\bar{g})\bar{f} - \mathrm{Id})$ est compact, et d'autre part que $a\bar{f}(\bar{g})^2\bar{f}$ est compact, et donc que $a(\bar{g}\bar{f}\bar{g})^2$ est compact. Enfin $(E,f,gfg)_R$ et $(E,f,g)_R$ sont homotopes dans $E_{G,N}^{\mathrm{ban}}(A,B)$ par le lemme 1.2.3 et de même $(E,f,g'fg')_R$ et $(E,f,g')_R$ sont homotopes dans $E_{G,N}^{\mathrm{ban}}(A,B)$. L'astuce consistant à introduire $\bar{g}\bar{f}\bar{g}$ m'a été suggérée par Georges Skandalis.

On peut énoncer un lemme analogue au précédent en intervertissant les rôles de f et g.

Voici un second résultat d'homotopie qui nous sera très utile.

Proposition 1.4.3 *Soient G un groupe localement compact, N une norme sur G et A et B des G-algèbres de Banach. Soit $x = (E,f,g)$ avec E un (G,N)-(A,B)-bimodule de Banach $\mathbb{Z}$-gradué, $f \in \mathcal{L}(E)$ de degré 1 et $g \in \mathcal{L}(E)$ de degré -1, tels que f^2 et $\mathrm{Id} - gf - fg$ soient nuls et $h(f) = f$ pour tout $h \in G$, et tels que pour tout $a \in A$, $[a,f]$ soit nul, $[a,g]$ et ag^2 soient compacts, et $h \mapsto a(g - h(g))$ soit une application continue de G dans $\mathcal{K}(E)$.*

Alors x appartient à $E_{G,N}^{\mathrm{ban,com}}(A,B)$ et x_R est homotope à 0 dans $E_{G,N}^{\mathrm{ban}}(A,B)$.

Démonstration. Notons $F^>$ l'adhérence dans $E^>$ de l'image de $E^>$ par $f^>$, muni de la norme induite et $G^>$ le quotient de $E^>$ par $F^>$, muni de la norme quotient. Comme f commute aux éléments de A et de G, $F^>$ et $G^>$ sont des (G,N)-B-modules de Banach à droite $\mathbb{Z}$-gradués, et des A-modules de Banach à gauche. De même notons $G^<$ l'adhérence dans $E^<$ de l'image de $E^<$ par $f^<$, munie de la norme induite, et $F^<$ le quotient de $E^<$ par $G^<$, muni de la norme quotient. Comme f commute aux éléments de A et de G, $G^<$ et $F^<$ sont des (G,N)-B-modules de Banach à gauche $\mathbb{Z}$-gradués, et des A-modules de Banach à droite.

Pour tout $x \in E^>$ et pour tout $\xi \in E^<$ on a $\langle f^<(\xi), f^>(x)\rangle = \langle \xi, f^{2,>}(x)\rangle = 0$ car $f^2 = 0$. Donc, pour tout $x \in F^>$, pour tout $\xi \in G^<$ on a $\langle \xi, x\rangle = 0$. Par conséquent $(F^<, F^>)$ et $(G^<, G^>)$ sont des B-paires et en fait des (G,N)-(A,B)-bimodules $\mathbb{Z}$-gradués. On note $\bar{E}_0^> = F^> \oplus G^>$ muni de la norme somme directe et $\bar{E}_0^< = G^< \oplus F^<$ muni de la norme somme directe, si bien que $\bar{E}_0 = (\bar{E}_0^<, \bar{E}_0^>)$ est le (G,N)-(A,B)-bimodule $\mathbb{Z}$-gradué somme directe de $(F^<, F^>)$ et $(G^<, G^>)$.

Soit $t \in]0,1]$. On pose $\bar{E}_t^> = E^>$ muni de la norme suivante :

$$\text{si } x \in E^>, \|x\|_{\bar{E}_t^>} = \inf_{y \in F^>} (\|y\|_{F^>} + t^{-1}\|x-y\|_{E^>})$$

et $\bar{E}_t^< = E^<$ muni de la norme suivante :

$$\text{si } \xi \in E^<, \|\xi\|_{\bar{E}_t^<} = \inf_{\nu \in G^<} (t\|\nu\|_{G^<} + \|\xi - \nu\|_{E^<}).$$

On définit le crochet entre $\bar{E}_t^<$ et $\bar{E}_t^>$ comme étant égal au crochet entre $E^<$ et $E^>$. Alors $\bar{E}_t = (\bar{E}_t^<, \bar{E}_t^>)$ est une B-paire car, pour $\xi \in E^<$ et $x \in E^>$, on a

$$\|\langle \xi, x\rangle\|_B \leq \Big(\inf_{y \in F^>} \|y\|_{F^>} + t^{-1}\|x-y\|_{E^>}\Big)\Big(\inf_{\nu \in G^<} t\|\nu\|_{G^<} + \|\xi-\nu\|_{E^<}\Big).$$

En effet, pour $\xi \in E^<, \nu \in G^<, x \in E^>, y \in F^>$, on a

$$\begin{aligned}\|\langle \xi, x\rangle\|_B \leq \|\langle \xi, y\rangle\|_B + \|\langle \xi, x-y\rangle\|_B &\leq \|\xi-\nu\|_{E^<}\|y\|_{F^>} + \|\xi\|_{E^<}\|x-y\|_{E^>} \\ &\leq \Big(\|y\|_{F^>} + t^{-1}\|x-y\|_{E^>}\Big)\max(\|\xi-\nu\|_{E^<}, t\|\xi\|_{E^<}),\end{aligned}$$

et $\max(\|\xi-\nu\|_{E^<}, t\|\xi\|_{E^<}) \leq t\|\nu\|_{G^<} + \|\xi-\nu\|_{E^<}$.

Nous allons maintenant construire un (G,N)-$(A,B[0,1])$-bimodule $\mathbb{Z}$-gradué $\bar{E} = (\bar{E}^<, \bar{E}^>)$ tel que l'image directe de ce module par l'évaluation en t soit isomorphe à $\bar{E}_t$ (avec égalité des normes) pour tout $t \in [0,1]$.

Construisons d'abord un (G,N)-$B[0,1]$-module de Banach à droite non dégénéré $\mathbb{Z}$-gradué $\bar{E}^>$: $\bar{E}^>$ est égal à l'ensemble des x dans $\prod_{t\in[0,1]} \bar{E}_t^>$ tels que $(x(t))_{t\in]0,1]}$ appartienne à $C(]0,1], E^>)$ et qu'en posant $x(0) = (y,z)$ dans $F^> \oplus G^>$ on ait $\lim_{t\mapsto 0} \|x(t) - y\|_{E^>} = 0$ et $\lim_{t\mapsto 0} \|t^{-1}\overline{x(t)} - z\|_{G^>} = 0$ où $\overline{x(t)}$ désigne la classe de $x(t)$ dans $G^>$ et la norme sur $\bar{E}^>$ est donnée par $\|x\|_{\bar{E}^>} = \sup_{t\in[0,1]} \|x(t)\|_{\bar{E}_t^>}$. On a aussi que $\bar{E}^>$ est un A-module de Banach à gauche. On vérifie que l'ensemble $\Lambda^>$ des éléments x de $\bar{E}^>$ de la forme $x(0) = (y,0)$, $x(t) = y$ pour $t \in]0,1]$, où $y \in F^>$ et de la forme $x(0) = (0, \bar{u})$, $x(t) = tu$ pour $t \in]0,1]$, où $u \in E^>$, engendre $\bar{E}^>$ comme $B[0,1]$-module.

Construisons enfin un (G,N)-$B[0,1]$-module de Banach à gauche non dégénéré $\mathbb{Z}$-gradué $\bar{E}^<$: $\bar{E}^<$ est égal à l'ensemble des ξ dans $\prod_{t\in[0,1]} \bar{E}_t^<$ tels que $(\xi(t))_{t\in]0,1]}$ appartienne à $C(]0,1], E^<)$ et qu'en posant $\xi(0) = (\nu, \eta)$ dans

$G^< \oplus F^<$ on ait $\lim_{t\mapsto 0} \|t\xi(t) - \nu\|_{E^<} = 0$ et $\lim_{t\mapsto 0} \|\overline{\xi(t)} - \eta\|_{F^<} = 0$, où $\overline{\xi(t)}$ désigne la classe de $\xi(t)$ dans $F^<$, et la norme sur $\bar{E}^<$ est donnée par $\|\xi\|_{\bar{E}^<} = \sup_{t\in[0,1]} \|\xi(t)\|_{\bar{E}_t^<}$. On a aussi que $\bar{E}^<$ est un A-module de Banach à droite. On vérifie que l'ensemble $\Lambda^<$ des éléments ξ de $\bar{E}^<$ de la forme $\xi(0) = (\nu, 0), \xi(t) = t^{-1}\nu$ pour $t \in]0,1]$, où $\nu \in G^<$, et de la forme $\xi(0) = (0, \bar{\alpha}), \xi(t) = \alpha$ pour $t \in]0,1]$, où $\alpha \in E^<$, et où $\bar{\alpha}$ désigne l'image de α dans $F^<$, engendre $\bar{E}^<$ comme $B[0,1]$-module.

Montrons maintenant que $\bar{E} = (\bar{E}^<, \bar{E}^>)$ est un (G,N)-$(A, B[0,1])$-bimodule $\mathbb{Z}$-gradué.

Pour cela il nous reste à définir le crochet : pour $x \in \bar{E}^>$ et $\xi \in \bar{E}^<$ on pose $\langle \xi, x\rangle = (\langle \xi(t), x(t)\rangle)_{t\in[0,1]}$ en utilisant les structures de B-paires sur $\bar{E}_t$ pour $t \in [0,1]$. On vérifie que, pour $x \in \Lambda^>, \xi \in \Lambda^<$, $(\langle \xi(t), x(t)\rangle)_{t\in[0,1]}$ appartient à $B[0,1]$.

Ainsi nous avons construit un (G,N)-$(A, B[0,1])$-bimodule $\mathbb{Z}$-gradué $\bar{E}$. Nous définissons des morphismes de $B[0,1]$-paires $\bar{f} = (\bar{f}_t)_{t\in[0,1]}$ et $\bar{g} = (\bar{g}_t)_{t\in[0,1]}$ de degré 1 et -1 de $\bar{E}$ vers $\bar{E}$ en posant, pour $t \in]0,1]$, $\bar{f}_t = \frac{1}{t} f$ et $\bar{g}_t = tg$, où l'on rappelle que $\bar{E}_t$ est identifié à E à équivalence des normes près, et pour $t = 0$, $\bar{f}_0^>(y,z) = (\overline{f^>(z)}, 0)$ si $(y,z) \in F^> \oplus G^>$, $\bar{f}_0^<(\nu, \eta) = (\overline{f^<(\eta)}, 0)$ si $(\nu,\eta) \in G^< \oplus F^<$, $\bar{g}_0^>(y,z) = (0, \overline{g^>(y)})$ si $(y,z) \in F^> \oplus G^>$, où $\overline{g^>(y)}$ désigne la classe de $g^>(y) \in E^>$ dans $G^>$, $\bar{g}_0^<(\nu,\eta) = (0, \overline{g^<(\nu)})$ si $(\nu,\eta) \in G^< \oplus F^<$, où $\overline{g^<(\nu)}$ est la classe de $g^<(\nu) \in E^<$ dans $F^<$. Les notations $f^>(z)$ et $f^<(\eta)$ ont un sens car $f^2 = 0$. Vérifions que $y = (\bar{E}, \bar{f}, \bar{g})$ appartient à $E_{G,N}^{\mathrm{ban,com}}(A, B[0,1])$. D'abord $\bar{f}^>(\Lambda^>) \subset \bar{E}^>$, $\bar{f}^<(\Lambda^<) \subset \bar{E}^<$, $\bar{g}^>(\Lambda^>) \subset \bar{E}^>$ et $\bar{g}^<(\Lambda^<) \subset \bar{E}^<$ et pour tout $t \in [0,1]$, $(\bar{f}_t^<, \bar{f}_t^>)$ et $(\bar{g}_t^<, \bar{g}_t^>)$ sont des morphismes de B-paires, dont la norme est bornée indépendamment de t par la norme de f et la norme de g, donc $\bar{f}$ et $\bar{g}$ sont des morphismes de $B[0,1]$-paires. Ensuite $\bar{f}$ commute exactement à A et à l'action de G car c'est le cas de f. Soit $a \in A$. Alors $[a, \bar{g}]$ est compact car il est le composé des trois morphismes de $B[0,1]$-paires suivants : $[a,\bar{g}] = m([a,g])_{t\in[0,1]} l$ où $l : \bar{E} \to E[0,1]$ est donné par $l_t^>(x) = x$ pour $t \in]0,1]$ et $x \in \bar{E}_t^> = E^>$ et $l_0^>((y,z)) = y$ si $(y,z) \in F^> \oplus G^>$, et $l_t^<(\xi) = \xi \in E_t^< = E^<$ pour $t \in]0,1]$ et $l_0^<(\xi) = (0, \bar{\xi}) \in G^< \oplus F^<$ si $\xi \in E^<$, ensuite $m : E[0,1] \to \bar{E}$ est donné par $m_t^>(x) = tx$ pour $t \in]0,1]$ et $x \in E^>$, $m_0^>(x) = (0, \bar{x})$ pour $x \in E^>$, et $m_t^<(\xi) = t\xi$ pour $t \in]0,1]$ et $\xi \in \bar{E}_t^< = E^<$, et $m_0^<((\nu,\eta)) = \nu$ si $(\nu,\eta) \in G^< \oplus F^<$ et enfin $([a,g])_{t\in[0,1]} : E[0,1] \to E[0,1]$ est compact car $[a,g]$ est compact. Le même argument prouve que $(a(h(\bar{g}) - \bar{g}))_{h\in G}$ appartient à $C(G, \mathcal{K}(\bar{E}))$. Enfin $\mathrm{Id} - \bar{g}\bar{f} - \bar{f}\bar{g} = 0$. Nous avons montré que y appartient à $E_{G,N}^{\mathrm{ban,com}}(A, B[0,1])$. Or $\sigma_1^*(y) = x$ dans $E_{G,N}^{\mathrm{ban,com}}(A,B)$ et $\sigma_0^*(y)_R$ est homotope à 0 dans $E_{G,N}^{\mathrm{ban}}(A,B)$ d'après le lemme 1.2.4 car $\sigma_0^*(y)_R$ est dégénéré : en effet, dans la décomposition $\bar{E}_0 = F \oplus G$, $\bar{f}_0$ et $\bar{g}_0$ sont de la forme $\bar{f}_0 = \begin{pmatrix} 0 & f' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\bar{g}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g' & 0 \end{pmatrix}$ et f' commute à A et est exactement G-équivariant, et comme $f'g' - \mathrm{Id}_F = 0$ et $g'f' - \mathrm{Id}_G = 0$, g' commute également à A et est G-équivariant.

1.5 Descente

Dans toute cette section nous considérons un groupe G localement compact muni d'une mesure de Haar à gauche dg. Nous dirons qu'une algèbre de Banach $\mathcal{A}(G)$ est une bonne complétion de $C_c(G)$ si elle contient $C_c(G)$ comme sous-algèbre dense et si quels que soient $f_1, f_2 \in C_c(G)$ tels que $|f_1(g)| \leq |f_2(g)|$ pour tout $g \in G$ on a $\|f_1\|_{\mathcal{A}(G)} \leq \|f_2\|_{\mathcal{A}(G)}$.

Fixons une bonne complétion $\mathcal{A}(G)$ de $C_c(G)$.

Soient N une norme sur G et B une G-algèbre de Banach . On note $C_c(G, B)$ l'espace des fonctions continues à support compact de G dans B et on munit cet espace de la structure d'algèbre suivante: pour $f_1, f_2 \in C_c(G, B)$, $(f_1 * f_2)(g) = \int_G f_1(g_1) g_1(f_2(g_1^{-1} g)) dg_1$, ce qui revient intuitivement à noter les éléments de $C_c(G, B)$ sous la forme $f = \int_G f(g) e_g dg$. La convention adoptée ici est celle de [Kas88].

Proposition 1.5.1 *Le complété de $C_c(G, B)$ pour la norme $\|f\| = \Big\| g \mapsto N(g)\|f(g)\|_B \Big\|_{\mathcal{A}(G)}$ est une algèbre de Banach, notée $\mathcal{A}_N(G, B)$.*

La preuve est immédiate. Lorsque $N = 1$ nous omettons N et lorsque $B = \mathbb{C}$, nous notons $\mathcal{A}_N(G)$ au lieu de $\mathcal{A}_N(G, \mathbb{C})$. Pour la KK-théorie le fait suivant est important : $\mathcal{A}_N(G)$ est non dégénérée et plus généralement si la G-algèbre de Banach B non dégénérée, $\mathcal{A}_N(G, B)$ est non dégénérée. Remarquons que $\mathcal{A}'(G) = \mathcal{A}_N(G)$ est une autre bonne complétion de $C_c(G)$. C'est pourquoi nous oublions momentanément N sans perte de généralité.

Si C est une autre G-algèbre de Banach et $\theta : B \to C$ est un morphisme G-équivariant d'algèbres de Banac, on définit un morphisme d'algèbres de Banach $\mathcal{A}(G, \theta) : \mathcal{A}(G, B) \to \mathcal{A}(G, C)$ en posant $(\mathcal{A}(G, \theta) f)(g) = \theta(f(g))$.

Soit E une B-paire. Intuitivement nous notons $x \in C_c(G, E^>)$ sous la forme $x = \int_G x(g) e_g dg$ et $\xi \in C_c(G, E^<)$ sous la forme $\xi = \int_G e_g \xi(g) dg$.

Définition 1.5.2 *Notons $\mathcal{A}(G, E)^>$ la complétion de $C_c(G, E^>)$ pour la norme $\|x\| = \Big\| g \mapsto \|x(g)\|_{E^>} \Big\|_{\mathcal{A}(G)}$, et $\mathcal{A}(G, E)^<$ la complétion de $C_c(G, E^<)$ pour la norme $\|\xi\| = \Big\| g \mapsto \|\xi(g)\|_{E^<} \Big\|_{\mathcal{A}(G)}$. Pour $x \in C_c(G, E^>)$, $\xi \in C_c(G, E^<)$,* *et* $f \in C_c(G,B)$, *et pour tout* $g \in G$, *posons*

$$\begin{aligned}
(x.f)(g) &= \int_G x(g_1) g_1(f(g_1^{-1}g)) dg_1 \\
(f.\xi)(g) &= \int_G g^{-1}(f(g_1))\xi(g_1^{-1}g) dg_1 \\
\langle \xi, x\rangle(g) &= \int_G g_1(\langle \xi(g_1), x(g_1^{-1}g)\rangle) dg_1.
\end{aligned}$$

Ceci définit une $\mathcal{A}(G,B)$*-paire* $\mathcal{A}(G,E) = (\mathcal{A}(G,E)^<, \mathcal{A}(G,E)^>)$.

Si F est une seconde B-paire, et si T est un morphisme de B-paires de E vers F, nous définissons un morphisme $\mathcal{A}(G,T)$ de $\mathcal{A}(G,B)$-paires de $\mathcal{A}(G,E)$ vers $\mathcal{A}(G,F)$ en posant

$$\text{pour tout } x \in C_c(G,E^>), \mathcal{A}(G,T)^>(x)(g) = T^>(x(g))$$
$$\text{et pour tout } \xi \in C_c(G,F^<), \mathcal{A}(G,T)^<(\xi)(g) = T^<(\xi(g)).$$

On a $\|\mathcal{A}(G,T)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{A}(G,E),\mathcal{A}(G,F))} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$. Kasparov définit dans [Kas88], 3.11, un opérateur analogue à $\mathcal{A}(G,T)$ et le note $\tilde{T}$.

Supposons de plus que A est une G-algèbre de Banach, N une norme sur G et que la B-paire E est munie d'une structure de (G,N)-(A,B)-bimodule.

Proposition 1.5.3 *Sous ces hypothèses* $\mathcal{A}(G,E)$ *est un* $(\mathcal{A}_N(G,A), \mathcal{A}(G,B))$*-bimodule.*

La formule est la suivante: pour $h \in C_c(G,A)$, $x \in C_c(G,E^>)$, et $\xi \in C_c(G,E^<)$ et pour tout $g \in G$, on pose

$$\begin{aligned}
(h.x)(g) &= \int_G h(g_1) g_1(x(g_1^{-1}g)) dg_1 \\
(\xi.h)(g) &= \int_G (g_1^{-1}g)^{-1}\Big(\xi(g_1) h(g_1^{-1}g)\Big) dg_1.
\end{aligned}$$

La formule devient claire si on écrit $h = \int_G h(g) e_g dg$, $x = \int_G x(g) e_g dg$ et $\xi = \int_G e_g \xi(g) dg$.

Vérifions par exemple que $\mathcal{A}(G,E)^>$ est un $\mathcal{A}_N(G,A)$-module de Banach à gauche. Avec les notations ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}
\|h.x\|_{\mathcal{A}(G,E)^>} &= \left\| g \mapsto \left\| \int h(g_1) g_1(x(g_1^{-1}g)) dg_1 \right\|_{E^>} \right\|_{\mathcal{A}(G)} \\
&\leq \left\| g \mapsto \int \|h(g_1)\|_A N(g_1) \|x(g_1^{-1}g)\|_{E^>} dg_1 \right\|_{\mathcal{A}(G)} \\
&\leq \|h\|_{\mathcal{A}_N(G,A)} \|x\|_{\mathcal{A}(G,E)^>}.
\end{aligned}$$

Proposition-Définition 1.5.4 *Soient G un groupe localement compact, $\mathcal{A}(G)$ une bonne complétion de $C_c(G)$ et N une norme sur G. Soient A et B des G-algèbres de Banach. Pour tout $(E,T) \in E^{\mathrm{ban}}_{G,N}(A,B)$, le couple $j_{\mathcal{A}}(E,T) = (\mathcal{A}(G,E), \mathcal{A}(G,T))$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}_N(G,A), \mathcal{A}(G,B))$. L'application $j_{\mathcal{A}}$ ainsi définie est compatible aux images directes et à l'homotopie et détermine un homomorphisme de descente*

$$j_{\mathcal{A}} : KK^{\mathrm{ban}}_{G,N}(A,B) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}_N(G,A), \mathcal{A}(G,B)).$$

De plus $j_{\mathcal{A}}$ est fonctorielle en A et B : si A_1 et C sont deux G-algèbres de Banach, $\theta : B \to C$ et $\theta_1 : A_1 \to A$ des morphismes G-équivariants d'algèbres de Banach, et $\alpha \in KK^{\mathrm{ban}}_{G,N}(A,B)$, on a $\mathcal{A}(G,\theta)_*(j_{\mathcal{A}}(\alpha)) = j_{\mathcal{A}}(\theta_*(\alpha))$ dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}_N(G,A), \mathcal{A}(G,C))$ et $\mathcal{A}_N(G,\theta_1)^*(j_{\mathcal{A}}(\alpha)) = j_{\mathcal{A}}(\theta_1^*(\alpha))$ dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}_N(G,A_1), \mathcal{A}(G,B))$

Démonstration. Soit $a \in C_c(G,A)$. Nous devons vérifier que $[a, \mathcal{A}(G,T)]$ est un morphisme compact de $\mathcal{A}(G,B)$-paires. Pour $x \in C_c(G,E^>)$ nous calculons

$$\begin{aligned} [a, \mathcal{A}(G,T)]^>(x)(g) &= (a\mathcal{A}(G,T)^>(x))(g) - (\mathcal{A}(G,T)^>(ax))(g) \\ &= \int_G a(g_1)g_1(T^>(x(g_1^{-1}g)))dg_1 - \int_G T^>(a(g_1)g_1(x(g_1^{-1}g)))dg_1 \end{aligned}$$
$$= \int_G a(g_1)(g_1(T^>) - T^>)(g_1(x(g_1^{-1}g)))dg_1 + \int_G [a(g_1), T^>](g_1(x(g_1^{-1}g)))dg_1.$$

Le calcul analogue pour $\xi \in C_c(G,E^<)$ est désagréable car $T^<$ n'agit pas du côté où il devrait. Le fait que $[a, \mathcal{A}(G,T)]$ est compact résulte du lemme 1.5.5 ci-dessous.

Vérifions maintenant que $a(\mathrm{Id} - \mathcal{A}(G,T)^2)$ est compact. Pour $x \in C_c(G,E^>)$ nous calculons

$$\begin{aligned} &(a(\mathrm{Id} - \tilde{T}^{2,>}))(x)(g) \\ &= \int_G a(g_1)g_1((\mathrm{Id} - T^{2,>})x(g_1^{-1}g))dg_1 \\ &= \int_G a(g_1)g_1(\mathrm{Id} - T^{2,>})g_1(x(g_1^{-1}g))dg_1. \end{aligned}$$

La compacité de $a(\mathrm{Id} - \mathcal{A}(G,T)^2)$ résulte du lemme 1.5.5 ci-dessous.

Lemme 1.5.5 *Soient G un groupe localement compact, N une norme sur G, $\mathcal{A}(G)$ une bonne complétion de $C_c(G)$, B une G-algèbre de Banach et E et F des (G,N)-B-paires. Soit $S = (S_g)_{g\in G} \in C_c(G, \mathcal{K}(E,F))$. Définissons* *un morphisme $\hat{S}$ de $\mathcal{A}(G,B)$-paires de $\mathcal{A}(G,E)$ dans $\mathcal{A}(G,F)$ par la formule suivante : pour tout $g \in G$,*

$$\hat{S}^{>}(x)(g) = \int_G S^{>}_{g_1}(g_1(x(g_1^{-1}g)))dg_1 \text{ pour } x \in C_c(G,E^{>})$$

$$\text{et } \hat{S}^{<}(\eta)(g) = \int_G (g_1^{-1}g)^{-1}\big(S^{<}_{g_1^{-1}g}(\eta(g_1))\big)dg_1 \text{ pour } \eta \in C_c(G,F^{<}). \quad (1.1)$$

Alors

- *(i) $\hat{S}$ est un morphisme de $\mathcal{A}(G,B)$-paires de $\mathcal{A}(G,E)$ dans $\mathcal{A}(G,F)$ et on a $\|\hat{S}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{A}(G,E),\mathcal{A}(G,F))} \leq \Big\| g \mapsto \|S_g\|_{\mathcal{K}(E,F)} \Big\|_{\mathcal{A}_N(G)}$.*

- *(ii) $\hat{S}$ est compact et on a même un résultat plus précis : pour tout $\epsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$, et pour $i = 1,\dots,n$, des éléments $y_i \in C_c(G,F^{>})$et $\xi_i \in C_c(G,E^{<})$ tels que, si on pose pour tout $g \in G$*

$$S_{0,g} = \int_G \sum_{i=1}^{n} |y_i(g_1)\rangle\langle g(\xi_i(g_1^{-1}g))|dg_1, \quad (1.2)$$

alors $S_0 = (S_{0,g})_{g\in G}$ appartient à $C_c(G,\mathcal{K}(E,F))$ et d'une part, si on considère y_i et ξ_i comme des éléments de $\mathcal{A}(G,F)^{>}$ et $\mathcal{A}(G,E)^{<}$, on a $\hat{S}_0 = \sum_{i=1}^{n} |y_i\rangle\langle\xi_i|$ et d'autre part

$$\Big\| g \mapsto \|S_g - S_{0,g}\|_{\mathcal{K}(E,F)} \Big\|_{\mathcal{A}_N(G)} \leq \epsilon. \quad (1.3)$$

Démonstration. Pour comprendre (1.1) on peut écrire intuitivement $\hat{S}^{>} = \int_G S^{>}_g e_g dg$ et $\hat{S}^{<} = \int_G S^{<}_g e_g dg$ et penser que $\hat{S}^{<}$ devrait agir à droite sur η. Montrons par exemple que $\hat{S}$ est un morphisme de $\mathcal{A}(G,B)$-paires. Pour $x \in C_c(G,E^{>})$, $\eta \in C_c(G,F^{<})$ et $g \in G$, on a

$$\langle \eta, \hat{S}^{>}(x)\rangle(g) = \int_G g_1(\langle \eta(g_1), \hat{S}^{>}(x)(g_1^{-1}g)\rangle)dg_1$$
$$= \int_{G\times G} g_1(\langle \eta(g_1), S^{>}_{g_2}(g_2(x(g_2^{-1}g_1^{-1}g)))\rangle)dg_1dg_2$$

et

$$\langle \hat{S}^{<}(\eta), x\rangle(g) = \int_G g_3(\langle \hat{S}^{<}(\eta)(g_3), x(g_3^{-1}g)\rangle)dg_3$$
$$= \int_{G\times G} g_3(\langle (g_1^{-1}g_3)^{-1}(S^{<}_{g_1^{-1}g_3}(\eta(g_1))), x(g_3^{-1}g)\rangle)dg_1dg_3$$
$$= \int_{G\times G} g_1(\langle S^{<}_{g_1^{-1}g_3}(\eta(g_1)), (g_1^{-1}g_3)(x(g_3^{-1}g))\rangle)dg_1dg_3$$

et les deux expressions auxquelles nous avons abouti se trouvent être égales grâce au changement de variables suivant : $g_3 = g_1 g_2$. Comme la suite de (i) est claire, vérifions (ii). D'abord on a bien $\hat{S}_0 = \sum_{i=1}^n |y_i\rangle\langle\xi_i|$. En effet on calcule par exemple, pour $x \in C_c(G, E^>)$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \big(y_i\langle\xi_i, x\rangle\big)(g) &= \sum_{i=1}^n \int_G y_i(g_1)g_1(\langle\xi_i, x\rangle(g_1^{-1}g))dg_1 \\
= \sum_{i=1}^n &\int_{G\times G} y_i(g_1)(g_1g_2)(\langle\xi_i(g_2)|x((g_1g_2)^{-1}g)\rangle)dg_1dg_2 \\
&= \int_G S^>_{0,g'}(g'(x(g'^{-1}g)))dg' \text{ en posant } g' = g_1g_2,
\end{aligned}$$

d'où $\sum_{i=1}^n y_i\langle\xi_i, x\rangle = \hat{S}_0^>(x)$ et un calcul analogue montre que $\sum_{i=1}^n \big(\langle\eta, y_i\rangle\xi_i\big) = \hat{S}_0^<(\eta)$ pour tout $\eta \in C_c(G, F^<)$.

Enfin vérifions que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$, et des éléments y_i, ξ_i pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, tels que si on définit S_0 par (1.2), alors (1.3) ait lieu. Il est clair que pour tout compact K de G, il existe une constante C telle que pour toute fonction $f \in C_c(G)$ à support dans K, on ait $\|f\|_{\mathcal{A}_N(G)} \le C \sup_K |f|$. Par définition de $\mathcal{K}(E, F)$ et à l'aide d'une partition de l'unité sur G on voit qu'il suffit de démontrer l'assertion pour S de la forme $S_g = f(g)|y\rangle\langle\xi|$, avec $y \in F^>$, $\xi \in E^<$ et $f \in C_c(G)$. Pour tout voisinage $\mathcal{W}$ de 1 dans G il existe une fonction $\chi \in C_c(G)$ positive d'intégrale 1 et à support dans $\mathcal{W}$. On pose alors $n = 1$, $y_1(g) = \chi(g)y$ et $\xi_1(g) = f(g)g^{-1}(\xi)$ et (1.3) a lieu si $\mathcal{W}$ est assez petit.

La fonctorialité en A est évidente. Vérifions la fonctorialité en B et introduisons C et θ comme dans l'énoncé et un (G, N)-(A, B)-bimodule de Banach E. On a un morphisme τ de $\mathcal{A}(G, C)$-modules de Banach à droite et de norme inférieure ou égale à 1, de

$$\mathcal{A}(G, \theta)_*(\mathcal{A}(G, E)^>) = \mathcal{A}(G, E)^> \otimes_{\widetilde{\mathcal{A}(G,B)}} \widetilde{\mathcal{A}(G, C)}$$

vers

$$\mathcal{A}(G, \theta_*(E))^> = \mathcal{A}(G, E^> \otimes_{\tilde{B}} \tilde{C}).$$

Soit $\mathcal{A}_\theta(G, E)^>$ le cône associé à ce morphisme, c'est-à-dire le $\mathcal{A}(G, C)[0, 1]$-module de Banach à droite égal à

$$\{(h, x) \in \mathcal{A}(G, \theta_*(E))^>[0, 1] \times \mathcal{A}(G, \theta)_*(\mathcal{A}(G, E)^>), h(0) = \tau(x)\}.$$

On introduit de même $\mathcal{A}_\theta(G, E)^<$, si bien que $\mathcal{A}_\theta(G, E) = (\mathcal{A}_\theta(G, E)^<, \mathcal{A}_\theta(G, E)^>)$ est un $(\mathcal{A}_N(G, A), \mathcal{A}(G, C)[0, 1])$-bimodule de Banach. A l'opérateur T on associe un opérateur évident $\mathcal{A}_\theta(G,T) \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_\theta(G,E))$ dont l'évaluation en 0 est $\theta_*(\mathcal{A}(G,T))$ et dont l'évaluation en 1 est $\mathcal{A}(G,\theta_*(T))$. On montre que $(\mathcal{A}_\theta(G,E),\mathcal{A}_\theta(G,T))$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}_N(G,A),\mathcal{A}(G,C)[0,1])$ en répétant les arguments qui ont servi à prouver l'appartenance de $(\mathcal{A}(G,E),\mathcal{A}(G,T))$ à $E^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}_N(G,A),\mathcal{A}(G,B))$: plus précisément on remplace partout $\mathcal{A}(G,.)$ par $\mathcal{A}_\theta(G,.)$ et par exemple on remplace l'élément $y_i \in \mathcal{A}(G,F)$ qui apparaît dans la deuxième assertion du lemme 1.5.5 par $(h,x) \in \mathcal{A}_\theta(G,F)$ défini par $h(t) = (g \mapsto y_i(g)\otimes 1)$ et $x = y_i \otimes 1$. On voit que $(\mathcal{A}_\theta(G,E),\mathcal{A}_\theta(G,T))$ réalise l'homotopie entre $\mathcal{A}(G,\theta)_*(j_{\mathcal{A}}(\alpha))$ et $j_{\mathcal{A}}(\theta_*(\alpha))$.

1.6 Compatibilité avec la KK-théorie de Kasparov

Dans la suite toutes les C^*-algèbres sont supposées σ-unitales. Lorsque A et B sont deux C^*-algèbres on note $A\otimes B$ leur produit tensoriel minimal. Pour tout groupe localement compact G on appelle G-C^*-algèbre une C^*-algèbre munie d'une action continue de G par automorphismes de C^*-algèbres, c'est-à-dire une G-algèbre au sens de [Kas88].

Soient G un groupe localement compact et A et B deux G-C^*-algèbres. Kasparov définit $E_G(A,B)$ comme l'ensemble des $x=(E,T)$ où E est un G-(A,B)-bimodule $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué au sens de [Kas88] et T un morphisme impair de B-modules hilbertiens tel que pour tout $a \in A$, $[a,T], a(1-T^2), a(T-T^*)$ soient compacts et $g \mapsto a(g(T)-T)$ soit une fonction continue de G dans $\mathcal{K}(E)$. D'où $\iota : E_G(A,B) \to E_G^{\mathrm{ban}}(A,B)$ et en quotientant par homotopie on obtient un homomorphisme $\iota : KK_G(A,B) \to KK_G^{\mathrm{ban}}(A,B)$.

Proposition 1.6.1 *Soient G un groupe localement compact et A et B deux G-C^*-algèbres. Alors l'homomorphisme*

$$\iota : KK_G(A,B) \to KK_G^{\mathrm{ban}}(A,B). \tag{1.4}$$

défini ci-dessus est fonctoriel en A et B et, si G est trivial, pour tout $i \in \{0,1\}$et pour tout $\alpha \in KK(A,B)$, les applications de $K_i(A)$ vers $K_i(B)$ fournies par le produit de Kasparov par α d'après [Kas88], et par $p(\iota(\alpha))$ d'après la proposition 1.2.9, sont identiques.

Il est clair que ι est fonctoriel en A. Pour montrer la fonctorialité de ι en B, on se donne une G-C^*-algèbre C, un morphisme G-équivariant de C^*-algèbres θ de B dans C et $x=(E,T) \in E_G(A,B)$. Ainsi E est G-(A,B)-bimodule au sens de [Kas88] et on lui associe un G-$(A,C[0,1])$-bimodule de Banach $\mathcal{B}_\theta(E)$ de la façon suivante. Comme B possède une unité approchée $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de norme inférieure ou égale à 1 et comme E est un B-module non-dégénéré, la formule $u(x\otimes c)=\lim_{n\to+\infty} x\otimes\theta(v_n)c$ définit un morphisme de C-modules de Banach $u:\theta_*(E^>)=E^>\otimes^\pi_{\tilde{B}}\tilde{C}\to E\otimes_B C$ où $E\otimes_B C$ désigne le produit tensoriel hilbertien et on a $\|u\|\leq 1$. On pose alors $\mathcal{B}_\theta(E)^>=\{(h,x),h\in(E\otimes_B C)[0,1],x\in\theta_*(E^>),h(0)=u(x)\}$, muni de la norme $\|(h,x)\|=\max(\|x\|,\sup_{t\in[0,1]}\|h(t)\|)$ et on définit de manière analogue $\mathcal{B}_\theta(E)^<$, si bien que $\mathcal{B}_\theta(E)=(\mathcal{B}_\theta(E)^<,\mathcal{B}_\theta(E)^>)$ est un G-$(A,C[0,1])$-bimodule de Banach. On construit enfin $\mathcal{B}_\theta(T)\in\mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta(E))$ en posant $\mathcal{B}_\theta(T)^>(h,x)=((T\otimes 1)(h),\theta_*(T)(x))$ et avec une formule analogue pour $\mathcal{B}_\theta(T)^<$. Alors $(\mathcal{B}_\theta(E),\mathcal{B}_\theta(T))$ appartient à $E_G^{\mathrm{ban}}(A,C[0,1])$ et réalise une homotopie entre $\iota(\theta_*(x))$ et $\theta_*(\iota(x))$ dans $E_G^{\mathrm{ban}}(A,C)$: nous utilisons l'inclusion $\mathcal{B}_\theta(\mathcal{K}(E))\subset\mathcal{K}(\mathcal{B}_\theta(E))$, où $\mathcal{K}(E)$ désigne l'algèbre des opérateurs compacts sur le B-module hilbertien E.

Montrons maintenant que pour $\alpha\in KK(A,B)$, α et $\iota(\alpha)$ induisent la même application de $K_0(A)$ vers $K_0(B)$. La démonstration a été beaucoup simplifiée grâce à une suggestion de Georges Skandalis.

D'abord l'application $\iota:KK(\mathbb{C},B)\to KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},B)$ est l'identité si l'on identifie $KK(\mathbb{C},B)$ à $K_0(B)$ et $KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},B)$ à $K_0(B)$. En effet que, pour toute C^*-algèbre B, l'isomorphisme $\zeta_{C^*}:K_0(B)\to KK(\mathbb{C},B)$ est construit de la même manière que nous avons construit $\zeta:K_0(B)\to KK^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},B)$, juste avant d'énoncer le théorème 1.2.8. Plus précisément soit $x\in K_0(B)$. Comme tout idempotent d'une C^*-algèbre est conjugué à un idempotent autoadjoint, il existe $p,n\in\mathbb{N}$ et $q\in L_{p,n}(B)$ autoadjoint représentant x. Posons $q_0=q$, $q_1=\begin{pmatrix}1_p & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, notons i_0 l'injection de q_0B^{p+n} dans B^{p+n} et π_0 la projection et introduisons de même i_1, π_1. Ce sont des morphismes de B-modules hilbertiens, π_0 est l'adjoint de i_0 et π_1 est l'adjoint de i_1. Donc $(q_0B^{p+n}\underset{\pi_0 i_1}{\overset{\pi_1 i_0}{\rightleftarrows}}q_1B^{p+n})$ appartient à $E(\mathbb{C},B)$ et $\zeta_{C^*}(x)$ est défini comme la classe de cet élément dans $KK(\mathbb{C},B)$.

Par conséquent $p(\iota(\alpha)):KK(A,B)\to\mathrm{Hom}(K_0(A),K_0(B))$ est fonctorielle en les C^*-algèbres A et B et coïncide avec $\zeta_{C^*}^{-1}$ si $A=\mathbb{C}$. Or ces conditions déterminent $p\circ\iota$ de manière unique d'après les arguments de la fin de la preuve de la proposition 1.2.9 et en vertu de la surjectivité de l'application $KK(\tilde{A},B)\to KK(A,B)$. Donc $p\circ\iota$ est égal au produit de Kasparov, puisque celui-ci vérifie les mêmes conditions.

Lemme 1.6.2 *Soient G un groupe localement compact et A,B,D des G-C^*-algèbres. On a des morphismes d'algèbres de Banach évidents $\theta_1:A\otimes^\pi D\to A\otimes D$ et $\theta_2:B\otimes^\pi D\to B\otimes D$. Pour tout $\alpha\in KK_G(A,B)$ on a*

$\theta_1^*(\iota(\sigma_D(\alpha))) = \theta_{2,*}(\sigma_D^{\mathrm{ban}}(\iota(\alpha)))$ dans $KK_G^{\mathrm{ban}}(A \otimes^\pi D, B \otimes D)$.

On le montre à l'aide de cônes.

Proposition 1.6.3 *Soient G un groupe localement compact, $\mathcal{A}(G)$ une bonne complétion de $C_c(G)$ telle que $\|f\|_{\mathcal{A}(G)} = \|f^*\|_{\mathcal{A}(G)}$ et $\|f\|_{C_r^*(G)} \leq \|f\|_{\mathcal{A}(G)}$ pour tout $f \in C_c(G)$.*

Pour toute G-C^*-algèbre A, pour tout $f \in C_c(G, A)$, on a $\|f\|_{C_r^*(G,A)} \leq \|f\|_{\mathcal{A}(G,A)}$, d'où un morphisme $i_A : \mathcal{A}(G, A) \to C_r^*(G, A)$ prolongeant $\mathrm{Id}_{C_c(G,A)}$.

Soient A et B des G-C^*-algèbres et $\alpha \in KK_G(A, B)$. Alors $j_r(\alpha) \in KK(C_r^*(G, A), C_r^*(G, B))$ construit dans [Kas88] et $j_{\mathcal{A}}(\iota(\alpha)) \in KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}(G, A), \mathcal{A}(G, B))$ ont même image dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}(G, A), C_r^*(G, B))$ par i_A^* et $i_{B,*}$.

Démonstration. Les ingrédients de la preuve consistent en quatre lemmes. Dans ces lemmes, G est un groupe localement compact et $\mathcal{A}(G)$ une bonne complétion de $C_c(G)$ telle que pour tout $f \in C_c(G)$ on ait $\|f^*\|_{\mathcal{A}(G)} = \|f\|_{\mathcal{A}(G)}$ et $\|f\|_{C_r^*(G)} \leq \|f\|_{\mathcal{A}(G)}$.

Lemme 1.6.4 *Soit A une G-C^*-algèbre. Alors pour tout $f \in C_c(G, A)$, on a $\|f\|_{C_r^*(G,A)} \leq \|f\|_{\mathcal{A}(G,A)}$.*

Notons $L^2(G, A)$ le A-module hilbertien défini dans [Kas88] et $H^2(G, A)$ la complétion de $C_c(G, A)$ pour la norme $\|x\|_{H^2(G,A)} = \Big(\int_G \|x(g)\|_A^2 dg\Big)^{\frac{1}{2}}$. Pour tout $x \in C_c(G, A)$ on a $\|x\|_{L^2(G,A)} \leq \|x\|_{H^2(G,A)}$. Soient $f, x \in C_c(G, A)$. Nous devons montrer $\|fx\|_{L^2(G,A)} \leq \|f\|_{\mathcal{A}(G,A)} \|x\|_{L^2(G,A)}$. Or

$$\|fx\|^2_{L^2(G,A)} = \|\langle x, f^*fx\rangle_{L^2(G,A)}\|_A \leq \|x\|_{L^2(G,A)} \|(f^*f)x\|_{L^2(G,A)}.$$

D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|fx\|^{2^n}_{L^2(G,A)} \leq \|x\|^{2^n-1}_{L^2(G,A)} \|(f^*f)^{2^{n-1}} x\|_{L^2(G,A)}.$$

Mais

$$\begin{aligned}\|(f^*f)^{2^{n-1}} x\|_{L^2(G,A)} \leq \|(f^*f)^{2^{n-1}} x\|_{H^2(G,A)} &\leq \|(f^*f)^{2^{n-1}}\|_{\mathcal{A}(G,A)} \|x\|_{H^2(G,A)} \\ &\leq \|f\|^{2^n}_{\mathcal{A}(G,A)} \|x\|_{H^2(G,A)}.\end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini on obtient l'inégalité souhaitée.

Lemme 1.6.5 *Soient B une G-C^*-algèbre et E un G-B-module hilbertien. On rappelle que $C_r^*(G, E)$ est un $C_r^*(G, B)$-module hilbertien construit comme complétion de $C_c(G, E)$ dans [Kas88]. On a, pour tout $f \in C_c(G, E)$, $\|f\|_{C_r^*(G,E)} \leq \|f\|_{\mathcal{A}(G,E)^>}$.*

On applique le lemme précédent à la G-C^*-algèbre $A = \begin{pmatrix} B & E \\ \bar{E} & \mathcal{K}(E) \end{pmatrix}$.

Maintenant on a besoin de l'analogue de l'assertion (i) du lemme 1.5.5 avec $C^*_r(G,E)$ au lieu de $\mathcal{A}(G,E)$.

Lemme 1.6.6 *Soient B une G-C^*-algèbre et E et F deux G-B-modules hilbertiens. Soit $S = (S_g)_{g\in G} \in C_c(G,\mathcal{K}(E,F))$. Posons, pour tout $x \in C^*_r(G,E)$ et pour tout $g \in G$,*

$$\hat{S}(x)(g) = \int_G S_{g_1}(g_1(x(g_1^{-1}g)))dg_1.$$

Alors $\hat{S}$ est un morphisme de $C^*_r(G,B)$-modules hilbertiens de $C^*_r(G,E)$ dans $C^*_r(G,F)$ et

$$\|\hat{S}\|_{\mathcal{L}(C^*_r(G,E),C^*_r(G,F))} \leq \left\| g \mapsto \|S_g\|_{\mathcal{K}(E,F)} \right\|_{L^1(G)}.$$

La dernière assertion est contenue dans la preuve du théorème 3.11 de [Kas88]. On peut adapter la partie (ii) du lemme 1.5.5.

Lemme 1.6.7 *Sous les hypothèses du lemme 1.5.5, la partie (ii) reste valable en remplaçant (1.3) par*

$$\left\| g \mapsto \|S_g - S_{0,g}\|_{\mathcal{K}(E,F)} \right\|_{\mathcal{A}(G)} + \left\| g \mapsto \|S_g - S_{0,g}\|_{\mathcal{K}(E,F)} \right\|_{L^1(G)} \leq \epsilon.$$

On réalise l'homotopie entre les images dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}(G,A), C^*_r(G,B))$ de $j_r(\alpha)$ et de $j_{\mathcal{A}}(\iota(\alpha))$ grâce à la construction suivante : si E est un G-B-module hilbertien, d'après le lemme 1.6.5 on a un morphisme de $C^*_r(G,B)$-modules de Banach à droite $u : i_{B,*}(\mathcal{A}(G,E)^>) \to C^*_r(G,E)$ et on pose $\mathcal{B}(G,E)^> = \{(h,x) \in C^*_r(G,E)[0,1] \times i_*(\mathcal{A}(G,E)^>), h(0) = u(x)\}$ muni de la norme $\|(h,x)\| = \max(\sup_{t\in[0,1]} \|h(t)\|, \|x\|)$. On définit de même $\mathcal{B}(G,E)^<$ et $\mathcal{B}(G,E) = (\mathcal{B}(G,E)^<, \mathcal{B}(G,E)^>)$ est un $(\mathcal{A}(G,A), C^*_r(G,B)[0,1])$-bimodule de Banach. Si maintenant $\alpha \in KK_G(A,B)$ est représenté par (E,T) avec E un G-(A,B)-bimodule, $(\mathcal{B}(G,E), \mathcal{B}(G,T))$ appartient à $E^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}(G,A), C^*_r(G,B)[0,1])$ et réalise une homotopie entre les images dans $E^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}(G,A), C^*_r(G,B))$ de $j_r(E,T)$ et $j_{\mathcal{A}}(\iota(E,T)$. Nous précisons que $\mathcal{B}(G,T)$ est défini à partir de T comme $\mathcal{A}(G,T)$ juste avant la proposition 1.5.4 et comme $\tilde{T}$ dans le paragraphe 3.11 de [Kas88], c'est-à-dire que $\mathcal{B}(G,T)^>$ est donné par la formule $\mathcal{B}(G,T)^>(h,x) = \big((t,g) \mapsto T^>(h(t)(g)), g \mapsto T^>(x(g))\big)$ et $\mathcal{B}(G,T)^<$ est défini de manière analogue.

Proposition 1.6.8 *Soient G un groupe localement compact, N une norme sur G et $\mathcal{A}(G)$ et $\mathcal{B}(G)$ deux bonnes complétions de $C_c(G)$ telles que $\|f\|_{\mathcal{A}(G)} \leq \|f\|_{\mathcal{B}(G)}$ pour tout $f \in C_c(G)$.*

Pour toute G-algèbre de Banach A on a $\|f\|_{\mathcal{A}(G,A)} \leq \|f\|_{\mathcal{B}(G,A)}$ pour tout $f \in C_c(G, A)$, donc $\mathrm{Id}_{C_c(G,A)}$ s'étend en un morphisme $i : \mathcal{B}(G, A) \to \mathcal{A}(G, A)$.

Soient A et B deux G-algèbres de Banach et $\alpha \in KK^{\mathrm{ban}}_{G,N}(A, B)$. Alors $j_{\mathcal{A}}(\alpha) \in KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}_N(G, A), \mathcal{A}(G, B))$ et $j_{\mathcal{B}}(\alpha) \in KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{B}_N(G, A), \mathcal{B}(G, B))$ ont même image dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{B}_N(G, A), \mathcal{A}(G, B))$.

Cela se démontre à l'aide de cônes comme la proposition précédente.

Proposition 1.6.9 *Soient G un groupe localement compact, $\mathcal{A}(G)$ une bonne complétion de $C_c(G)$, A, B, C des G-C^*-algèbres et $\alpha \in KK_G(A, B)$, $\beta \in KK_G(B, C)$, et $\alpha \otimes_B \beta \in KK_G(A, C)$ le produit de Kasparov. Alors on a*

$$p(j_{\mathcal{A}}(\alpha \otimes_B \beta)) = p(j_{\mathcal{A}}(\beta)) \circ p(j_{\mathcal{A}}(\alpha)) \text{ dans } \mathrm{Hom}(K_*(\mathcal{A}(G, A)), K_*(\mathcal{A}(G, C)).$$

La preuve ci-dessous est due à Georges Skandalis. Elle évite un argument long et pénible utilisant les éléments M et N de Kasparov.

Commençons par un lemme.

Lemme 1.6.10 *Soient G un groupe localement compact, A et B deux G-C^*-algèbres et $\alpha \in KK_G(A, B)$. Il existe une G-C^*-algèbre A_1, des morphismes G-équivariants $\theta : A_1 \to A$, $\eta : A_1 \to B$, et un élément $\alpha_1 \in KK_G(A, A_1)$ tel que $\theta_1^*(\alpha_1) = \mathrm{Id}_{A_1}$ dans $KK_G(A_1, A_1)$, $\theta_{1,*}(\alpha_1) = \mathrm{Id}_A$ dans $KK_G(A, A)$, et $\theta_1^*(\alpha) = [\eta]$ dans $KK_G(A_1, A_2)$.*

En d'autres termes tout élément de KK-théorie est le produit d'un vrai morphisme et d'un élément de KK-théorie qui est l'inverse d'un vrai morphisme.

Démonstration du lemme 1.6.10. La démonstration de ce lemme m'a été entièrement expliquée par Georges Skandalis. Nous indiquons comment construire l'algèbre A_1. D'abord α fournit un élément de $KK^1_G(SA, B)$. Soit (E, T) un représentant de cet élément. On construit à partir de T un opérateur G-équivariant $\hat{T}$ tel que $(E \otimes L^2(G), \hat{T})$ appartienne à $E(SA \otimes \mathcal{K}(L^2(G)), B)$, G agissant sur $L^2(G)$ par translation à gauche, et représente un élément Morita équivalent à α. D'où une suite exacte G-invariante $0 \to \mathcal{K}(E \otimes L^2(G)) \xrightarrow{j} D \to SA \otimes \mathcal{K}(L^2(G)) \to 0$ admettant un relèvement complètement positif de norme 1. D'après le corollaire 4.2 de [Tho98], j admet une unité approchée G-invariante et d'après le lemme 3.3 de [Tho98], on en déduit un morphisme asymptotique G-équivariant et complètement positif

$\psi : S^2A \otimes \mathcal{K}(L^2(G)) \to \mathcal{K}(E \otimes L^2(G))$. On compose ce morphisme asymptotique avec l'inclusion évidente $\mathcal{K}(E \otimes L^2(G)) \subset \mathcal{K}(E \otimes L^2(G) \oplus B)$. On a aussi une inclusion évidente de B dans $\mathcal{K}(E \otimes L^2(G) \oplus B)$. D'autre part on a un morphisme asymptotique complètement positif et G-équivariant de $S^2A \otimes \mathcal{K}(L^2(G))$ vers $A \otimes \mathcal{K}(l^2(\mathbb{N})) \otimes \mathcal{K}(L^2(G))$ associé à la C^*-algèbre de Toeplitz et on compose ce morphisme avec l'inclusion de $A \otimes \mathcal{K}(l^2(\mathbb{N}) \otimes L^2(G))$ dans $A \otimes \mathcal{K}(l^2(\mathbb{N}) \otimes L^2(G) \oplus \mathbb{C})$. Enfin on a une inclusion évidente de A dans $A \otimes \mathcal{K}(l^2(\mathbb{N}) \otimes L^2(G) \oplus \mathbb{C})$. On en déduit un champ continu de C^*-algèbres sur $[0,2]$, dont la fibre en 0 est A, sur $]0,1[$ est $A \otimes \mathcal{K}(l^2(\mathbb{N}) \otimes L^2(G) \oplus \mathbb{C})$, en 1 est $S^2A \otimes \mathcal{K}(L^2(G))$, sur $]1,2[$ est $\mathcal{K}(E \otimes L^2(G) \oplus B)$ et en 2 est B. Pour tout sous-intervalle I de $[0,2]$ on note J_I l'algèbre des sections continues de ce champ sur l'intervalle I, s'annulant au bord lorsque l'intervalle I est ouvert. On a $A = J_{\{0\}}$, $B = J_{\{2\}}$, et on pose $A_1 = J_{[0,2]}$ et on prend pour θ et η les évaluations en 0 et 2. La suite exacte $0 \to J_{]1,2]} \to J_{]0,2]} \to J_{]0,1]} \to 0$ admet un relèvement G-équivariant complètement positif de norme 1, car $J_{[1,2]} \to J_{\{1\}} \to 0$ en admet un, puisque ψ est un morphisme asymptotique complètement positif et G-équivariant. Comme $J_{]1,2]}$ est KK_G-nul, il résulte du théorème 7.2 de [BS89] que $J_{]0,2]} \to J_{]0,1]}$ est KK_G-inversible. Enfin $J_{]0,1]}$ est Morita équivalent au produit tensoriel de A par une algèbre de Toeplitz, et est donc KK_G-nul et par suite $J_{]0,2]}$ est KK_G-nul. Enfin la suite exacte $0 \to J_{]0,2]} \to A_1 \to A \to 0$ admet un relèvement G-équivariant complètement positif de norme 1 et d'après le théorème 7.2 de [BS89], $A_1 \to A$ est KK_G-inversible.

Nous démontrons maintenant la proposition après avoir appliqué le lemme à G, A, B, α et en gardant les notations du lemme. Comme $\theta_1^*(\alpha_1) = \mathrm{Id}_{A_1}$ on a $p(j_{\mathcal{A}}(\alpha_1)) \circ j_{\mathcal{A}}(\theta_1)_* = \mathrm{Id}_{K_*(\mathcal{A}(G,A_1))}$ et comme $\theta_{1,*}(\alpha_1) = \mathrm{Id}_A$, on a $j_{\mathcal{A}}(\theta_1)_* \circ p(j_{\mathcal{A}}(\alpha_1)) = \mathrm{Id}_{K_*(\mathcal{A}(G,A))}$. Nous avons utilisé la fonctorialité de p et de $j_{\mathcal{A}}$. Donc $j_{\mathcal{A}}(\theta_1)_* : K_*(\mathcal{A}(G,A_1)) \to K_*(\mathcal{A}(G,A))$ est inversible. On a $\theta_1^*(\alpha \otimes_B \beta) = \eta^*(\beta)$ dans $KK_G(A_1, C)$. D'où $p(j_{\mathcal{A}}(\alpha \otimes_B \beta)) \circ j_{\mathcal{A}}(\theta_1)_* = p(j_{\mathcal{A}}(\beta)) \circ j_{\mathcal{A}}(\eta)_*$ de $K_*(\mathcal{A}(G,A_1))$ dans $K_*(\mathcal{A}(G,C))$. Il en résulte que

$$p(j_{\mathcal{A}}(\alpha \otimes_B \beta)) = p(j_{\mathcal{A}}(\beta)) \circ j_{\mathcal{A}}(\eta)_* \circ j_{\mathcal{A}}(\theta_1)_*^{-1}.$$

Le même argument (avec $C = B$ et $\beta = \mathrm{Id}$) montre que $p(j_{\mathcal{A}}(\alpha)) = j_{\mathcal{A}}(\eta)_* \circ j_{\mathcal{A}}(\theta_1)_*^{-1}$. Ainsi la proposition est démontrée.

1.7 Application à la conjecture de Baum-Connes

Proposition 1.7.1 *Soient G un groupe localement compact, $\mathcal{A}(G)$ une bonne complétion de $C_c(G)$, A et B deux G-algèbres de Banach et $\alpha, \beta \in KK_G^{\mathrm{ban}}(A,B)$. S'il existe une suite $(N_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de normes sur G qui converge uniformément* *vers 1 sur tout compact de G et telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\iota(\alpha) = \iota(\beta)$ dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,N_i}(A,B)$, alors*

$$p(j_{\mathcal{A}}(\alpha)) = p(j_{\mathcal{A}}(\beta)) \text{ dans } \mathrm{Hom}(K_*(\mathcal{A}(G,A)), K_*(\mathcal{A}(G,B))).$$

Démonstration. Soit $l \in \{0,1\}$. Par hypothèse $p(j_{\mathcal{A}}(\alpha))$ et $p(j_{\mathcal{A}}(\beta))$ coïncident sur l'image de $K_l(\mathcal{A}_{N_i}(G,A))$ dans $K_l(\mathcal{A}(G,A))$. Or $K_l(\mathcal{A}(G,A))$ est la réunion des images des $K_l(\mathcal{A}_{N_i}(G,A))$ puisque, pour tout $f \in C_c(G,A)$, on a $\lim_{i\mapsto+\infty} \|f\|_{\mathcal{A}_{N_i}(G,A)} = \|f\|_{\mathcal{A}(G,A)}$ et grâce au lemme suivant.

En fait nous énonçons un lemme un peu plus général que cela ne serait nécessaire.

Lemme 1.7.2 *Soient A une algèbre de Banach, C une sous-algèbre dense et $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de complétions de C pour des normes telles que l'on ait $\|x\|_A \leq \|x\|_{A_i}$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in C$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in M_n(C)$, la suite $(\rho_{M_n(A_i)}(x))_{i\in\mathbb{N}^*}$ tende vers $\rho_{M_n(A)}(x)$, en notant ρ le rayon spectral. On note $\tau_i : A_i \to A$ l'unique morphisme d'algèbres de Banach prolongeant Id_C. Alors $K_*(A)$ est la réunion des $\tau_{i,*}(K_*(A_i))$.*

Démonstration. D'abord $K_0(A)$ est la réunion des $\tau_{i,*}(K_0(A_i))$. En effet soient $n \in \mathbb{N}_*$, $r \in \{0,...,n\}$ et p un idempotent de $M_n(\tilde{A})$ de la forme $p = I_r + x$ où $I_r = \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $x \in M_n(A)$. Pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver $y \in M_n(C)$ tel que $\|\theta(y) - x\|_{M_n(A)} \leq \epsilon$. Si ϵ est assez petit on a $\|(I_r + \theta(y))^2 - (I_r + \theta(y))\|_{M_n(A)} < \frac{1}{4}$, et donc il existe $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $\rho_{M_n(A_i)}((I_r + y)^2 - (I_r + y)) < \frac{1}{4}$. Par suite le spectre de $I_r + y$ dans $M_n(\tilde{A}_i)$ est inclus dans la réunion de deux disques disjoints de centres 0 et 1, et on fabrique un projecteur à partir de $I_r + y$ par calcul fonctionnel holomorphe.

Montrons maintenant que $K_1(A)$ est la réunion des $\tau_{i,*}(K_1(A_i))$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in M_n(A)$ tel que $1 + x$ soit inversible dans $\widetilde{M_n(A)}$. Choisissons $y, z \in M_n(C)$ tels que $\theta(y)$ et $\theta(z)$ soient suffisamment proches de x et de $(1+x)^{-1} - 1$ dans $M_n(A)$ pour que $\|(1+\theta(y))(1+\theta(z)) - 1\|_{M_n(A)} < 1$ et $\|(1+\theta(z))(1+\theta(y)) - 1\|_{M_n(A)} < 1$. Il existe $i \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on ait $\rho_{M_n(A_i)}\big((1+y)(1+z)-1\big) < 1$ et $\rho_{M_n(A_i)}\big((1+z)(1+y)-1\big) < 1$. Par suite $1 + y$ est inversible à droite et à gauche dans $\widetilde{M_n(A_i)}$.

La proposition suivante constitue l'approche naïve vers la conjecture de Baum-Connes.

Proposition 1.7.3 *Soient G un groupe localement compact, $\mathcal{A}(G)$ une bonne complétion de $C_c(G)$ telle que $\mathcal{A}(G)$ soit une sous-algèbre involutive et stable par calcul fonctionnel holomorphe de $C^*_r(G)$ et $\alpha \in KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$. S'il existe une suite $(N_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de normes sur G qui converge uniformément vers 1 sur* *tout compact de G et telle que, pour tout i, $\iota(\alpha) = 1$ dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,N_i}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ alors $j_r(\alpha) \in KK(C^*_r(G), C^*_r(G))$ induit l'identité sur $K_*(C^*_r(G))$.*

Démonstration. Cela résulte des propositions 1.7.1, 1.6.1 et 1.6.3, ainsi que la fonctorialité de p dans la proposition 1.2.9, et du fait que, $\mathcal{A}(G)$ étant une sous-algèbre de Banach dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe dans $C^*_r(G)$, l'inclusion de $\mathcal{A}(G)$ dans $C^*_r(G)$ induit un isomorphisme $K_*(\mathcal{A}(G)) \to K_*(C^*_r(G))$ d'après le théorème A.2.1 de [Bos90].

Il serait regrettable d'en rester là car la KK-théorie banachique nous permet de généraliser la conjecture de Baum-Connes.

Dans toute la suite G est un groupe localement compact, $\mathcal{A}(G)$ une bonne complétion de $C_c(G)$ et B une G-C^*-algèbre. On note $\underline{E}G$ le classifiant de G pour les actions propres. Nous allons construire une application de Baum-Connes $\mu^B_{\mathcal{A}} : K^{\mathrm{top}}_*(G,B) \to K_*(\mathcal{A}(G,B))$ et étudier ses propriétés. On rappelle que $K^{\mathrm{top}}_*(G,B) = \varinjlim KK^*_G(C_0(Y),B)$, Y décrivant les parties G-compactes de $\underline{E}G$. Ce groupe a été défini dans [BCH94] avec une notation différente.

Soit Y une partie G-compacte de $\underline{E}G$. D'après [Tu96](Appendice A) il existe $c \in C_c(Y,\mathbb{R}_+)$ tel que $\int_G c(g^{-1}y)dg = 1$ pour tout $y \in Y$. La fonction $(gy \overset{g}{\leftarrow} y) \mapsto \sqrt{c(y)}\sqrt{c(gy)}$ est un projecteur de $C_c(G, C_0(Y))$ et on note $\lambda_{Y,G,\mathcal{A}}$ l'élément de $K_0(\mathcal{A}(G,C_0(Y)))$ qu'il détermine. D'où une suite d'homomorphismes

$$KK_G(C_0(Y),B) \overset{\iota}{\to} KK^{\mathrm{ban}}_G(C_0(Y),B) \overset{j_{\mathcal{A}}}{\to} KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}(G,C_0(Y)),\mathcal{A}(G,B)) \overset{p(.)(\lambda_{Y,G,\mathcal{A}})}{\to} K_0(\mathcal{A}(G,B)).$$

Comme $\mathcal{A}(G, C_0(\mathbb{R},B))$ est une sous-algèbre dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe de $C_0(\mathbb{R},\mathcal{A}(G,B))$, on a aussi la suite d'homorphismes

$$KK^1_G(C_0(Y),B) = KK_G(C_0(Y), C_0(\mathbb{R},B)) \to K_0(\mathcal{A}(G,C_0(\mathbb{R},B))) = K_1(\mathcal{A}(G,B)).$$

En passant à la limite inductive on définit ainsi $\mu^B_{\mathcal{A}} : K^{\mathrm{top}}_*(G,B) \to K_*(\mathcal{A}(G,B))$.

Proposition 1.7.4 *Soient C une autre G-C^*-algèbre et $\alpha \in KK_G(B,C)$, induisant $\alpha^{\mathrm{top}}_* : K^{\mathrm{top}}_*(G,B) \to K^{\mathrm{top}}_*(G,C)$. Alors $p(j_{\mathcal{A}}(\alpha)) \circ \mu^B_{\mathcal{A}} = \mu^C_{\mathcal{A}} \circ \alpha^{\mathrm{top}}_*$ de $K^{\mathrm{top}}_*(G,B)$ dans $K_*(\mathcal{A}(G,C))$.*

On applique la proposition 1.6.9 aux G-C^*-algèbres $C_0(Y)$, B et C et à $\alpha \in KK_G(B,C)$ et à un élément arbitraire de $KK_G(C_0(Y),B)$.

Proposition 1.7.5 *Soit $\mathcal{B}(G)$ une autre bonne complétion de $C_c(G)$ telle que $\|f\|_{\mathcal{A}(G)} \leq \|f\|_{\mathcal{B}(G)}$ pour tout $f \in C_c(G)$. Notons $i : \mathcal{B}(G,B) \to \mathcal{A}(G,B)$ le morphisme introduit dans la proposition 1.6.8. Alors on a $\mu^B_{\mathcal{A}} = i_* \circ \mu^B_{\mathcal{B}}$.*

Cela résulte de la proposition 1.6.8 et de la fonctorialité de p.

Proposition 1.7.6 *Supposons que l'on ait* $\|f\|_{\mathcal{A}(G)} = \|f^*\|_{\mathcal{A}(G)}$ *et* $\|f\|_{C_r^*(G)} \leq \|f\|_{\mathcal{A}(G)}$ *pour toute fonction* $f \in C_c(G)$. *Notons* $i : \mathcal{A}(G,B) \to C_r^*(G,B)$ *l'unique morphisme prolongeant* $\mathrm{Id}_{C_c(G,B)}$. *Alors on a* $\mu_r^B = i_* \circ \mu_{\mathcal{A}}^B$, *où* μ_r^B *est l'application de Baum-Connes usuelle.*

Cela est une conséquence de la proposition 1.6.3 et de la fonctorialité de p.

Nous rappelons que B est dite propre si B est une $C_0(Z)$-G-C^*-algèbre au sens de [Kas88], 1.5, avec Z un G-espace propre.

Proposition 1.7.7 *Si* B *est propre, et si* μ_r^B *est un isomorphisme (resp. une surjection), pour toute bonne complétion* $\mathcal{A}(G)$, $\mu_{\mathcal{A}}^B$ *est un isomorphisme (resp. une surjection).*

Notons $\mathcal{B}(G) = \mathcal{A}(G) \cap \mathcal{A}(G)^* \cap L^1(G)$, en notant $\mathcal{A}(G)^*$ l'image de $\mathcal{A}(G)$ par la convolution, de sorte que l'on possède deux morphismes naturels de $\mathcal{B}(G,B)$ vers $\mathcal{A}(G,B)$ et $C_r^*(G,B)$. La proposition découle du lemme suivant et des propositions 1.7.5 et 1.7.6.

Lemme 1.7.8 *Dans les notations ci-dessus les morphismes de* $\mathcal{B}(G,B)$ *dans* $\mathcal{A}(G,B)$ *et dans* $C_r^*(G,B)$ *induisent des isomorphismes en K-théorie.*

En effet B est un champ continu de C^*-algèbres sur $Z : B = (B_z)_{z\in Z}$. Il existe une fonction continue $c : Z \to]0,1]$ telle que

$$\sup_{z\in Z} \int_G c(gz)^2 dg \leq 1, \ \left\| g \mapsto \sup_{z\in Z} c(z)c(gz) \right\|_{\mathcal{B}(G)} \leq 1$$

$$\text{et } \sup_{z\in Z} \int_{G^2} |f(g_1)| c(g_2 z) c(g_1 g_2 z) dg_1 dg_2 \leq \|f\|_{\mathcal{A}(G)} \text{ pour tout } f \in \mathcal{A}(G).$$

Notons D la complétion de $C_c(G,B)$ pour la norme

$$\|f\| = \sup_{g\in G, z\in Z} \big(c(z)c(gz)\big)^{-1} \big\| f(g,z) \big\|_{B_z}.$$

D'après les inégalités ci-dessus, on a

$$\|f_1 f_2\|_D \leq \|f_1\|_D \|f_2\|_D, \|f\|_{\mathcal{B}(G,B)} \leq \|f\|_D,$$
$$\|f_1 f_2 f_3\|_D \leq \|f_1\|_D \|f_2\|_{\mathcal{A}(G,B)} \|f_3\|_D \text{ et } \|f_1 f_2 f_3\|_D \leq \|f_1\|_D \|f_2\|_{C_r^*(G,B)} \|f_3\|_D$$

pour tous $f, f_1, f_2, f_3 \in C$. Ceci implique que les morphismes de D dans $\mathcal{B}(G,B)$, $\mathcal{A}(G,B)$ et $C_r^*(G,B)$ sont denses et pleins et donc induisent des isomorphismes en K-théorie, d'après le théorème A.2.1 et la preuve de la proposition A.2.8 de l'appendice de [Bos90].

Nous commençons par un rappel sur l'injectivité de l'application de Baum-Connes usuelle. La proposition suivante découle du théorème 5.26 de [Tu96] (avec μ_r au lieu de μ et à coefficients dans une G-C^*-algèbre) et de la proposition 5.7 de [KS] (voir aussi [GHT97]).

Proposition 1.7.9 *Soit G un groupe localement compact. On suppose que G est discret ou que pour toute partie G-compacte Y de $\underline{E}G$ il existe une G-C^*-algèbre propre A, et $\eta \in KK_G(\mathbb{C}, A)$ et $d \in KK_G(A, \mathbb{C})$ tels que $\gamma = \eta \otimes_A d \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ vérifie $q^*(\gamma) = 1$ dans $KK_{G \ltimes Y}(C_0(Y), C_0(Y))$ où q est la projection de Y vers le point. Alors pour toute G-C^*-algèbre propre B, μ_r^B est une bijection.*

Nous rappelons aussi un résultat de surjectivité prouvé dans [KS] (voir la preuve de la proposition 5.7 dans [KS]).

Proposition 1.7.10 *Soit G un groupe localement compact. Pour toute G-C^*-algèbre propre B μ_r^B est une surjection.*

Dans les deux propositions suivantes nous étudions l'injectivité de $\mu_{\mathcal{A}}$ lorsque $\mathcal{A}(G)$ est une bonne complétion de G et G est comme dans [Tu96] ou dans [KS]. Ces deux propositions n'offrent guère d'intérêt car elles découlent du théorème 5.26 de [Tu96] (avec μ_r au lieu de μ) et de la proposition 5.10 de [KS] et de la proposition 1.7.6, dès que $\mathcal{A}(G)$ est une sous-algèbre involutive de $C_r^*(G)$.

Proposition 1.7.11 *Supposons que pour toute partie G-compacte Y de $\underline{E}G$ il existe une G-C^*-algèbre propre A, et $\eta \in KK_G(\mathbb{C}, A)$ et $d \in KK_G(A, \mathbb{C})$ tels que $\gamma = \eta \otimes_A d \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ vérifie $q^*(\gamma) = 1$ dans $KK_{G \ltimes Y}(C_0(Y), C_0(Y))$ où q est la projection de Y vers le point. Alors pour toute bonne complétion $\mathcal{A}(G)$ et pour toute G-C^*-algèbre B, $\mu_{\mathcal{A}}^B$ est une injection.*

En effet soit $x \in K_*^{\mathrm{top}}(G, B)$ tel que $\mu_{\mathcal{A}}^B(x) = 0$. Montrons que pour tout $\gamma \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ tel qu'il existe une G-C^*-algèbre propre A, et $\eta \in KK_G(\mathbb{C}, A)$ et $d \in KK_G(A, \mathbb{C})$ avec $\gamma = \eta \otimes_A d$, on a $\sigma_B(\gamma)_*(x) = 0$ dans $K_*^{\mathrm{top}}(G, B)$. En effet on a $\mu_{\mathcal{A}}^{B \otimes A}(\sigma_B(\eta)_*(x)) = p(j_{\mathcal{A}}(\iota(\sigma_B(\eta))))(\mu_{\mathcal{A}}^B(x)) = 0$ d'après la proposition 1.7.4. Or $\mu_{\mathcal{A}}^{B \otimes A} : K_*^{\mathrm{top}}(G, B \otimes A) \to K_*(\mathcal{A}(G, B \otimes A))$ est un isomorphisme : cela résulte de la proposition 1.7.7 parce que $B \otimes A$ est propre et que, d'après le résultat de [Tu96], rappelé dans la proposition 1.7.9, vu les hypothèses du théorème, $\mu_r^{B \otimes A}$ est un isomorphisme. Donc $\sigma_B(\eta)_*(x) = 0$. Mais $\sigma_B(\gamma) = \sigma_B(\eta) \otimes_{B \otimes A} \sigma_B(d)$, d'où $\sigma_B(\gamma)_*(x) = 0$. Ainsi, d'après les hypothèses du théorème, pour toute partie G-compacte Y de $\underline{E}G$ il existe $\gamma \in KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ tel que $\sigma_B(\gamma)_*(x) = 0$ et $q^*(\gamma) = 1$ dans $KK_{G\ltimes Y}(C_0(Y), C_0(Y))$. Mais cette dernière égalité implique que le produit de Kasparov à droite par $\sigma_B(\gamma)$, de $KK_G(C_0(Y), B)$ vers $KK_G(C_0(Y), B)$, qui est aussi égal au produit de Kasparov à gauche par $\sigma_{C_0(Y)}(\gamma)$, est l'identité. Par suite $x = 0$.

Proposition 1.7.12 *Soit G un groupe discret. Supposons que pour toute partie G-compacte Y de $\underline{E}G$ il existe une G-C^*-algèbre A, un idéal G-invariant J de A qui est KK_G-contractile et tel que A/J soit propre, et $\eta \in KK_G(\mathbb{C}, A)$ et $d \in KK_G(A,\mathbb{C})$ tels que $\gamma = \eta \otimes_A d \in KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ vérifie $q^*(\gamma) = 1$ dans $KK_{G\ltimes Y}(C_0(Y), C_0(Y))$ où q est la projection de Y vers le point. Alors pour toute bonne complétion $\mathcal{A}(G)$ et pour toute G-C^*-algèbre B, $\mu_{\mathcal{A}}^B$ est une injection.*

En effet on a une suite exacte d'algèbres de Banach $0 \to \mathcal{A}(G, J \otimes_{\max} B) \to \mathcal{A}(G, A \otimes_{\max} B) \to \mathcal{A}(G, A/J \otimes_{\max} B) \to 0$ qui donne lieu à une suite exacte longue en K-théorie. Or $J \otimes_{\max} B$ est KK_G-contractile, donc $K_*(\mathcal{A}(G, J \otimes_{\max} B)) = 0$. Grâce aux propositions 1.7.8 et 1.7.9, $\mu_{\mathcal{A}}^{A/J\otimes_{\max} B}$ est une bijection. D'après la preuve du lemme 5.8 de [KS], $K_*^{\text{top}}(G, A) \to K_*^{\text{top}}(G, A/J)$ est un isomorphisme et donc $\mu_{\mathcal{A}}^{A\otimes_{\max} B}$ est une bijection. On conclut alors comme dans la proposition précédente.

Notre résultat principal est contenu dans les deux théorèmes suivants qui correspondent aux situations envisagées dans [Tu96] et [KS].

Théorème 1.7.13 *Supposons qu'il existe une G-C^*-algèbre propre A, et $\eta \in KK_G(\mathbb{C}, A)$ et $d \in KK_G(A,\mathbb{C})$ tels que $\gamma = \eta \otimes_A d \in KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ vérifie la condition suivante : il existe une suite $(N_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de normes sur G qui converge uniformément vers 1 sur tout compact de G et telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\iota(\gamma) = 1$ dans $KK^{\text{ban}}_{G,N_i}(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Alors pour toute bonne complétion $\mathcal{A}(G)$ et pour toute G-C^*-algèbre B, $\mu_{\mathcal{A}}^B$ est une surjection.*

D'après le lemme 1.6.2, $j_{\mathcal{A}}(\iota(\sigma_B(\gamma))) = j_{\mathcal{A}}(\sigma_B^{\text{ban}}(\iota(\gamma)))$ et d'après la proposition 1.7.1, $p(j_{\mathcal{A}}(\sigma_B^{\text{ban}}(\iota(\gamma)))) = \mathrm{Id}_{K_*(\mathcal{A}(G,B))}$, car $\sigma_B^{\text{ban}}(\iota(\gamma)) = 1$ dans $KK^{\text{ban}}_{G,N_i}(B,B)$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Comme $\sigma_B(\gamma) = \sigma_B(\eta) \otimes_A \sigma_B(d)$ et d'après la proposition 1.6.9, $p(j_{\mathcal{A}}(\iota(\sigma_B(d)))) : K_0(\mathcal{A}(G, A \otimes B)) \to K_0(\mathcal{A}(G,B))$ est surjective et le théorème résulte alors de la proposition 1.7.4 appliqué à $\sigma_B(d)$ et du fait que, comme $A \otimes B$ est une G-C^*-algèbre propre, $\mu_r^{A\otimes B}$ est surjective (voir la proposition 1.7.10), et donc $\mu_{\mathcal{A}}^{A\otimes B}$ aussi, en vertu de la proposition 1.7.7.

Théorème 1.7.14 *Supposons que G est discret et qu'il existe une G-C^*-algèbre A, un idéal G-invariant J de D qui est KK_G-contractile et tel que*

A/J soit propre, et $\eta \in KK_G(\mathbb{C}, A)$ et $d \in KK_G(A, \mathbb{C})$ tels que $\gamma = \eta \otimes_A d \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ vérifie la propriété suivante : il existe une suite $(N_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de normes sur G qui converge uniformément vers 1 sur tout compact de G et telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\iota(\gamma) = 1$ dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,N_i}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Alors pour toute bonne complétion $\mathcal{A}(G)$ et pour toute G-C^*-algèbre B, $\mu_{\mathcal{A}}^B$ est une surjection.

En effet par la proposition 1.7.10, $\mu_{\mathcal{A}}^{A/J \otimes_{\max} B}$ est surjective. D'après la preuve du lemme 5.8 de [KS], $K_*^{\mathrm{top}}(G, A) \to K_*^{\mathrm{top}}(G, A/J)$ est un isomorphisme et $J \otimes_{\max} B$ est KK_G-contractile, donc $K_*(\mathcal{A}(G, J \otimes_{\max} B)) = 0$. Il résulte de suite exacte longue en K-théorie associée à la suite exacte d'algèbres de Banach $0 \to \mathcal{A}(G, J \otimes_{\max} B) \to \mathcal{A}(G, A \otimes_{\max} B) \to \mathcal{A}(G, A/J \otimes_{\max} B) \to 0$ que $\mu_{\mathcal{A}}^{A \otimes_{\max} B}$ est une surjection. Le reste de la preuve est identique à la preuve du théorème précédent.

Chapitre 2

Homotopie entre γ et 1 pour les groupes agissant sur des espaces boliques

Dans [KS], Kasparov et Skandalis construisent, pour tout groupe localement compact G agissant continûment, proprement et par isométries sur un espace métrique (X,d) localement fini, faiblement géodésique, faiblement bolique et de géométrie grossière bornée, et pour tout $k \in \mathbb{R}_+$ assez grand, un élément $\gamma_k \in KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$, de sorte que les conditions énumérées dans le corollaire 5.11 de [KS] soient satisfaites. Lorsque G est discret ils montrent ainsi la conjecture de Novikov pour G.

Nous montrons que si G et (X,d) sont comme ci-dessus, et si de plus (X,d) est uniformément localement fini (ce qui est plus fort que d'être localement fini et de géométrie grossière bornée) et si la première condition de bolicité, notée $(B1)$ dans [KS], est vraie pour tout $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, alors il existe une suite $(\mathcal{N}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de normes sur G convergeant uniformément vers 1 sur tout compact de G et telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ et pour tout k, γ_k et 1 aient même image dans $KK^{ban}_{G,\mathcal{N}_i}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.

L'homotopie que nous réalisons généralise celle de [JV84] mais nous devons sortir du cadre hilbertien car certains des groupes que nous considérons possèdent la propriété (T). Il y a aussi un lien avec l'homotopie qui apparaît dans [JV86].

2.1 Rappels de la construction de Kasparov et Skandalis

Les définitions qui suivent proviennent de [KS] et de [KS94]. Dans toute la suite on se donne un espace métrique (X, d). Lorsque $x \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+$, on note $B(x, r) = \{y \in X, d(x, y) < r\}$ et $\bar{B}(x, r) = \{y \in X, d(x, y) \leq r\}$.

Définition 2.1.1 *On dit que (X, d) est uniformément localement fini si pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in X$, $\bar{B}(x, r)$ contienne au plus K points.*

Définition 2.1.2 *Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que (X, d) est faiblement δ-géodésique si quels que soient $x, y \in X$ et $t \in [0, d(x, y)]$, il existe $a \in X$ tel que $d(a, x) \leq t + \delta$ et $d(a, y) \leq d(x, y) - t + \delta$.*

Si $x, y \in X$ et $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ on appelle δ-milieu de x et y un point $a \in X$ tel que $d(a, x) \leq \frac{1}{2} d(x, y) + \delta$ et $d(a, y) \leq \frac{1}{2} d(x, y) + \delta$.

Définition 2.1.3 *Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que (X, d) est faiblement δ-bolique si les conditions suivantes sont réalisées :*

- *(B1) pour tout $r > 0$ il existe $R > 0$ tel que pour tout quadruplet x, y, z, t de points de X vérifiant $d(x, y) + d(z, t) \leq r$ et $d(x, z) + d(y, t) \geq R$, on ait $d(x, t) + d(y, z) \leq d(x, z) + d(y, t) + 2\delta$,*
- *(B2') il existe une application $m : X \times X \to X$ telle que pour $x, y \in X$, $m(x, y)$ soit un δ-milieu de x et y, que pour $x, y, z \in X$, $d(m(x, y), z) \leq \max(d(x, z), d(y, z)) + 2\delta$, et que pour tout $p \in \mathbb{R}_+$ il existe $N(p) \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $N \in \mathbb{R}_+$ avec $N \geq N(p)$, pour $x, y, z \in X$ vérifiant $d(x, z) \leq N$, $d(y, z) \leq N$, et $d(x, y) > N$ on ait $d(m(x, y), z) < N - p$.*

Nous fixons maintenant $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, et nous supposons (X, d) faiblement δ-géodésique, faiblement δ-bolique et uniformément localement fini (on peut remplacer cette dernière condition par localement fini et de géométrie grossière bornée d'après [KS]). Soit G un groupe localement compact agissant continûment, proprement et par isométries sur X. Dans [KS], pour tout $k \in [\delta, +\infty[$, Kasparov et Skandalis construisent $\gamma_k \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ de la manière que nous allons rappeler, à ceci près que nous remplaçons k par tk, où $t \in [1, +\infty[$, dans certains lemmes.

Pour tout $N \in \mathbb{R}_+^*$ on note Δ^N l'ensemble des parties de X dont le diamètre est inférieur ou égal à N et pour $S \in \Delta^N$, on pose $U_S = \cap_{y \in S} \bar{B}(y, N) = \{z \in X, \{z\} \cup S \in \Delta^N\}$. Contrairement à [KS], nous avons inclus la partie vide dans Δ^N car cela sera plus commode dans les paragraphes suivants.

Fixons $t \in [1, +\infty[$, et posons $N_t = \max(8tk + 22\delta, N(4tk + 10\delta)) \in \mathbb{R}_+^*$ où $N(4tk+10\delta)$ est la notation de la condition $(B2')$. Ainsi la condition $(C2)$ de [KS] est réalisée avec $4tk$ au lieu de $4k$.

Pour simplifier, dans ce paragraphe nous notons N au lieu de N_t et Δ au lieu de Δ^{N_t}.

Nous réécrivons les lemmes 6.2 et 6.3 de [KS] en remplaçant k par tk.

Lemme 2.1.4 *(LEMME 6.2 de [KS]) Soient $x \in X$ et $S \in \Delta$. Le diamètre de $\{z \in U_S, d(x,z) \leq d(x,U_S) + (4tk + 6\delta)\}$ est inférieur ou égal à N.*

Lemme 2.1.5 *(LEMME 6.3 de [KS]) Soient $x \in X$ et $S, T \in \Delta$. Supposons que tout point a dans la différence symétrique de S et T vérifie $d(x,a) \leq d(x,U_S) + (4tk + 6\delta)$. Alors $d(x,U_T) = d(x,U_S)$ et pour tout b dans la différence symétrique de U_S et U_T, $d(x,b) \geq d(x,U_S) + (4tk + 6\delta)$.*

Pour $R \in \mathbb{R}_+^*$, Kasparov et Skandalis définissent $I(R)$ comme l'ensemble des $r \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout quadruplet x, y, a, b de points de X vérifiant $d(x,a)+d(y,b) \geq 2R-r$, $d(x,y) \leq r$ et $d(a,b) \leq 2N$, on ait $d(y,a)+d(x,b) \leq d(x,a)+d(y,b)+2k$. Pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$, $I(R)$ est un intervalle de $\mathbb{R}_+$ contenant 0. Grâce à $(B1)$ et comme $k \geq \delta$, on a $\lim_{R \mapsto +\infty} \sup(I(R)) = +\infty$.

Enfin pour $x \in X$ et $S \in \Delta$, Kasparov et Skandalis définissent $A_{S,x} = \{a \in U_S, d(x,a) \leq d(x,U_S) + 2\delta\}$ et pour $r \in \mathbb{R}_+$, $Y_{S,x,r} = \cup_{y \in \bar{B}(x,r)} A_{S,y}$.

Lemme 2.1.6 *(partie du LEMME 6.6 de [KS]) Soit $r \in I(d(x,U_S))$. Alors*

- *a) pour tout $a \in Y_{S,x,r}$ on a $d(x,a) \leq d(x,U_S) + (2k + 2\delta)$,*
- *b) le diamètre de $Y_{S,x,r}$ est inférieur ou égal à N.*

La proposition suivante est la proposition 6.7 de [KS] sauf l'assertion $b)$ qui est en fait une étape pour $c)$ et qui a été ajoutée pour nos besoins.

Proposition 2.1.7 *(variante de la PROPOSITION 6.7 de [KS]) Soient $x \in X$, $S \in \Delta$ et $r \in I(d(x,U_S))$. Alors*

- *a) $(S \cup Y_{S,x,r})$ appartient à Δ,*
- *b) si $T \in \Delta$ est tel que pour tout a dans la différence symétrique de S et T on ait $d(x,a) \leq d(x,U_S) + ((4t-2)k + 6\delta)$ alors pour tout $y \in \bar{B}(x,r)$, $A_{S,y} = A_{T,y}$ et on a $Y_{S,x,r} = Y_{T,x,r}$,*
- *c) si $T \in \Delta$ est tel que $S - Y_{S,x,r} \subset T \subset S \cup Y_{S,x,r}$, alors pour tout $y \in \bar{B}(x,r)$, $A_{S,y} = A_{T,y}$ et on a $Y_{S,x,r} = Y_{T,x,r}$.*

La preuve de b) est décalquée des preuves de 6.6.c) et 6.7.b) dans [KS]. Soient $y \in \bar{B}(x,r)$ et $a'' \in U_S$ tel que $d(y,a'') = d(y,U_S)$. Par hypothèse, pour tout a dans la différence symétrique de S et T on a $d(x,a) \leq d(x,U_S) + ((4t-2)k + 6\delta) \leq d(x,a'') + ((4t-2)k+6\delta)$. Comme $r \in I(d(x,U_S))$ et $y \in \bar{B}(x,r)$, on a $d(y,a) + d(x,a'') \leq d(y,a'') + d(x,a) + 2k$, d'où $d(y,a) \leq d(y,a'') + (4tk+6\delta)$ et on applique le lemme 2.1.5 à y, S et T, pour conclure que $A_{S,y} = A_{t,y}$.

La proposition suivante résulte de la proposition 6.9 de [KS], à un détail près que nous justifions ensuite.

Proposition 2.1.8 *(variante du a) de la PROPOSITION 6.9 de [KS]) Pour tout $x \in X$ et tout $S \in \Delta$ il existe une mesure $\psi_{S,x}$ positive de masse 1 sur X de sorte que les propriétés suivantes soient vraies : $\psi_{S,x}$ dépend de (S,x) de façon G-équivariante, $\psi_{S,x}$ ne dépend pas de (S,x) mais seulement de x, de $d(x,U_S)$, de $\{z \in U_S, d(x,z) \leq d(x,U_S) + (2k+4\delta)\}$ et des $A_{S,y}$ pour $y \in X$ tel que $d(x,y) \in I(d(x,U_S))$, de plus $\psi_{S,x}$ est à support dans $\bigcup_{r \in I(d(x,U_S))} Y_{S,x,r-k}$ et pour $x, y \in X$, la fonction $\|\psi_{S,x} - \psi_{S,y}\|_1$ tend vers 0 en dehors des parties finies de Δ.*

En effet pour $x \in X$ et $S, T \in \Delta$, si $d(x,U_S) = d(x,U_T)$, $\{z \in U_S, d(x,z) \leq d(x,U_S) + (2k+4\delta)\} = \{z \in U_T, d(x,z) \leq d(x,U_T) + (2k+4\delta)\}$ et $A_{S,y} = A_{T,y}$ pour tout $y \in X$ tel que $d(x,y) \in I(d(x,U_S))$, alors, dans les notations de la preuve de la proposition 6.9 de [KS] on a $f_{S,x,t} = f_{T,x,t}$ pour tout $t \leq r_{S,x}$ et μ_{U_S} et μ_{U_T} coïncident sur $\{z \in X, d(x,z) \leq d(x,U_S) + (2k+2\delta)\}$ d'après le lemme 6.8 de [KS] et cet ensemble contient le support des $f_{S,x,t}$ pour $t \leq r_{S,x}$, d'après le lemme 6.6.a) de [KS]. Les autres assertions figurent explicitement dans la proposition 6.9 de [KS].

Le corollaire suivant est une variante du b) de la proposition 6.9 de [KS]. Il découle de la proposition précédente, du lemme 2.1.5 et du b) de la proposition 2.1.7.

Corollaire 2.1.9 *(variante du b) de la PROPOSITION 6.9 de [KS]) Pour $x \in X$ et $S, T \in \Delta$ on a $\psi_{S,x} = \psi_{T,x}$ lorsque la différence symétrique de S et T est contenue dans $\{a \in X, d(x,a) \leq d(x,U_S) + ((4t-2)k + 6\delta)\}$, et donc en particulier lorsque la différence symétrique de S et T est incluse dans le support de $\psi_{S,x}$.*

Rappelons maintenant la construction de $\gamma_k \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Nous avons seulement besoin de F_x pour $x \in X$ et non de tous les opérateurs F_λ de [KS]. Fixons $x \in X$. On note $(e_y)_{y \in X}$ la base canonique de $l^2(X)$ et $\mathcal{H}$ le sous-espace de Hilbert de $\Lambda(l^2(X))$ engendré par les $e_{x_1} \wedge \cdots \wedge e_{x_n}$ où $\{x_1, \ldots, x_n\}$ parcourt $\Delta - \emptyset$. Pour tout $S \in \Delta - \emptyset$ notons $e_S = \pm e_{x_1} \wedge \cdots \wedge e_{x_n}$ si $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$, le choix du signe n'ayant aucune incidence dans la suite.

Notons $e_\emptyset$ l'état du vide dans $\Lambda(l^2(X))$ et $\psi_{\emptyset,x} = \psi_{\{x\},x}$. Pour $x \in X$ et $S \in \Delta$ notons $\phi_{S,x} = \sqrt{\psi_{S,x}}$, si bien que $\|\phi_{S,x}\|_{l^2} = 1$.

Notons $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence suivante sur Δ (introduite dans [KS]): $S\mathcal{R}T$ si la différence symétrique de S et T est incluse dans le support de $\psi_{S,x}$, ce qui implique $\psi_{S,x} = \psi_{T,x}$. Notons $cl(\mathcal{R})$ l'ensemble des classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$ et notons R_0 la classe qui contient $\emptyset$. Pour tout $R \in cl(\mathcal{R})$ notons ϕ_R la valeur commune des $\phi_{S,x}$ pour $S \in R$, et $\mathcal{H}_R = \bigoplus_{S\in R} \mathbb{C}e_S \subset \mathcal{H} \oplus \mathbb{C}e_\emptyset$, si bien que $\mathcal{H} = (\bigoplus_{R\in cl(\mathcal{R}), R\neq R_0} \mathcal{H}_R) \oplus (\mathcal{H}_{R_0} \cap \mathcal{H})$. Kasparov et Skandalis définissent alors $F_x : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ par $F_x|_{\mathcal{H}_R} = c(\phi_R)$ pour $R \neq R_0$ et $F_x|_{\mathcal{H}_{R_0}} = Pc(\phi_{R_0})$ où P désigne le projecteur orthogonal de $\mathcal{H} \oplus \mathbb{C}e_\emptyset$ sur $\mathcal{H}$.

Proposition 2.1.10 *(partie de la PROPOSITION 6.10 de [KS])*

- *a) Pour tout $x \in X$, $F_x^* = F_x$ et $1 - F_x^2$ est la projection orthogonale sur $\mathbb{C}\phi_{\emptyset,x}$.*

- *b) Pour $x, y \in X$, $F_x - F_y$ appartient à $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.*

On rappelle que Kasparov et Skandalis graduent $\mathcal{H}$ par $\partial(e_{x_1} \wedge \cdots \wedge e_{x_n}) = n - 1$ [2] si bien que pour tout $x \in X$, F_x est impair. Ainsi $(\mathcal{H}, F_x)$ appartient à $E_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Comme toute la construction ci-dessus dépend de $k \in [\delta, +\infty[$ et de $t \in [1, +\infty[$ et que k est fixé pour toujours mais t variable nous noterons parfois $(\mathcal{H}^t, F_x^t)$ au lieu de $(\mathcal{H}, F_x)$. La classe $\gamma_k \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ définie par $(\mathcal{H}^1, F_x^1)$ est indépendante de x.

2.2 Enoncé du résultat

Définition 2.2.1 *On dit qu'un espace métrique (X, d) satisfait à la condition $(B1)$ forte s'il vérifie la condition $(B1)$ pour tout $\delta \in \mathbb{R}_+^*$.*

Soient $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, (X, d) un espace métrique uniformément localement fini, faiblement δ-géodésique et faiblement δ-bolique et vérifiant la condition $(B1)$ forte et G un groupe localement compact agissant continûment, proprement et par isométries sur X. Dans toute la suite nous fixons $x \in X$. Pour tout $g \in G$ notons $l(g) = d(x, gx) \in \mathbb{R}_+$. On a $l(1) = 0$, $l(g) = l(g^{-1})$ et $l(g_1g_2) \leq l(g_1) + l(g_2)$ pour $g, g_1, g_2 \in G$. Pour tout $s \in \mathbb{R}_+$ définissons la norme $\mathcal{N}_s$: $G \to [1, +\infty[$ par $\mathcal{N}_s(g) = \exp(sl(g))$. Nous remarquons que la suite de normes $(\mathcal{N}_{\frac{1}{i}})_{i\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 1 sur tout compact de G.

Théorème 2.2.2 *Pour tout $k \in [\delta, +\infty[$, pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$, $\gamma_k \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ et 1 ont même image dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\mathcal{N}_s}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.*

La démonstration occupe toute le paragraphe suivant.

2.3 Construction de l'homotopie

Dans toute ce paragraphe (X,d) et G sont comme dans le paragraphe précédent et **nous fixons une fois pour toutes** $k \in [\delta, +\infty[$**,** $s \in \mathbb{R}_+^*$ **et** $x \in X$**.** Sous ces hypothèses nous montrons que $\gamma_k \in KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ et 1 ont même image dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,\mathcal{N}_s}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.

2.3.1 Principales notations et dépliage de γ_k

a) Notations dépendant de $N \in \mathbb{R}_+^*$**.** Soit $N \in \mathbb{R}_+^*$. Comme dans le paragraphe 2.1 on note Δ^N l'ensemble des parties de X de diamètre inférieur ou égal à N. Comme (X,d) est uniformément localement fini, $\sup_{S\in\Delta^N} \#(S)$ est fini et on note $p^N_{\max} = \sup_{S\in\Delta^N} \#(S)$. Pour tout $p \in \{0,\ldots,p^N_{\max}\}$ on note $\Delta^N_p = \{S \in \Delta^N, \#(S) = p\}$.

Notons $\mathbb{C}^{(X)}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel formé des fonctions à support fini de X dans $\mathbb{C}$, dont la base canonique est notée $(e_y)_{y\in X}$. Pour tout $p \in \{1,\ldots,p^N_{\max}\}$ notons L^N_p le sous-espace vectoriel de $\Lambda(\mathbb{C}^{(X)})$ engendré par les e_S quand S parcourt Δ^N_p (on rappelle que $e_S = \mp e_{x_1} \wedge \cdots \wedge e_{x_p}$ quand $S = \{x_1,\ldots,x_p\}$). Notons également $L^N_0 = \mathbb{C}e_\emptyset$. Notons $\mathbb{C}^X$ l'espace des fonctions de X dans $\mathbb{C}$, qui est le dual algébrique de $\mathbb{C}^{(X)}$. Pour tout $p \in \{0,\ldots,p^N_{\max}-1\}$ notons $\partial_p : L^N_{p+1} \to L^N_p$ la contraction à gauche par $(\ldots,1,1,\ldots) \in \mathbb{C}^X$. En d'autres termes $\partial_0 : L^N_1 \to L^N_0$ est défini par $\partial_0(\sum_{y\in X} a_y e_y) = \sum_{y\in X} a_y$ et $(L^N_1 \xleftarrow{\partial_1} L^N_2 \ldots \xleftarrow{\partial_{p^N_{\max}-1}} L^N_{p^N_{\max}})$ est le complexe d'homologie simpliciale. Enfin on note $L^N = \bigoplus_{p=0}^{p^N_{\max}} L^N_p$ et ∂ l'opérateur de degré -1 de L^N dans lui-même associé aux ∂_p.

b) Notations dépendant de $t \in [1,+\infty[$**.** Soit $t \in [1,+\infty[$. On rappelle que N_t a été introduit au paragraphe 2.1. Les notations $U_S, \mathcal{R}, \phi_{S,x}, \psi_{S,x}$ du paragraphe 2.1 dépendent de t sans que t apparaisse explicitement. Pour simplifier nous écrivons L^t_p,L^t au lieu de $L^{N_t}_p$,L^{N_t} et $p^t_{\max}$ au lieu de $p^{N_t}_{\max}$.

Pour $p \in \{1,\ldots,p^t_{\max}-1\}$ définissons $h^t_p : L^t_p \to L^t_{p+1}$ par $h^t_p(e_S) = \psi_{S,x} \wedge e_S$ et définissons $h^t_0 : L^t_0 \to L^t_1$ par $h^t_0(e_\emptyset) = \psi_{\emptyset,x}$. Comme $h^t_p(e_S) \in \bigoplus_{T\mathcal{R}S} \mathbb{C}e_T$ et $\psi_{T,x} = \psi_{S,x}$ si $T\mathcal{R}S$ il est immédiat que $h^t_{p+1}h^t_p = 0$ pour tout $p \in \{0,\ldots,p^t_{\max}-2\}$. De même que pour ∂ on note h^t l'opérateur de degré 1 de L^t dans lui-même associé aux h^t_p.

c) Notations pour $t = 1$ **et dépliage de** γ_k**.** Lorsque $t = 1$ on pose $N = N_1$ et on omet systématiquement t et N dans les notations ci-dessus: $\Delta = \Delta^N$, $p_{\max} = p^1_{\max}$, $\Delta_p = \Delta^N_p$ pour $p \in \{0,\ldots,p_{\max}\}$, $h_p = h^1_p$ et $h = h^1$.

De plus on introduit les notations supplémentaires suivantes. Pour tout $p \in \{1, \ldots, p_{\max}\}$ on note $\mathcal{H}_p$ le sous-espace de Hilbert de $\mathcal{H}$ engendré par les e_S quand S parcourt Δ_p, de sorte que $\mathcal{H} = \bigoplus_{p=1}^{p_{\max}} \mathcal{H}_p$ gradué par $p-1$ modulo 2. Pour $p \in \{1, \ldots, p_{\max}-1\}$ on note $f_p : \mathcal{H}_p \to \mathcal{H}_{p+1}$ et $g_p : \mathcal{H}_{p+1} \to \mathcal{H}_p$ les opérateurs définis par $f_p(e_S) = \phi_{S,x} \wedge e_S$ et $g_p(e_S) = \phi_{S,x} \lrcorner e_S$. A l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_p$ on associe la $\mathbb{C}$-paire $(\overline{\mathcal{H}_p}, \mathcal{H}_p)$ notée $\mathcal{H}_p$ par abus. Il est clair que $(\mathcal{H}_1 \overset{f_1}{\underset{g_1}{\rightleftarrows}} \mathcal{H}_2 \ldots \mathcal{H}_{p_{\max}})$ appartient à $E_G^{\mathrm{ban,com}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ et que le complexe replié associé à ce complexe est égal à l'image de $(\mathcal{H}, F_x) \in E_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ dans $E_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Donc la classe de ce complexe est l'image de γ_k dans $KK_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

d) Définitions des normes. Soient $t \in [1, +\infty[$ et $w \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $S \in \Delta^{N_t}$ on pose $d_{moy}(x, S) = \frac{1}{\#(S)} \sum_{a \in S} d(x, a)$ si $S \neq \emptyset$ et $d_{moy}(x, \emptyset) = 0$. Pour tout $p \in \{0, \ldots, p_{\max}^t\}$ on note $E_{p,w}^{t,>}$ le complété de L_p^t pour la norme

$$\| \sum_{S \in \Delta_p^{N_t}} x(S) e_S \|_{E_{p,w}^{t,>}} = \sum_{S \in \Delta_p^{N_t}} |x(S)| \exp(w d_{moy}(x, S))$$

et $E_{p,w}^{t,<}$ le complété de L_p^t pour la norme

$$\| \sum_{S \in \Delta_p^{N_t}} \xi(S) e_S \|_{E_{p,w}^{t,<}} = \sup_{S \in \Delta_p^{N_t}} |\xi(S)| \exp(-w d_{moy}(x, S)).$$

Munie du crochet évident défini par

$$\langle \xi, x \rangle = \sum_{S \in \Delta_p^{N_t}} \xi(S) x(S),$$

$(E_{p,w}^{t,<}, E_{p,w}^{t,>})$ est une $(G, \mathcal{N}_w)$-$\mathbb{C}$-paire, notée $E_{p,w}^t$. On note aussi $E_w^t = \bigoplus_{p=0}^{p_{\max}^t} E_{p,w}^t$. Lorsque $t = 1$ on omet t dans toutes ces notations. Toute la construction échouerait si on avait choisi des normes de type l^2 au lieu de l^1 et l^∞.

2.3.2 Préliminaires

a) Un lemme général. Le lemme suivant nous permet de construire des morphismes de $\mathbb{C}$-paires entre les $E_{p,w}^t$.

Lemme 2.3.1 *Soient $t \in [1, +\infty[$, $w \in \mathbb{R}_+^*$ et $T : L^t \to L^t$ une application linéaire telle qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+$ avec, pour tout $S \in \Delta^{N_t}$,*

$$T(e_S) \in \bigoplus_{T \text{ tel que } d_{moy}(x,T) \leq d_{moy}(x,S)+r} \mathbb{C} e_T.$$

Si $\sup_{S\in\Delta^{N_t}} \|T(e_S)\|_{l^1} \leq +\infty$, $({}^tT, T)$ *définit un élément de* $\mathcal{L}(E_w^t)$, *noté* T *par abus. Si de plus* $\|T(e_S)\|_{l^1}$ *tend vers* 0 *quand* S *sort des parties finies de* Δ^{N_t}, T *appartient à* $\mathcal{K}(E_w^t)$.

La démonstration est immmédiate, et il résulte du lemme que, pour $w \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in [1, +\infty[$, h^t et ∂ sont des morphismes de $\mathbb{C}$-paires de E_w^t dans lui-même et que $g \mapsto g(h^t) - h^t$ est une application continue de G dans $\mathcal{K}(E_w^t)$. En effet par la proposition 2.1.8 on a $\psi_{gS,x} = g(\psi_{S,g^{-1}x})$ et, pour tout compact K de G, $\sup_{g\in K} \|\psi_{S,g^{-1}x} - \psi_{S,x}\|_1$ tend vers 0 en dehors des parties finies de Δ^{N_t}.

b) Deux résultats techniques. Les deux propositions suivantes sont démontrées en appendice. On suppose désormais $t = 1$ partout, sauf dans l'appendice et on rappelle que $E_w = E_w^1$.

Proposition 2.3.2 *Pour tout* $w \in \mathbb{R}_+^*$, *le rayon spectral de* $(\mathrm{Id} - \partial h - h\partial)$ *dans* $\mathcal{L}(E_w)$ *est inférieur ou égal à* $(2p_{\max} + 2)\exp(-w\frac{4\delta}{p_{\max}})$.

Proposition 2.3.3 *Il existe un morphisme de* $\mathbb{C}$*-paires* $J : E_s \to E_s$ *de degré* 1 *tel que*

- $g \mapsto g(J) - J$ *est une application continue de* G *dans* $\mathcal{K}(E_s)$,
- *on a* $\mathrm{Id}_{E_s} = \partial J + J\partial$ *et* $J^2=0$,
- *il existe* $r \in \mathbb{R}_+$ *tel que pour tout* $S \in \Delta$, *on ait*

$$J(e_S) \in \bigoplus_{T \text{ tel que } d_{moy}(x,T) \leq d_{moy}(x,S)+r} \mathbb{C}e_T.$$

2.3.3 Description de l'homotopie

Dans toute ce paragraphe $t = 1$.

a) Représentation de 1 **dans** $E_{G,\mathcal{N}_s}^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$**.** La proposition 2.3.3 implique le corollaire suivant, grâce à la proposition 1.4.3.

Corollaire 2.3.4 *Le complexe* $(E_{1,s} \underset{\partial_1}{\overset{J_1}{\rightleftarrows}} E_{2,s} \ldots E_{p_{\max},s})$ *appartient à* $E_{G,\mathcal{N}_s}^{\mathrm{ban,com}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ *et le complexe replié associé est homotope à* 1 *dans* $E_{G,\mathcal{N}_s}^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.

b) Conjugaison par d_{moy}. Nous avons supposé que (X, d) vérifiait la condition $(B1)$ forte. Il en résulte que le lemme suivant est vrai.

Lemme 2.3.5 *Pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout compact K de G,*

$$\sup_{g \in K} \Big| \big(d_{moy}(x, gS) - d_{moy}(x, gT)\big) - \big(d_{moy}(x, S) - d_{moy}(x, T)\big) \Big|$$

tend vers 0 *en dehors des parties finies de* $\{(S, T) \in \Delta \times \Delta, diam(S \cup T) \leq R\}$.

Définition 2.3.6 *Pour $w \in \mathbb{R}_+$ on définit l'isomorphisme de $\mathbb{C}$-paires $\theta_w : E_{s+w} \to E_s$ en posant*

$$\theta_w^>(e_S) = \exp(w d_{moy}(x, S)) e_S \text{ et } \theta_w^<(e_S) = \exp(w d_{moy}(x, S)) e_S \text{ pour } S \in \Delta.$$

Lemme 2.3.7 *Pour tout $w \in \mathbb{R}_+$ et pour tout T comme dans la première partie du lemme 2.3.1, $g \mapsto g(\theta_w) T g(\theta_w^{-1}) - \theta_w T \theta_w^{-1}$ est une application continue de G dans $\mathcal{K}(E_s)$.*

Cela résulte des lemmes 2.3.1 et 2.3.5.

Lemme 2.3.8 *Pour $w \in \mathbb{R}_+$ assez grand* $\mathrm{Id} - (\partial h + h\partial) \in \mathcal{L}(E_{s+w})$ *est de rayon spectral strictement inférieur à* 1.

En effet, par la proposition 2.3.2, $\mathrm{Id} - (\partial h + h\partial) \in \mathcal{L}(E_{s+w})$ est de rayon spectral inférieur ou égal à $(2p_{\max} + 2) \exp(-(s + w)\frac{4\delta}{p_{\max}})$, qui est strictement inférieur à 1 lorsque w est assez grand.

Nous fixons désormais $w \in \mathbb{R}_+$ tel que la conclusion du lemme 2.3.8 soit vraie.

On note alors $H = h(\partial h + h\partial)^{-1} = (\partial h + h\partial)^{-1} h \in \mathcal{L}(E_{s+w})$: l'égalité a lieu car $(\partial h + h\partial) h = h\partial h = h(\partial h + h\partial)$ puisque $h^2 = 0$. De même, en utilisant $\partial^2 = 0$, on vérifie que $\partial(\partial h + h\partial)^{-1} = (\partial h + h\partial)^{-1}\partial$.

On a $H^2 = (\partial h + h\partial)^{-1} hh (\partial h + h\partial)^{-1} = 0$ puisque $h^2 = 0$ et $\partial H + H\partial = 1$ car ∂ et h commutent à $(\partial h + h\partial)^{-1}$. Par le lemme 2.3.1 $g \mapsto g(h) - h$ est une application continue de G dans $\mathcal{K}(E_{s+w})$ et ∂ est G-équivariant. On en déduit que $\mapsto g(H) - H$ est une application continue de G dans $\mathcal{K}(E_{s+w})$.

L'idée d'introduire l'opérateur H, qui joue un rôle essentiel, m'a été suggérée par Georges Skandalis.

Proposition 2.3.9 *Le complexe* $(E_{1,s} \underset{\theta_w \partial_1 (\theta_w)^{-1}}{\overset{\theta_w H_1 (\theta_w)^{-1}}{\rightleftarrows}} E_{2,s} \ldots E_{p_{\max},s})$ *appartient à* $E_{G,\mathcal{N}_s}^{\mathrm{ban,com}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ *et le complexe replié associé est homotope à* $(E_{1,s} \underset{\partial_1}{\overset{J_1}{\rightleftarrows}} E_{2,s} \ldots E_{p_{\max},s})_R$ *dans* $E_{G,\mathcal{N}_s}^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

La démonstration de la proposition occupe la fin de ce paragraphe. D'après le lemme 2.3.7, et les remarques après le lemme 2.3.8,

$$g \mapsto g(\theta_w \partial(\theta_w)^{-1}) - (\theta_w \partial(\theta_w)^{-1}) \text{ et } g \mapsto g(\theta_w H(\theta_w)^{-1}) - (\theta_w H(\theta_w)^{-1})$$

sont des applications continues de G dans $\mathcal{K}(E_s)$ et donc

$$\big(E_{1,s} \underset{\theta_w \partial_1(\theta_w)^{-1}}{\overset{\theta_w H_1(\theta_w)^{-1}}{\rightleftarrows}} E_{2,s} \dots E_{p_{\max},s}\big)$$

appartient à $E^{\mathrm{ban,com}}_{G,\mathcal{N}_s}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.

La dernière condition satisfaite par J dans la proposition 2.3.3 permet de définir $J \in \mathcal{L}(E_{s+v})$ possédant les mêmes propriétés que $J \in \mathcal{L}(E_s)$ pour tout $v \in \mathbb{R}_+$. Le complexe

$$\big(E_{1,s}[0,1] \underset{(\theta_{\alpha w} \partial_1(\theta_{\alpha w})^{-1})_{\alpha \in [0,1]}}{\overset{(\theta_{\alpha w} J_1(\theta_{\alpha w})^{-1})_{\alpha \in [0,1]}}{\rightleftarrows}} E_{2,s}[0,1] \dots E_{p_{\max},s}[0,1]\big)$$

appartient à $E^{\mathrm{ban,com}}_{G,\mathcal{N}_s}(\mathbb{C},\mathbb{C}[0,1])$ et réalise une homotopie entre

$$\big(E_{1,s} \underset{\partial_1}{\overset{J_1}{\rightleftarrows}} E_{2,s} \dots E_{p_{\max},s}\big) \text{ et } \big(E_{1,s} \underset{\theta_w \partial_1(\theta_w)^{-1}}{\overset{\theta_w J_1(\theta_w)^{-1}}{\rightleftarrows}} E_{2,s} \dots E_{p_{\max},s}\big)$$

dans $E^{\mathrm{ban,com}}_{G,\mathcal{N}_s}(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Enfin

$$\big(E_{1,s} \underset{\theta_w \partial_1(\theta_w)^{-1}}{\overset{\theta_w J_1(\theta_w)^{-1}}{\rightleftarrows}} E_{2,s} \dots E_{p_{\max},s}\big)_R \text{ et } \big(E_{1,s} \underset{\theta_w \partial_1(\theta_w)^{-1}}{\overset{\theta_w H_1(\theta_w)^{-1}}{\rightleftarrows}} E_{2,s} \dots E_{p_{\max},s}\big)_R$$

sont homotopes dans $E^{\mathrm{ban}}_{G,\mathcal{N}_s}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ d'après le lemme 1.4.2.

c) Fin de l'homotopie. On garde la valeur de w qui a été fixée après le lemme 2.3.8. Le but de ce paragraphe est de démontrer la proposition suivante, qui achève l'homotopie.

Proposition 2.3.10 *Les complexes* $(E_{1,s} \underset{\theta_w \partial_1(\theta_w)^{-1}}{\overset{\theta_w H_1(\theta_w)^{-1}}{\rightleftarrows}} E_{2,s} \dots E_{p_{\max},s})_R$ *et* $(\mathcal{H}_1 \underset{g_1}{\overset{f_1}{\rightleftarrows}} \mathcal{H}_2 \dots \mathcal{H}_{p_{\max}})_R$ *sont homotopes dans* $E^{\mathrm{ban}}_{G,\mathcal{N}_s}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.

Cette homotopie est réalisée en plusieurs étapes.

Lemme 2.3.11 *Soit* $D = \partial(\partial h + h\partial)^{-1} = (\partial h + h\partial)^{-1}\partial \in \mathcal{L}(E_{s+w})$. *Le complexe* $(E_{1,s} \underset{\theta_w D_1(\theta_w)^{-1}}{\overset{\theta_w h_1(\theta_w)^{-1}}{\rightleftarrows}} E_{2,s} \dots E_{p_{\max},s})$ *appartient à* $E^{\mathrm{ban,com}}_{G,\mathcal{N}_s}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ *et est homotope à* $(E_{1,s} \underset{\theta_w \partial_1(\theta_w)^{-1}}{\overset{\theta_w H_1(\theta_w)^{-1}}{\rightleftarrows}} E_{2,s} \dots E_{p_{\max},s})$ *dans* $E^{\mathrm{ban,com}}_{G,\mathcal{N}_s}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.

Comme $\mathrm{Id}-(\partial h+h\partial)\in\mathcal{L}(E_{s+w})$ est de rayon spectral strictement inférieur à 1, à l'aide de la détermination principale du logarithme on peut définir $(\partial h+h\partial)^{-\alpha}\in\mathcal{L}(E_{s+w})$ pour tout $\alpha\in[0,1]$. Posons

$$H^\alpha=h(\partial h+h\partial)^{-\alpha}=(\partial h+h\partial)^{-\alpha}h\in\mathcal{L}(E_{s+w})$$

et

$$D^\alpha=\partial(\partial h+h\partial)^{-\alpha}=(\partial h+h\partial)^{-\alpha}\partial\in\mathcal{L}(E_{s+w}).$$

Alors le complexe

$$(E_{1,s}[0,1]\underset{(\theta_w D_1^{1-\alpha}(\theta_w)^{-1})_{\alpha\in[0,1]}}{\overset{(\theta_w H_1^\alpha(\theta_w)^{-1})_{\alpha\in[0,1]}}{\rightleftarrows}}E_{2,s}[0,1]\dots E_{p_{\max},s}[0,1])$$

appartient à $E^{\mathrm{ban,com}}_{G,\mathcal{N}_s}(\mathbb{C},\mathbb{C}[0,1])$ et réalise l'homotopie pour le lemme.

Pour tout $p\in\{0,\dots,p_{\max}-1\}$, définissons $h'_p:L_p\to L_{p+1}$ par $h'_p(e_S)=\frac{1}{\|\phi^3_{S,x}\|_1}\psi_{S,x}\wedge e_S$ et $g'_p:L_{p+1}\to L_p$ par $g'_p(e_S)=\frac{1}{\|\phi^3_{S,x}\|_{l^1}}\phi_{S,x}\lrcorner e_S$. Comme (X,d) est uniformément localement fini, $(\|\phi^3_{S,x}\|_{l^1})^{-1}=(\langle\phi_{S,x},\psi_{S,x}\rangle)^{-1}$ est borné indépendamment de S.

Lemme 2.3.12 *Le complexe* $(E_{1,s}\underset{g'_1}{\overset{h_1}{\rightleftarrows}}E_{2,s}\dots E_{p_{\max},s})$ *appartient à* $E^{\mathrm{ban,com}}_{G,\mathcal{N}_s}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ *et le complexe replié associé est homotope à* $(E_{1,s}\underset{\theta_w D_1(\theta_w)^{-1}}{\overset{\theta_w h_1(\theta_w)^{-1}}{\rightleftarrows}}E_{2,s}\dots E_{p_{\max},s})_R$ *dans* $E^{\mathrm{ban}}_{G,\mathcal{N}_s}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.

Cela résulte du lemme 1.4.2 et de l'homotopie fournie par le complexe

$$(E_{1,s}[0,1]\underset{(\theta_{\alpha w}g'_1(\theta_{\alpha w})^{-1})_{\alpha\in[0,1]}}{\overset{(\theta_{\alpha w}h_1(\theta_{\alpha w})^{-1})_{\alpha\in[0,1]}}{\rightleftarrows}}E_{2,s}[0,1]\dots E_{p_{\max},s}[0,1])\in E^{\mathrm{ban,com}}_{G,\mathcal{N}_s}(\mathbb{C},\mathbb{C}[0,1]).$$

Lemme 2.3.13 *Le complexe* $(E_{1,s}\underset{g_1}{\overset{h'_1}{\rightleftarrows}}E_{2,s}\dots E_{p_{\max},s})$ *appartient à* $E^{\mathrm{ban,com}}_{G,\mathcal{N}_s}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ *et est homotope à* $(E_{1,s}\underset{g'_1}{\overset{h_1}{\rightleftarrows}}E_{2,s}\dots E_{p_{\max},s})$ *dans* $E^{\mathrm{ban,com}}_{G,\mathcal{N}_s}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.

Pour réaliser l'homotopie, définissons, pour $\alpha\in[0,1]$, $h_{p,\alpha}:L_p\to L_{p+1}$ et $g_{p,\alpha}:L_{p+1}\to L_p$ par $h_{p,\alpha}(e_S)=(\|\phi^3_{S,x}\|_1)^{-\alpha}\psi_{S,x}\wedge e_S$ et $g_{p,\alpha}(e_S)=(\|\phi^3_{S,x}\|_1)^{-\alpha}\phi_{S,x}\lrcorner e_S$ de sorte $h_{p,0}=h_p$, $h_{p,1}=h'_p$, $g_{p,0}=g_p$ et $g_{p,1}=g'_p$.

L'homotopie est réalisée par $(E_{1,s}[0,1] \underset{(g_{1,(1-\alpha)})_{\alpha\in[0,1]}}{\overset{(h_{1,\alpha})_{\alpha\in[0,1]}}{\rightleftarrows}} E_{2,s}[0,1]\dots E_{p_{\max},s}[0,1])$ qui appartient à $E_{G,\mathcal{N}_s}^{\mathrm{ban,com}}(\mathbb{C},\mathbb{C}[0,1])$.

Lemme 2.3.14 *Le complexe* $(E_{1,s} \underset{g_1}{\overset{f_1}{\rightleftarrows}} E_{2,s}\dots E_{p_{\max},s})$ *appartient à* $E_{G,\mathcal{N}_s}^{\mathrm{ban,com}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ *et le complexe replié associé est homotope à* $(E_{1,s} \underset{g_1}{\overset{h'_1}{\rightleftarrows}} E_{2,s}\dots E_{p_{\max},s})_R$ *dans* $E_{G,\mathcal{N}_s}^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.

Cela résulte du lemme 1.4.2.

Lemme 2.3.15 *Le complexe* $(E_{1,0} \underset{g_1}{\overset{f_1}{\rightleftarrows}} E_{2,0}\dots E_{p_{\max},0})$ *appartient à* $E_{G}^{\mathrm{ban,com}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ *et son image dans* $E_{G,\mathcal{N}_s}^{\mathrm{ban,com}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ *est homotope à* $(E_{1,s} \underset{g_1}{\overset{f_1}{\rightleftarrows}} E_{2,s}\dots E_{p_{\max},s})$.

Pour tout $p\in\{1,...,p_{\max}\}$ notons $\bar{E}_p^{>}$ la complétion de $L_p\otimes^{alg}\mathbb{C}[0,1]$ pour la norme $\|x\|=\sup_{\alpha\in[0,1]}\|x(\alpha)\|_{E^{>}_{p,(1-\alpha)s}}$, définissons de même $\bar{E}_p^{<}$ et notons par abus $f_p\otimes 1$ et $g_p\otimes 1$ les prolongements continus de $f_p\otimes 1$ et $g_p\otimes 1$. Alors $\bar{E}_p=(\bar{E}_p^{<},\bar{E}_p^{>})$ est une $(G,\mathcal{N}_s)$-$\mathbb{C}[0,1]$-paire et le complexe $(\bar{E}_1 \underset{g_1\otimes 1}{\overset{f_1\otimes 1}{\rightleftarrows}} \bar{E}_2\dots\bar{E}_{p_{\max}}$ appartient à $E_{G,\mathcal{N}_s}^{\mathrm{ban,com}}(\mathbb{C},\mathbb{C}[0,1])$ et réalise l'homotopie pour le lemme.

On note que $E_{p,0}=(c_0(\Delta_p),l^1(\Delta_p))$.

Lemme 2.3.16 *Les complexes* $(E_{1,0} \underset{g_1}{\overset{f_1}{\rightleftarrows}} E_{2,0}\dots E_{p_{\max},0})$ *et* $(\mathcal{H}_1 \underset{g_1}{\overset{f_1}{\rightleftarrows}} \mathcal{H}_2\dots\mathcal{H}_{p_{\max}})$ *sont homotopes dans* $E_{G}^{\mathrm{ban,com}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.

Notons q et q' deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $[1,+\infty]$ telles que $q(0)=q'(0)=2$, $q(1)=1$, $q'(1)=+\infty$ et $q(\alpha)^{-1}+q'(\alpha)^{-1}=1$ pour tout $\alpha\in[0,1]$. Pour tout $p\in\{1,...,p_{\max}\}$ notons $\bar{E}_p^{>}$ la complétion de $L_p\otimes^{alg}\mathbb{C}[0,1]$ pour la norme $\|x\|=\sup_{\alpha\in[0,1]}\|x(\alpha)\|_{l^{q(\alpha)}(\Delta_p)}$, et $\bar{E}_p^{<}$ la complétion de $L_p\otimes^{alg}\mathbb{C}[0,1]$ pour la norme $\|\xi\|=\sup_{\alpha\in[0,1]}\|\xi(\alpha)\|_{l^{q'(\alpha)}(\Delta_p)}$,et notons par abus $f_p\otimes 1$ et $g_p\otimes 1$ les prolongements continus de $f_p\otimes 1$ et $g_p\otimes 1$. Alors $\bar{E}_p=(\bar{E}_p^{<},\bar{E}_p^{>})$ est une G-$\mathbb{C}[0,1]$-paire et le complexe $(\bar{E}_1 \underset{g_1\otimes 1}{\overset{f_1\otimes 1}{\rightleftarrows}} \bar{E}_2\dots\bar{E}_{p_{\max}}$ appartient à $E_{G}^{\mathrm{ban,com}}(\mathbb{C},\mathbb{C}[0,1])$ et réalise l'homotopie pour le lemme.

2.4 Appendice technique

2.4.1 Démonstration de la proposition 2.3.2 et d'un résultat algébrique

Nous allons montrer un résultat plus général que la proposition 2.3.2.

Proposition 2.4.1 *Soient $t \in [1, +\infty[$ et $w \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $q \in \{1, \ldots, p_{\max}^t\}$, pour tout $p \in \{0, \ldots, q\}$, $(\mathrm{Id} - \partial_p h_p^t - h_{p-1}^t \partial_{p-1}) \in \mathcal{L}(E_{p,w}^t)$ est de rayon spectral inférieur ou égal à $(2q+2)\exp(-w\frac{(4t-4)k+4\delta}{q})$.*

Nous fixons t et w comme dans la proposition.

Pour tout $q \in \{1, \ldots, p_{\max}^t\}$ notons $\Delta_{(\leq q)}^{N_t} = \bigcup_{p=0}^{q} \Delta_p^{N_t}$ et pour tout $S \in \Delta_{(\leq q)}^{N_t}$ posons

$$\zeta_{q,x}^t(S) = \frac{1}{q}\left(\sum_{a \in S} \max\Big(d(x, U_S), d(x,a) - (2k+2\delta)\Big) + (q - \#(S))d(x, U_S)\right)$$

si $S \neq \emptyset$ et $\zeta_{q,x}^t(\emptyset) = 0$.

Le lemme suivant est immédiat.

Lemme 2.4.2 *Soit $q \in \{1, \ldots, p_{\max}^t\}$.*

- *a) Pour tout $S \in \Delta_{(\leq q)}^{N_t}$ on a $d(x, U_S) \leq \zeta_{q,x}^t(S) \leq d(x, U_S) + N_t$.*
- *b) Pour $x, y \in X$ et $S \in \Delta_{(\leq q)}^{N_t}$ on a $|\zeta_{q,x}^t(S) - \zeta_{q,y}^t(S)| \leq d(x,y)$ et $\zeta_{q,x}^t(S)$ dépend de (x, S) de façon G-équivariante.*

Lemme 2.4.3 *Pour tout $q \in \{1, \ldots, p_{\max}^t\}$, pour tout $p \in \{0, \ldots, q\}$, pour tout $S \in \Delta_p^{N_t}$ on a*

$$(\mathrm{Id} - \partial_p h_p^t - h_{p-1}^t \partial_{p-1})e_S \in \bigoplus_{T \text{ tel que } \zeta_{q,x}^t(T) \leq \zeta_{q,x}^t(S) - \frac{(4t-4)k+4\delta}{q}} \mathbb{C}e_T.$$

La preuve du lemme 2.4.3 repose sur le lemme suivant.

Lemme 2.4.4 *Soit $q \in \{1, \ldots, p_{\max}^t\}$.*

- *a) Pour $S, T \in \Delta_{(\leq q)}^{N_t}$ tels que $S\mathcal{R}T$ on a $\zeta_{q,x}^t(S) = \zeta_{q,x}^t(T)$*
- *b) Pour $S, T \in \Delta_{(\leq q)}^{N_t}$ tels que $T \subset S$, $\#(T) = \#(S) - 1$, et $\psi_{S,x} \neq \psi_{T,x}$ on a $\zeta_{q,x}^t(T) \leq \zeta_{q,x}^t(S) - \frac{(4t-4)k+4\delta}{q}$.*

L'assertion a) du lemme résulte du a) du lemme 2.1.6 : comme $S\mathcal{R}T$ la différence symétrique de S et T est incluse dans le support de $\psi_{S,x}$ donc a fortiori dans $\bigcup_{r\in I(d(x,U_S))} Y_{S,x,r}$. Montrons l'assertion b). D'après le corollaire 2.1.9, si $\psi_{S,x} \neq \psi_{T,x}$ il existe $a \in S - T$ tel que $d(x,a) > d(x,U_S) + (4t-2)k + 6\delta$. D'où

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{q}\Bigg(\sum_{a\in T} \max\Big(d(x,U_T), d(x,a) - (2k+2\delta)\Big) + (q - \#(T))d(x,U_T)\Bigg)\\
&\leq \frac{1}{q}\Bigg(\sum_{a\in T} \max\Big(d(x,U_S), d(x,a) - (2k+2\delta)\Big) + (q - \#(T))d(x,U_S)\Bigg)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\leq \zeta^t_{q,x}(S) - \frac{(4t-4)k+4\delta}{q}.
\end{aligned}$$

La preuve du lemme 2.4.4 est achevée.

Démontrons maintenant le lemme 2.4.3. Il résulte de l'assertion b) du lemme 2.4.4 que pour tout $p \in \{1,\ldots,q\}$ et pour tout $S \in \Delta_p^{N_t}$ on a

$$\partial_{p-1}(e_S) \in \Big(\bigoplus_{T \text{ tel que } \psi_{S,x}=\psi_{T,x}} \mathbb{C}e_T\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{T \text{ tel que } \zeta^t_{q,x}(T)\leq\zeta^t_{q,x}(S)-\frac{(4t-4)k+4\delta}{q}} \mathbb{C}e_T\Big).$$

D'où, grâce à l'assertion a) du lemme 2.4.4,

$$h^t_{p-1}(\partial_{p-1}(e_S)) = \psi_{S,x} \wedge (\partial_{p-1}(e_S)) \text{ modulo } \bigoplus_{T \text{ tel que } \zeta^t_{q,x}(T)\leq\zeta^t_{q,x}(S)-\frac{(4t-4)k+4\delta}{q}} \mathbb{C}e_T.$$

Le lemme 2.4.3 est démontré puisque $\langle(\ldots,1,1,\ldots),\psi_{S,x}\rangle = 1$.

Or $h^t_p : L^t_p \to L^t_{p+1}$ est de norme inférieure ou égale à 1 et $\partial_p : L^t_{p+1} \to L^t_p$ est de norme inférieure ou égale à $p+1$ si on munit les espaces L^t_p de la norme l^1. Par suite, si on met sur $E^t_{p,w}$ la norme équivalente obtenue en remplaçant $d_{moy}(x,S)$ par $\zeta^t_{q,x}(S)$, pour tout $p \in \{0,...,q\}$, $(\mathrm{Id} - \partial_p h^t_p - h^t_{p-1}\partial_{p-1}) \in \mathcal{L}(E^t_{p,w})$ est de norme inférieure ou égale à $(2q+2)\exp(-w\frac{(4t-4)k+4\delta}{q})$. La proposition 2.4.1 est démontrée.

Nous établissons un résultat algébrique qui est intéressant en soi.

Proposition 2.4.5 *Soit $t \in [1,+\infty[$. L'application linéaire $\partial h^t + h^t\partial : L^t \to L^t$ est inversible et si on note $H^t = h^t(\partial h^t + h^t\partial)^{-1}$ on a $H^{t,2} = 0$ et $\partial H^t + H^t\partial = \mathrm{Id}_{L^t}$.*

Il résulte du lemme 2.4.3 appliqué à $q = p^t_{\max}$ que $\partial h^t + h^t\partial : L^t \to L^t$ est inversible. Comme $h^{t,2} = 0$ on a $h^t(\partial h^t + h^t\partial) = h^t\partial h^t = (\partial h^t + h^t\partial)h^t$

d'où $H^t = h^t(\partial h^t + h^t\partial)^{-1} = (\partial h^t + h^t\partial)^{-1}h^t$. Par le même argument, en utilisant que $\partial^2 = 0$, on montre que ∂ commute à $(\partial h^t + h^t\partial)^{-1}$. On a $H^{t,2} = (\partial h^t + h^t\partial)^{-1}h^t h^t(\partial h^t + h^t\partial)^{-1} = 0$ puisque $h^{t,2} = 0$. Enfin $\partial H^t + H^t\partial = \partial h^t(\partial h^t + h^t\partial)^{-1} + (\partial h^t + h^t\partial)^{-1}h^t\partial = \mathrm{Id}_{L^t}$ car ∂ et h^t commutent à $(\partial h^t + h^t\partial)^{-1}$.

Il résulte de la proposition 2.4.1 que H^t_p est bien défini dans $\mathcal{L}(E^t_{p,w}, E^t_{p+1,w})$ dès que $p \leq q$ avec $(2q+2)\exp(-w\frac{(4t-4)k+4\delta}{q}) < 1$.

2.4.2 Démonstration de la proposition 2.3.3

Lorsque $p \in \{0, \dots, p_{\max}\}$ et $f = \sum_{S\in\Delta_p} f(S)e_S \in L_p$, on pose $\mathrm{supp}(f) = \bigcup_{f(S)\neq 0} S$.

Lemme 2.4.6 *Pour tout $R \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $R' \in \mathbb{R}_+^*$ et une constante $C \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $p \in \{1, \dots, p_{\max}\}$, il existe une application non-linéaire G-équivariante $\Phi_p : \{f \in L_p, \partial_{p-1}(f) = 0, \mathrm{diam}(\mathrm{supp}(f)) \leq R\} \to L_{p+1}$ avec, pour tout f dans l'ensemble de départ de Φ_p,*

- $\partial_p(\Phi_p(f)) = f$,
- *le diamètre de* $\mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(\Phi_p(f))$ *est inférieur ou égal à R',*
- $\|\Phi_p(f)\|_{l^1} \leq C\|f\|_{l^1}$.

En effet on pose $\Phi_p(f) = \frac{1}{\#(\mathrm{supp}(f))}\sum_{z\in\mathrm{supp}(f)} H^1_{p,z}(f)$ où z dans $H^1_{p,z}$ indique que l'on remplace x par z dans la construction de H à la proposition 2.4.5.

On rappelle que $N = N_1$.

Lemme 2.4.7 *Pour tout $N' \in [N, +\infty[$ il existe une famille d'applications linéaires $(\Psi_p : L_p^{N'} \to L_p^N)_{p\in\{0,\dots,p_{\max}\}}$ de sorte que, en posant $\Psi_p = 0$ pour $p > p_{\max}$, les conditions suivantes soient réalisées :*

- *Ψ_p est G-équivariant pour tout p,*
- *$\partial_{p-1} \circ \Psi_p = \Psi_{p-1} \circ \partial_{p-1}$ pour tout $p \in \{1, \dots, p_{\max}\}$,*
- *Ψ_p est borné en norme l^1 pour tout p,*
- *pour tout p, $\sup_{S\in\Delta_p^{N'}} \mathrm{diam}(\mathrm{supp}(\Psi_p(e_S)) \cup S)$ est fini,*
- *en notant $i_p : L_p^N \to L_p^{N'}$ l'inclusion évidente on a $\Psi_p \circ i_p = \mathrm{Id}_{L_p^N}$ pour tout $p \in \{0, \dots, p_{\max}\}$.*

Démontrons le lemme 2.4.7. On pose $\Psi_0 = \mathrm{Id}$ et $\Psi_1 = \mathrm{Id}$. Ensuite on construit Ψ_p par récurrence sur p : si Ψ_{p-1} est construit, et la constante R choisie de façon adéquate et Φ_{p-1} l'application associée à R par le lemme 2.4.6, pour $S \in \Delta_p^{N'}$ on pose $\Psi_p(e_S) = e_S$ si $\mathrm{diam}(S) \leq N$ et sinon $\Psi_p(e_S) = \Phi_{p-1}(\Psi_{p-1}(\partial_{p-1}(e_S)))$. Ceci a un sens car $\partial_{p-2}(\Psi_{p-1}(\partial_{p-1}(e_S))) = \Psi_{p-2}(\partial_{p-2}(\partial_{p-1}(e_S))) = 0$. Par construction Ψ_p est G-équivariant car Ψ_{p-1} est G-équivariant.

Démontrons maintenant la proposition 2.3.3. Fixons t tel que

$$(2p_{\max} + 2) \exp(-s\frac{(4t-4)k + 4\delta}{p_{\max}}) < 1.$$

Appliquons le lemme 2.4.7 à $N' = N_t$. Pour tout $p \in \{0, \ldots, p_{\max} - 1\}$ posons $K_p = \Psi_{p+1} H_p^t i_p : L_p \to L_{p+1}$. Il résulte de la proposition 2.4.1 appliquée à $q = p_{\max}$ et de l'hypothèse faite sur t que pour tout $p \in \{0, \ldots, p_{\max}\}$ $(\mathrm{Id} - \partial_p h_p^t - h_{p-1}^t \partial_{p-1}) \in \mathcal{L}(E_{p,s}^t)$ est de rayon spectral strictement inférieur à 1. Il est important de remarquer que $p_{\max} < p_{\max}^t$ en général. Par conséquent $(\partial_p h_p^t + h_{p-1}^t \partial_{p-1})^{-1} \in \mathcal{L}(E_{p,s}^t)$ est bien défini pour tout $p \in \{0, \ldots, p_{\max}\}$ et donc $H_p^t \in \mathcal{L}(E_{p,s}^t, E_{p+1,s}^t)$ et $K_p \in \mathcal{L}(E_{p,s}, E_{p+1,s})$ sont bien définis pour tout $p \in \{0, \ldots, p_{\max} - 1\}$. On sait que, pour tout $p \in \{0, \ldots, p_{\max}\}$, $g \mapsto g(h_p^t) - h_p^t$ est une application continue de G dans $\mathcal{K}(E_{p,s}^t, E_{p+1,s}^t)$ et donc $g \mapsto g((\partial_p h_p^t + h_{p-1}^t \partial_{p-1})^{-1}) - (\partial_p h_p^t + h_{p-1}^t \partial_{p-1})^{-1}$ est une application continue de G dans $\mathcal{K}(E_{p,s}^t)$ pour tout $p \in \{0, \ldots, p_{\max}\}$. Donc, pour tout $p \in \{0, \ldots, p_{\max} - 1\}$, $g \mapsto g(H_p^t) - H_p^t$ est une application continue de G dans $\mathcal{K}(E_{p,s}^t, E_{p+1,s}^t)$ et $g \mapsto g(K_p) - K_p$ est une application continue de G dans $\mathcal{K}(E_{p,s}, E_{p+1,s})$ puisque Ψ_p et i_p sont exactement G-équivariants. Enfin pour tout $p \in \{0, \ldots, p_{\max}\}$,

$$\begin{aligned} \partial_p K_p + K_{p-1} \partial_{p-1} &= \partial_p \Psi_{p+1} H_p^t i_p + \Psi_p H_{p-1}^t i_{p-1} \partial_{p-1} \\ &= \Psi_p (\partial_p H_p^t + H_{p-1}^t \partial_{p-1}) i_p = \Psi_p i_p = \mathrm{Id}_{E_{p,s}}. \end{aligned}$$

On pose maintenant $J = K\partial K \in \mathcal{L}(E_s)$. On a vu que K est de degré 1 et vérifie $K\partial + \partial K = \mathrm{Id}_{E_s}$, et que $g \mapsto g(K) - K$ est une application continue de G dans $\mathcal{K}(E_s)$. Un calcul analogue à celui de la preuve du lemme 1.4.2 montre que J convient : comme $\partial^2 = 0$, $(K\partial)^2 = (K\partial)(K\partial + \partial K) = K\partial$ et $(\partial K)^2 = (K\partial + \partial K)(\partial K) = \partial K$. D'où $\partial K^2 \partial = 0$. On en déduit que $J^2 = K\partial K^2 \partial K = 0$ et $\partial J + J\partial = (K\partial)^2 + (\partial K)^2 = K\partial + \partial K = \mathrm{Id}_{E_s}$.

Chapitre 3

Homotopie entre γ et 1 pour les groupes agissant proprement sur des variétés de courbure négative ou nulle

Soient G un groupe localement compact et X une variété riemannienne complète simplement connexe de courbure sectionnelle négative ou nulle et bornée inférieurement munie d'une action de G continue isométrique et propre. On note $C_\tau(X)$ l'algèbre des sections continues tendant vers 0 à l'infini du fibré en algèbres de Clifford associé à l'espace cotangent complexifié de X (voir [Kas88] 4.1). Kasparov construit un élément de Dirac $[d] \in KK_G(C_\tau(X), \mathbb{C})$ et un élément dual-Dirac $\eta \in KK_G(\mathbb{C}, C_\tau(X))$ et note $\gamma = \eta \otimes_{C_\tau(X)} [d] \in KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ leur produit (voir [Kas88] 4.2, 5.1 et 5.4).

Nous montrons le résultat suivant : il existe une suite $(N_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de normes sur G, convergeant uniformément vers 1 sur tout compact de G et telle que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, γ et 1 aient même image dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,N_i}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Je remercie Alain Connes et Georges Skandalis pour m'avoir expliqué comment on peut réaliser l'élément γ de Kasparov en conjuguant le complexe de de Rham sur G/K par $e^{-\rho^2}$. Pour des raisons techniques nous conjuguons en fait le complexe de de Rham par $e^{-\sqrt{\rho^2+1}}$. Une autre réalisation de l'élément γ intervient alors et j'ai profité d'une discussion avec Guennadi Kasparov à ce sujet.

3.1 Rappels sur l'élément γ

Soient G un groupe localement compact et X une variété riemannienne complète simplemement connexe de courbure négative ou nulle et bornée inférieurement munie d'une action de G continue isométrique et propre. On va donner une réalisation explicite de l'élément γ.

Pour $x, y \in X$ on note $d(x,y)$ la distance géodésique de x à y. Dans toute la suite on fixe un point x_0 dans X et pour tout $y \in X$ on pose $\rho(y) = d(x_0, y)$.

On considère l'espace de Hilbert $L^2(X, \Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X))$ des formes complexes L^2 sur X, gradué par le degré des formes modulo 2. Pour tout champ θ de 1-formes sur X on note λ_θ la multiplication extérieure (à gauche) par θ sur les formes à support compact et λ^*_θ l'opérateur de contraction formellement adjoint de λ_θ. D'autre part on note d la différentielle extérieure sur les formes C^∞ à support compact, d^* son adjoint formel et $\triangle = dd^* + d^*d = (d+d^*)^2$ le laplacien. Enfin on note $\rho' = \sqrt{\rho^2+1}$ et $\xi = d(\rho')$.

Nous rappelons que $[d] \in KK_G(C_\tau(X), \mathbb{C})$ est représenté par

$$(L^2(X, \Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X)), (d+d^*)(1+\triangle)^{-\frac{1}{2}})$$

et $\eta \in KK_G(\mathbb{C}, C_\tau(X))$ par $(C_\tau(X), \xi)$ en notant par abus ξ la multiplication de Clifford associée à ξ (voir [Kas88], 4.2 et 5.3).

Posons $\mathcal{D}_t = d + d^* + t(\lambda_\xi + \lambda^*_\xi)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. L'opérateur $\mathcal{D}_t$ est formellement auto-adjoint et comme il est de degré 1 il est essentiellement auto-adjoint sur $L^2(X, \Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X))$. Le supercommutateur $A = [d+d^*, \lambda_\xi + \lambda^*_\xi]$ est un opérateur différentiel de degré 0, et un opérateur borné sur $L^2(X, \Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X))$, du fait que la courbure sectionnelle de X est négative ou nulle et bornée inférieurement. On note $\|A\|$ la norme de A sur $L^2(X, \Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X))$.

Lemme 3.1.1 *Pour tout $t \in]\|A\|, +\infty[$, $\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t$ est de dimension finie et si on note $p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t}$ le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t$, l'opérateur $\mathcal{D}_t^2 + p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t}$ est inversible d'inverse bornée.*

En effet $\mathcal{D}_t^2 = \triangle + t^2\|\xi\|^2 + tA$. D'après [Wol73] $\triangle$ est essentiellement auto-adjoint et comme $t^2\|\xi\|^2 + tA$ est borné auto-adjoint, $\mathcal{D}_t^2$ est essentiellement auto-adjoint et le domaine de $\mathcal{D}_t^2$ est égal au domaine de $\triangle$. Comme $\|\xi\|^2$ tend vers 1 à l'infini, pour tout $t > \|A\|$ il existe $\epsilon > 0$ et une fonction f à support compact sur X telle que l'on ait $\mathcal{D}_t^2 \geq \triangle + \epsilon - f$. Or $(\epsilon+\triangle)^{-\frac{1}{2}} f (\epsilon+\triangle)^{-\frac{1}{2}}$ est compact car $(\epsilon+\triangle)^{-\frac{1}{2}}$ est continu de $L^2(X, \Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X))$ vers l'espace des fonctions dont la restriction à un certain voisinage compact du support de f appartient à H^1 et f est compact de cet espace vers $L^2(X, \Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X))$ et enfin $(\epsilon+\triangle)^{-\frac{1}{2}}$ est continu de $L^2(X, \Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X))$ dans lui-même.

Proposition 3.1.2 *Pour tout $t \in]\|A\|, +\infty[$ l'élément*

$$(L^2(X, \Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X)), \mathcal{D}_t(\mathcal{D}_t^2 + p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t})^{-\frac{1}{2}})$$

appartient à $E_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ et la classe de cet élément dans $KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ est égale à γ.

Pour $t \in]\|A\|, +\infty[$ le lemme 3.1.1 s'applique et l'opérateur $F_t = \mathcal{D}_t(\mathcal{D}_t^2 + p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t})^{-\frac{1}{2}}$ est bien défini. Comme $F_t^2 - 1$ est de rang fini, pour s'assurer que $(L^2(X, \Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X)), F_t)$ appartient à $E_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ on doit montrer que $(g \mapsto g(F_t) - F_t)$ est une application continue de G dans $\mathcal{K}(L^2(X, \Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X)))$. Pour cela on utilise la formule donnée dans [Kas88], 4.2, avec $\mathcal{D}_t^2 + p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t}$ au lieu de $\mathcal{D}^2 + 1$. On a ainsi $F_t = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathcal{D}_t(\lambda^2 + \mathcal{D}_t^2 + p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t})^{-1} d\lambda$, où l'intégrale converge au sens de la topologie forte. D'où

$$\begin{aligned} g(F_t) - F_t = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \big(\lambda^2 + \mathcal{D}_t^2 + p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t}\big)^{-1} \\ \Big(\lambda^2(g(\mathcal{D}_t) - \mathcal{D}_t) + \mathcal{D}_t(\mathcal{D}_t - g(\mathcal{D}_t))g(\mathcal{D}_t) + p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t}g(\mathcal{D}_t) - \mathcal{D}_t g(p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t})\Big) \\ \big(\lambda^2 + g(\mathcal{D}_t^2) + g(p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t})\big)^{-1} d\lambda. \end{aligned}$$

La dernière intégrale converge non seulement au sens de la topologie forte mais aussi en norme d'opérateur car, si $\epsilon > 0$ est tel que $\mathcal{D}_t^2 + p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t} \geq \epsilon \mathrm{Id}$ on a

$$\begin{aligned} \|(\lambda^2 + \mathcal{D}_t^2 + p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t}\big)^{-1}\| &\leq (\lambda^2 + \epsilon)^{-1} \\ \text{et } \|\mathcal{D}_t(\lambda^2 + \mathcal{D}_t^2 + p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t}\big)^{-1}\| &\leq (\lambda^2 + \epsilon)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{3.1}$$

et $g(\mathcal{D}_t) - \mathcal{D}_t$ est borné uniformément en g lorsque g parcourt un compact de G. Plus précisément $g(\mathcal{D}_t) - \mathcal{D}_t = g(\lambda_\xi + \lambda_\xi^*) - (\lambda_\xi + \lambda_\xi^*)$ et d'après le lemme 5.3 de [Kas88] $g(\lambda_\xi + \lambda_\xi^*) - (\lambda_\xi + \lambda_\xi^*)$ est une section de $\mathrm{End}(\Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X))$ tendant vers 0 à l'infini, uniformément en g lorsque g parcourt un compact de G et par suite $\big(g(\mathcal{D}_t) - \mathcal{D}_t\big)\big(\lambda^2 + g(\mathcal{D}_t^2) + g(p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t})\big)^{-1}$ et $\big(\mathcal{D}_t - g(\mathcal{D}_t)\big)g(\mathcal{D}_t)\big(\lambda^2 + g(\mathcal{D}_t^2) + g(p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t})\big)^{-1}$ sont des opérateurs compacts dépendant continûment de g et de t. Donc $g(F_t) - F_t$ est une intégrale, convergeant pour la norme d'opérateur de façon uniforme en g lorsque g parcourt un compact de G, d'opérateurs compacts dépendant continûment de g. Par conséquent $g \mapsto g(F_t) - F_t$ est une application continue de G dans $\mathcal{K}(L^2(X, \Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X)))$.

Montrons enfin que $(L^2(X, \Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X)), F_t)$ représente γ. Pour cela nous devons vérifier les conditions a), b) et c) de la définition 2.10 de [Kas88], puisque γ est défini comme le produit de $[d]$ et η. Nous savons dejà que

$(L^2(X,\Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X)),F_t)$ appartient à $E_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ et la condition b) est vérifiée puisque F_t est une connexion pour $(d+d^*)(1+\triangle)^{-\frac{1}{2}}$ du fait que F_t est aussi un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0 et possède le même symbole principal. Il reste la condition c). Nous devons montrer que le supercommutateur $[F_t,\lambda_\xi+\lambda_\xi^*]$ est positif modulo les opérateurs compacts. En utilisant la formule donnée dans [Kas88], 4.2, avec $\mathcal{D}_t^2+p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t}$ au lieu de $\mathcal{D}^2+1$ et $c=\lambda_\xi+\lambda_\xi^*$ au lieu de a on obtient

$$[F_t,\lambda_\xi+\lambda_\xi^*]=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\lambda^2+\mathcal{D}_t^2+p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t}\right)^{-1}$$
$$\left(\lambda^2[c,\mathcal{D}_t]+\mathcal{D}_t[c,\mathcal{D}_t]\mathcal{D}_t+p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t}c\mathcal{D}_t+\mathcal{D}_tcp_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t}\right)$$
$$\left(\lambda^2+\mathcal{D}_t^2+p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t}\right)^{-1}d\lambda.$$

L'intégrale converge en norme d'opérateur à cause de (3.1). Comme $t>\|A\|$ et comme $\|\xi\|$ tend vers 1 à l'infini, $[c,\mathcal{D}_t]=A+t\|\xi\|^2$ est positif modulo la multiplication par une fonction à support compact sur X. Or pour toute fonction f sur X à support compact, $f(\lambda^2+\mathcal{D}_t^2+p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t})^{-1}$ et $f\mathcal{D}_t(\lambda^2+\mathcal{D}_t^2+p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_t})^{-1}$ sont compacts. Donc $[F_t,\lambda_\xi+\lambda_\xi^*]$ est une intégrale, convergeant en norme d'opérateur, d'opérateurs positifs modulo les compacts et par conséquent $[F_t,\lambda_\xi+\lambda_\xi^*]$ est positif modulo les compacts.

3.2 Enoncé du résultat

Pour tout $g\in G$ on note $l(g)=\rho(gx_0)=d(x_0,gx_0)$. Il est immédiat que la fonction $l:G\to\mathbb{R}_+$ est continue et vérifie $l(g_1g_2)\leq l(g_1)+l(g_2)$ quels que soient $g_1,g_2\in G$. Par suite pour tout $\kappa\in\mathbb{R}_+$ on définit une norme N_κ sur G en posant $N_\kappa(g)=\exp(\kappa l(g))$.

Proposition 3.2.1 *Pour tout $\kappa\in\mathbb{R}_+^*$, γ et 1 ont même image dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,N_\kappa}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.*

On remarque que la suite de normes $(N_{\frac{1}{i}})_{i\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 1 sur tout compact de G.

3.3 Construction préliminaire

Nous construisons d'abord quelques espaces de Sobolev sur X.

Notons n la dimension de X. Pour tout $x\in X$ on note $\exp_x:T_xX\to X$ l'exponentielle. On identifie $\exp_x^*(\Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}X))$ au fibré trivial sur T_xX de fibre $\Lambda^*(T^*_{\mathbb{C},x}X)$. De plus on choisit un système de coordonnées orthonormé

$(t_1, \ldots, t_n)$ sur T_xX. Pour toute forme ω de classe C^∞ sur X, pour tout $x \in X$ et pour tout entier $s \in \mathbb{N}$ on note

$$\mathrm{Reg}_{s,x}(\omega) = \left(\sum_{l\in\{0,\ldots,s\}, i_1,\ldots,i_l \in\{1,\ldots,n\}} \left\| \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_l} \exp_x^*(\omega) \right\|^2_{\Lambda^*(T^*_{\mathbb{C},x}X)} \right)^{1/2}.$$

Pour tout $g \in G$ et pour tout $x \in X$ on a $\mathrm{Reg}_{s,x}(g^*(\omega)) = \mathrm{Reg}_{s,gx}(\omega)$.

Définition 3.3.1 *Pour tous $p \in [1, +\infty]$, $s \in \mathbb{N}$, $\delta \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \{0, ..., n\}$ on note $W^{p,s}_{\delta,k}$ la complétion de $C^\infty_c(X, \Lambda^k(T^*_{\mathbb{C}}X))$ pour la norme*

$$\|\omega\|_{W^{p,s}_{\delta,k}} = \|x \mapsto e^{-\delta\rho(x)} \mathrm{Reg}_{s,x}(\omega)\|_{L^p(X)}.$$

Nous avons besoin d'un lemme préliminaire.

Lemme 3.3.2 *Soient $p \in [1, +\infty]$, $\delta \in \mathbb{R}_+$, $s_1, s_2 \in \mathbb{N}$, $k_1, k_2 \in \{0, ..., n\}$, et $r, R \in \mathbb{R}^*_+$. Il existe une constante C telle que l'assertion suivante soit vraie : pour tout opérateur $T : C^\infty_c(X, \Lambda^{k_1}T^*_{\mathbb{C}}X) \to C^\infty_c(X, \Lambda^{k_2}T^*_{\mathbb{C}}X)$ tel que pour tout $\omega \in C^\infty_c(X, \Lambda^{k_1}T^*_{\mathbb{C}}X)$ avec $\mathrm{diam}(\mathrm{supp}(\omega)) \leq r$ on ait $\mathrm{diam}(\mathrm{supp}(\omega) \cup \mathrm{supp}(T(\omega))) \leq R$ et $\|T(\omega)\|_{W^{p,s_2}_{\delta,k_2}} \leq \|\omega\|_{W^{p,s_1}_{\delta,k_1}}$, T est continu de norme inférieure ou égale à C de W^{p,s_1}_{δ,k_1} dans W^{p,s_2}_{δ,k_2}. De plus la constante C reste bornée lorsque s_1, s_2 restent fixes, p est quelconque et δ parcourt un compact.*

En effet choisissons une suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans X telle que les boules fermées de rayon 1 et de centre les x_n recouvrent X et que pour p, q distincts on ait $d(x_p, x_q) \geq 1$. Comme X est à courbure sectionnelle négative ou nulle et bornée inférieurement, pour tout $K \in \mathbb{R}_+$ il existe $s \in \mathbb{R}^*_+$ tel que pour tout $x \in X$ et pour tous p, q tels que $d(x, x_p) \leq K$ et $d(x, x_q) \leq K$, on ait $d(\exp_x^{-1}(x_p), \exp_x^{-1}(x_q)) \geq s$ dans T_xX. On en déduit que, pour tout $K \in \mathbb{R}_+$, on a $\sup_{x\in X} \#\{n, d(x, x_n) \leq K\} < +\infty$. On conlut par un argument analogue à la preuve du résultat classique suivant : une matrice infinie telle que la somme des modules des coefficients sur une ligne ou sur une colonne soit bornée indépendamment de la ligne ou de la colonne agit de façon bornée sur l^p pour tout $p \in [1, +\infty]$.

Pour tous $p \in [1, +\infty]$, $s \in \mathbb{N}$, $\delta \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \{0, ..., n\}$ on note $E^{p,s}_{\delta,k} = ((W^{p,s}_{\delta,k})^*, W^{p,s}_{\delta,k})$ la (G, N_δ)-$\mathbb{C}$-paire formée par $W^{p,s}_{\delta,k}$ et son dual topologique.

Dans la suite de ce paragraphe nous supposons que p appartient à $]\frac{(n-1)\sqrt{B}}{\delta}, +\infty[$, où $B \in \mathbb{R}_+$ est tel que la courbure sectionnelle de X soit minorée par $-B$. Cette condition implique en particulier que $e^{-\delta\rho}$ appartient à $L^p(X)$. On pose de plus $E_{-1} = (\mathbb{C}, \mathbb{C})$. On note $d^> : \mathbb{C} \to E^{p,n,>}_{\delta,0}$ l'application qui à $\lambda \in \mathbb{C}$ associe la fonction constante sur X égale à λ et $d^<$ sa transposée. De même pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$ on note $d^> : E^{p,n-k,>}_{\delta,k} \to E^{p,n-(k+1),>}_{\delta,k+1}$ la différentielle extérieure et $d^<$ sa transposée. Ainsi $(E_{-1} \stackrel{d}{\to} E^{p,n}_{\delta,0} \stackrel{d}{\to} \ldots E^{p,0}_{\delta,n})$ est un complexe de morphismes de $\mathbb{C}$-paires, d est exactement équivariant et vérifie $d^2 = 0$.

Construisons une homotopie pour ce complexe. Il existe un opérateur G-équivariant K^{loc} sur $C^\infty_c(X, \Lambda^*(T^*_\mathbb{C} X))$, diminuant le degré des formes de 1 et vérifiant les propriétés suivantes : K^{loc} est associé à un noyau $k(x,y)$ (singulier le long de la diagonale) tel que $k(x,y) = 0$ si $d(x,y) \geq 1$, et pour tout $p \in]1, +\infty[$, $k \in \{1, ..., n\}$, $\delta \in \mathbb{R}_+$ et $s \in \mathbb{N}$, K^{loc} est continu de $W^{p,s}_{\delta,k}$ vers $W^{p,s+1}_{\delta,k-1}$, et $dK^{loc} + K^{loc}d - \mathrm{Id}$ est G-équivariant et continu de $W^{p,s}_{\delta,k}$ vers $W^{p,s+2}_{\delta,k}$, pour $k \in \{0, ..., n\}$ et les normes de ces deux opérateurs restent bornées si p, δ parcourent des compacts et k et s restent fixes. L'existence de K^{loc} résulte de la théorie des opérateurs pseudo-différentiels, du fait que la courbure sectionnelle de X est négative ou nulle et bornée inférieurement, et du lemme 3.3.2.

D'après le lemme de Poincaré le complexe

$$(\mathbb{C} \stackrel{1}{\to} C^\infty(X, \mathbb{C}) \stackrel{d}{\to} \ldots C^\infty(X, \Lambda^n(T^*_\mathbb{C} X)))$$

est exact. Pour construire une homotopie on adopte la formule traditionnelle en moyennant sur le point base. Soit $x \in X$. Pour $f \in C^\infty(X)$, on pose $I_x(f) = f(x)$. Pour tout $t \in [0,1]$ on note $\phi_{x,t} : X \to X$ la contraction de rapport t suivant les géodésiques issues de x, et pour tout $k \geq 1$, pour tout $\omega \in C^\infty(X, \Lambda^k(T^*_\mathbb{C} X))$, on pose

$$I_x(\omega) = \int_0^1 \phi^*_{x,t}\Big(\big(\frac{d\phi_{x,t}}{dt} \circ \phi^{-1}_{x,t}\big) \lrcorner \omega\Big) dt.$$

Enfin on choisit une fonction $\psi : X \to \mathbb{R}_+$ de classe C^∞, à support compact et d'intégrale 1, et on pose $I = \int_X \psi(x) I_x dx$. Il est clair que $Id + dI = \mathrm{Id}$.

Lemme 3.3.3 *Pour tout $s \in \mathbb{N}$, I est continu de $W^{p,s}_{\delta,k+1}$ vers $W^{p,s}_{\delta,k}$ et de $W^{p,s}_{\delta,0}$ vers $\mathbb{C}$.*

On peut supposer $s = 0$. On démontre alors le lemme pour $p = +\infty$ et $\delta > 0$ et pour $p = 1$ et $\delta > (n-1)\sqrt{B}$, et on en déduit le cas général par interpolation, grâce à l'hypothèse que nous avons faite sur p et δ (on peut utiliser l'inégalité de Hölder au lieu d'interpoler).

On voit que $I(dK^{loc} + K^{loc}d - \mathrm{Id})$ est continu de $W^{p,s}_{\delta,k}$ vers $W^{p,s+2}_{\delta,k-1}$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$ et de $W^{p,s}_{\delta,0}$ vers $\mathbb{C}$.

Lorsque $s = n-k$ on pose $K^> = K^{loc} + I(\mathrm{Id} - (dK^{loc} + K^{loc}d))$ et on note $K^<$ le transposé de $K^>$ et $K = (K^<, K^>)$ de sorte que K est un morphisme de $\mathbb{C}$-paires de degré -1 de $E_{-1} \oplus \bigoplus_{k=0}^{n} E_{\delta,k}^{p,n-k}$ dans lui-même. On a $Kd + dK = \mathrm{Id}$ et $g \mapsto g(K) - K$ est une application continue de G dans $\mathcal{K}(E_{-1} \oplus \bigoplus_{k=0}^{n} E_{\delta,k}^{p,n-k})$. En effet $\mathrm{Id} - (dK^{loc} + K^{loc}d)$ est continu de $W_{\delta,k}^{p,n-k}$ dans $W_{\delta,k}^{p,n-k+2}$ et G-équivariant et $g \mapsto g(I) - I$ est une application continue de G dans $\mathcal{K}(E_{\delta,k}^{p,n-k+2}, E_{\delta,k-1}^{p,n-k+1})$.

Posons $L = KdK$. On a $Ld + dL = \mathrm{Id}$, $L^2 = 0$ et $g \mapsto g(L) - L$ est une application continue de G dans $\mathcal{K}(E_{-1} \oplus \bigoplus_{k=0}^{n} E_{\delta,k}^{p,n-k})$.

Proposition 3.3.4 *Le complexe* $(E_{-1} \underset{L}{\overset{d}{\rightleftarrows}} E_{\delta,0}^{p,n} \underset{L}{\overset{d}{\rightleftarrows}} \dots E_{\delta,n}^{p,0})$ *appartient à* $E_{G,N_\delta}^{\mathrm{ban,com}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ *et le complexe replié associé à ce complexe est homotope à* 0 *dans* $E_{G,N_\delta}^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Cela résulte de la proposition 1.4.3.

3.4 Description de l'homotopie

Dans toute la suite on fixe $\kappa > 0$ et on construit une homotopie entre 1 et γ dans $KK_{G,N_\kappa}^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Cette homotopie est réalisée en plusieurs étapes, en partant de 1 et en aboutissant à γ.

3.4.1 Résolution de la représentation triviale par le complexe de de Rham

On fixe $p_\kappa \in]\frac{(n-1)\sqrt{B}}{\kappa}, +\infty[$. Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la proposition 3.3.4.

Proposition 3.4.1 *Le complexe* $(E_{\kappa,0}^{p_\kappa,n} \underset{L}{\overset{d}{\rightleftarrows}} \dots E_{\kappa,n}^{p_\kappa,0})$ *appartient à* $E_{G,N_\kappa}^{\mathrm{ban,com}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ *et le complexe replié associé à ce complexe est homotope à* 1 *dans* $E_{G,N_\kappa}^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

3.4.2 Conjugaison par $\exp(-\alpha\rho')$

Pour tous $p \in]1, +\infty[$, $s \in \mathbb{N}$, $\delta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \{0, ..., n\}$ on note Θ_α l'opérateur de $W_{\delta+\alpha,k}^{p,s}$ vers $W_{\delta,k}^{p,s}$ défini par

$$\Theta_\alpha(\omega)(x) = e^{-\alpha\rho'(x)}\omega(x).$$

Il est immédiat que Θ_α est un isomorphisme (non isométrique) d'espaces de Banach. On note encore Θ_α le morphisme de $\mathbb{C}$-paires de $E_{\delta+\alpha,k}^{p,s}$ dans $E_{\delta,k}^{p,s}$ constitué de Θ_α défini ci-dessus et de l'opérateur qui lui est transposé.

Nous choisissons $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $2\beta > (n-1)\sqrt{B}$ et $\beta > \|A\|$, où $\|A\|$ est comme dans la proposition 3.1.2.

Proposition 3.4.2 *Le complexe* $(E_{\kappa,0}^{p_\kappa,n}[0,1] \underset{(\Theta_{t\beta} L\Theta_{t\beta}^{-1})_{t\in[0,1]}}{\overset{(\Theta_{t\beta} d\Theta_{t\beta}^{-1})_{t\in[0,1]}}{\rightleftarrows}} \ldots E_{\kappa,n}^{p_\kappa,0}[0,1])$ *appartient à* $E_{G,N_\kappa}^{\mathrm{ban,com}}(\mathbb{C},\mathbb{C}[0,1])$.

En effet $\Theta_{t\beta} d\Theta_{t\beta}^{-1} = d + t\beta\lambda_\xi$ et le champ de 1-formes $g(\xi)-\xi$ tend vers 0 en l'infini, uniformément en g lorsque g demeure dans un compact de G. De plus les dérivées de ξ tendent vers 0 à l'infini. Donc $g \mapsto \big(g(\Theta_{t\beta} d\Theta_{t\beta}^{-1}) - \Theta_{t\beta} d\Theta_{t\beta}^{-1}\big)_{t\in[0,1]}$ est une application continue de G dans l'espace des opérateurs compacts de $\mathbb{C}[0,1]$-paires de $E_{\kappa,k}^{p_\kappa,n-k}[0,1]$ vers $E_{\kappa,k+1}^{p_\kappa n-(k+1)}[0,1]$. Pour $x,y\in X$ et $g\in G$, $(\rho'(gx)-\rho'(x)) - (\rho'(gy)-\rho'(y))$ tend vers 0 si x tend vers l'infini et $d(x,y)$ reste borné et g reste dans un compact de G. Il en résulte que $g \mapsto \big(g(\Theta_{t\beta} K^{loc}\Theta_{t\beta}^{-1}) - (\Theta_{t\beta} K^{loc}\Theta_{t\beta}^{-1})\big)_{t\in[0,1]}$ est une application continue de G dans l'espace des opérateurs compacts de $\mathbb{C}[0,1]$-paires de $E_{\kappa,k}^{p_\kappa,n-k}[0,1]$ vers $E_{\kappa,k-1}^{p_\kappa,n-k+1}[0,1]$. De même $g \mapsto \big(g(\Theta_{t\beta} I(\mathrm{Id}-(dK^{loc}+K^{loc}d))\Theta_{t\beta}^{-1}) - (\Theta_{t\beta} I(\mathrm{Id}-(dK^{loc}+K^{loc}d))\Theta_{t\beta}^{-1})\big)_{t\in[0,1]}$ est une application continue de G dans l'espace des opérateurs compacts de $\mathbb{C}[0,1]$-paires de $E_{\kappa,k}^{p_\kappa,n-k}[0,1]$ vers $E_{\kappa,k-1}^{p_\kappa,n-k+1}[0,1]$.

3.4.3 Homotopie entre L^{p_κ} et L^2

Proposition 3.4.3 *Le complexe* $((E_{(1-t)\kappa,0}^{p_\kappa,n})_{t\in[0,1]} \underset{\Theta_\beta L\Theta_\beta^{-1}}{\overset{\Theta_\beta d\Theta_\beta^{-1}}{\rightleftarrows}} \ldots (E_{(1-t)\kappa,n}^{p_\kappa,0})_{t\in[0,1]})$ *appartient à* $E_{G,N_\kappa}^{\mathrm{ban,com}}(\mathbb{C},\mathbb{C}[0,1])$.

Proposition 3.4.4 *Si on note $p(t)$ l'unique fonction affine de $[0,1]$ dans $]1,+\infty[$ telle que $p(0)=p_\kappa$ et $p(1)=2$, le complexe* $((E_{0,0}^{p(t),n})_{t\in[0,1]} \underset{\Theta_\beta L\Theta_\beta^{-1}}{\overset{\Theta_\beta d\Theta_\beta^{-1}}{\rightleftarrows}} \ldots (E_{0,n}^{p(t),0})_{t\in[0,1]})$ *appartient à* $E_{G,N_\kappa}^{\mathrm{ban,com}}(\mathbb{C},\mathbb{C}[0,1])$.

Les propositions 3.4.3 et 3.4.4 se justifient comme la proposition 3.4.2.

Nous avons donc réalisé une homotopie dans $E_{G,N_\kappa}^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ entre 1 et le complexe replié associé au complexe $(E_{0,0}^{2,n} \underset{\Theta_\beta L\Theta_\beta^{-1}}{\overset{\Theta_\beta d\Theta_\beta^{-1}}{\rightleftarrows}} \ldots E_{0,n}^{2,0})$, qui ne fait plus intervenir que des espaces de Hilbert.

3.4.4 Fin de l'homotopie

On a vu que $\Theta_\beta d \Theta_\beta^{-1} = d + \beta\lambda_\xi$.

Proposition 3.4.5 *Le complexe replié associé au complexe* $(E_{0,0}^{2,n} \underset{(d^*+\beta\lambda_\xi^*)(\mathcal{D}_\beta^2+p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_\beta})^{-1}}{\overset{d+\beta\lambda_\xi}{\rightleftarrows}} \dots E_{0,n}^{2,0})$ *appartient à* $E_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ *et est homotope au complexe replié associé au complexe* $(E_{0,0}^{2,n} \underset{\Theta_\beta L \Theta_\beta^{-1}}{\overset{\Theta_\beta d \Theta_\beta^{-1}}{\rightleftarrows}} \dots E_{0,n}^{2,0})$ *dans* $E_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.

L'appartenance du premier complexe à $E_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ se justifie de la même manière que la première assertion de la proposition 3.1.2 et le fait que les deux complexes repliés soient homotopes résulte du lemme 1.4.2.

Pour $s \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \{0,...,n\}$ on note H_k^s la complétion de $C_c^\infty(X, \Lambda^k(T_{\mathbb{C}}^*X))$ pour la norme $\|\omega\| = \|(1+\triangle)^{\frac{s}{2}}\omega\|_{L^2(X)}$. Si s est entier H_k^s est égal à $W_{0,k}^{2,s}$ à équivalence de norme près.

Proposition 3.4.6 *Le complexe replié associé au complexe* $(H_0^n \underset{(d^*+\beta\lambda_\xi^*)(\mathcal{D}_\beta^2+p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_\beta})^{-1}}{\overset{d+\beta\lambda_\xi}{\rightleftarrows}} \dots H_n^0)$ *représente* γ.

En effet ce complexe est homotope à celui décrit dans la proposition 3.1 au moyen de l'élément de $E_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},\mathbb{C}[0,1])$ égal à

$$\left((H_0^{tn})_{t\in[0,1]} \underset{\left((d^*+\beta\lambda_\xi^*)(\mathcal{D}_\beta^2+p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_\beta})^{\frac{-1-t}{2}}\right)_{t\in[0,1]}}{\overset{\left((d+\beta\lambda_\xi)(\mathcal{D}_\beta^2+p_{\mathrm{Ker}\mathcal{D}_\beta})^{\frac{-1+t}{2}}\right)_{t\in[0,1]}}{\rightleftarrows}} \dots (H_n^0)_{t\in[0,1]}\right).$$

Nous sommes parvenu à l'élément γ décrit au paragraphe 3.1.

Chapitre 4

Espaces de Schwartz

Dans tout ce chapitre nous appelons groupe de Lie semi-simple un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est semi-simple et dont le morphisme adjoint a un noyau fini. Soit G un groupe de Lie semi-simple ou un groupe réductif sur un corps p-adique. On note $C_c(G)$ l'algèbre des fonctions continues à support compact de G dans $\mathbb{C}$, avec pour produit la convolution des fonctions. L'espace de Schwartz, introduit par Harish-Chandra, est une bonne algèbre de Fréchet (au sens de l'appendice A de [Bos90]) dans le cas réel et une limite inductive de bonnes algèbres de Fréchet dans le cas p-adique, d'après [Vig90]. De plus l'espace de Schwartz est une sous-algèbre de $C^*_r(G)$ dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe : ce résultat (que nous ne montrons pas ici) est démontré par M.-F. Vignéras dans [Vig90] lorsque G est un groupe p-adique.

Nous avons besoin d'un résultat voisin du résultat ci-dessus. Au début du paragraphe 1.5 nous avons défini une bonne complétion de $C_c(G)$ comme une algèbre de Banach $\mathcal{A}(G)$ contenant $C_c(G)$ comme sous-algèbre dense et telle que, pour tout $f \in C_c(G)$, $\|f\|_{\mathcal{A}(G)}$ ne dépend que de $(g \mapsto |f(g)|)$ et en dépend de manière croissante. Le but de ce chapitre est de définir une variante de l'espace de Schwartz usuel sur G, qui contient l'espace de Schwartz usuel et qui vérifie les propriétés suivantes : c'est une bonne complétion de $C_c(G)$ et une sous-algèbre de $C^*_r(G)$ stable par calcul fonctionnel holomorphe.

Nous introduisons d'autres bonnes complétions de $C_c(G)$ qui sont des variantes des espaces de Schwartz généralisés apparaissant dans le livre [GV88], qui m'a été signalé par M.Duflo. Nous appelons encore ces bonnes complétions espaces de Schwartz généralisés par abus. Nous montrons que l'algèbre $L^1(G)$ et les algèbres L^1 à poids contiennent chacune un espace de Schwartz généralisé comme sous-algèbre dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe. Nous possédons aussi des énoncés à coefficients dans une G-algèbre de Banach arbitraire.

Dans cet article, pour simplifier, et en contradiction avec les autres chapitres, nous appelons algèbre de Banach un espace de Banach B muni d'un produit tel qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ avec $\|ab\|_B \leq C\|a\|_B\|b\|_B$ pour $a, b \in B$. Muni de la norme $C\|.\|_B$, B devient une algèbre de Banach au sens habituel, et le changement de norme ne modifie pas les questions de spectre et de stabilité par calcul fonctionnel holomorphe.

4.1 Enoncé du résultat de base

Rappelons la définition 1.2.1. Une norme sur un groupe topologique G est une fonction continue $N : G \to [1, +\infty[$ telle que $N(gg') \leq N(g)N(g')$ pour tous $g, g' \in G$.

Nous dirons qu'un quadruplet (G, K, d, ϕ) satisfait (HC) si on a

- *(HC1)* G est un groupe localement compact unimodulaire muni d'une mesure de Haar dg et K est un sous-groupe compact de G muni de son unique mesure de Haar dk de masse 1,
- *(HC2)* d est une fonction continue de G dans $[0, +\infty[$, telle que $d(1) = 0$, $d(kgk') = d(g)$ pour tous $k, k' \in K$ et $g \in G$, et $d(gg') \leq d(g) + d(g')$ pour tous $g, g' \in G$, en d'autres termes il existe une norme N_0 sur G telle que $N_0(k) = 1$ pour tout $k \in K$ et $d(g) = \log(N_0(g))$ pour tout $g \in G$,
- *(HC3)* $\phi : G \to]0, 1]$ est continue et vérifie les propriétés suivantes
  - *(HC3a)* $\phi(1) = 1$,
  - *(HC3b)* pour tout $g \in G$, $\phi(g^{-1}) = \phi(g)$,
  - *(HC3c)* pour tout $g \in G$, et pour tous $k, k' \in K$ on a $\phi(kgk') = \phi(g)$,
  - *(HC3d)* pour tous $g, g' \in G$, on a $\int_K \phi(gkg')dk = \phi(g)\phi(g')$,
  - *(HC3e)* pour $t \in \mathbb{R}_+$ assez grand, $\int_G \phi^2(g)\big(1 + d(g)\big)^{-t} dg$ converge.

Nous définissons maintenant un avatar de l'espace de Schwartz sur G.

Définition 4.1.1 *Soit (G, K, d, ϕ) un quadruplet satisfaisant (HC). Soit $t \in \mathbb{R}$. On note $C_c(G)$ l'espace des fonctions continues à support compact de G dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{S}_t(G)$ l'espace de Banach qui est le complété de $C_c(G)$ pour la norme*

$$||f||_{\mathcal{S}_t(G)} = \sup_{g \in G} |f(g)|\phi(g)^{-1}\big(1 + d(g)\big)^t$$

Le résultat est le suivant (voir la proposition 4.8.1).

Proposition 4.1.2 *Soit (G, K, d, ϕ) un quadruplet satisfaisant (HC). Pour $t \in \mathbb{R}_+$ assez grand $\mathcal{S}_t(G)$ est une bonne complétion de $C_c(G)$ et une sous-algèbre de $C_r^*(G)$ dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe. En particulier ces deux algèbres ont la même K-théorie.*

4.2 Cas des groupes de Lie

Nous montrons que pour tout groupe de Lie semi-simple G il existe K, d, ϕ tels que (G, K, d, ϕ) satisfasse (HC).

Le lemme suivant montre qu'il suffit de le démontrer pour G semi-simple linéaire.

Lemme 4.2.1 *Soient G un groupe localement compact, H un sous-groupe fini et distingué de G et $G_0 = G/H$, en notant $\pi : G \to G_0$ la projection. Soient K_0, d_0, ϕ_0 tels que (G_0, K_0, d_0, ϕ_0) satisfasse à (HC). On pose $K = \pi^{-1}(K_0)$, $d = d_0 \circ \pi$ et $\phi = \phi_0 \circ \pi$. Alors (G, K, d, ϕ) vérifie (HC).*

La preuve est immédiate.

Commençons par montrer l'existence de K, d, ϕ tels que (G, K, d, ϕ) vérifie (HC), pour tout groupe de Lie semi-simple linéaire connexe G.

Nous considérons donc un groupe de Lie semi-simple linéaire connexe G, et nous reprenons les notations du chapitre 5 de [Kna86]. On suppose G muni d'une involution de Cartan Θ, et on note $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de l'algèbre de Lie de G induite par la différentielle de Θ en 1. On sait que $K = \{g \in G, \Theta(g) = g\}$ est un sous-groupe compact maximal de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$. Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}$ et $A = \exp(\mathfrak{a})$ comme dans le chapitre 5 de [Kna86], Σ l'ensemble des racines restreintes, Σ^+ un système de racines positives, $\mathfrak{a}^+$ la chambre de Weyl associée, $\overline{\mathfrak{a}^+}$ son adhérence dans $\mathfrak{a}$, $A^+ = \exp(\mathfrak{a}^+)$ et $\overline{A^+} = \exp(\overline{\mathfrak{a}^+})$. On note $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in \Sigma^+} (\dim \mathfrak{g}_\lambda) \lambda$, où $\mathfrak{g}_\lambda$ est l'espace associé à λ. Par ailleurs soit P l'ensemble des poids dominants. On note $C_c(G)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact de G dans $\mathbb{C}$. Nous utiliserons le résultat suivant, qui est la proposition 5.28 de [Kna86] :

Proposition 4.2.2 *Si les normalisations des mesures de Haar sont compatibles entre elles, on a, pour toute fonction $f \in C_c(G)$,*

$$\int_G f(g)dg = \int_{K \times \mathfrak{a}^+ \times K} \Big(\prod_{\lambda \in \Sigma^+} (\sinh \lambda(H))^{\dim \mathfrak{g}_\lambda} \Big) f(k_1 (\exp H) k_2) dk_1 dH dk_2.$$

Tout élément de G peut être écrit sous la forme $k_1(\exp H)k_2$, avec $k_1, k_2 \in K$, et $H \in \overline{\mathfrak{a}^+}$, et l'élément H est déterminé de manière unique dans $\overline{\mathfrak{a}^+}$. Pour tout $\lambda \in P$, et pour $H \in \overline{\mathfrak{a}^+}$ et $g \in K(\exp H)K$ on pose $N_\lambda(g) = \exp(\lambda(H))$.

Proposition 4.2.3 *Soit $\lambda \in P$. Alors l'application $N_\lambda : G \to [1, +\infty[$ est continue et vérifie*

1. $N_\lambda(1) = 1$,
2. *pour $g \in G$ et $k_1, k_2 \in K$, on a $N_\lambda(k_1 g k_2) = N_\lambda(g)$,*
3. *pour $g_1, g_2 \in G$, on a $N_\lambda(g_1 g_2) \leq N_\lambda(g_1) N_\lambda(g_2)$.*

Les deux premières assertions sont évidentes. La preuve de la dernière assertion m'a été expliquée par M.Duflo : elle est claire lorsque λ est le plus haut poids de la restriction à A d'une représentation irréductible π de dimension finie de G, car alors $N_\lambda(g)$ est la norme de $\pi(g)$, si on munit l'espace de la representation d'une norme hermitienne telle que $\pi(\Theta(g))$ soit l'inverse de l'adjoint de $\pi(g)$ pour tout $g \in G$. Une telle norme existe, et est unique à une constante près, car on peut associer à π une représentation irréductible de la forme compacte de G, et celle-ci admet une unique structure hermitienne invariante, à constante près. Le cas général découle de la remarque suivante : tout poids dominant est combinaison à coefficients positifs ou nuls des plus hauts poids des restrictions à A d'un nombre fini de représentations irréductibles de dimension finie de G: en effet la forme compacte de G admet une sous-algèbre de Cartan contenant $i\mathfrak{a}$ et les éléments de Σ sont les restrictions à $i\mathfrak{a}$ des racines de cette sous-algèbre de Cartan, à condition qu'elles soient non nulles.

Pour tout $g \in G$, notons $d(g) = \log(N_\rho(g))$: on peut considérer $d(g)$ comme la distance de gK à l'origine dans G/K. Il résulte de la proposition ci-dessus que d est une application continue de G dans $\mathbb{R}_+$ nulle sur K et que pour tous $g, g' \in G, d(gg') \leq d(g) + d(g')$.

Appelons ϕ la fonction sphérique élémentaire sur G, encore appelée fonction de Harish-Chandra, qui est notée φ_0^G dans le chapitre 7 de [Kna86]. Nous rappelons les propriétés de cette fonction.

Proposition 4.2.4 *L'application ϕ est continue de G dans $]0, 1]$ et vérifie*

1. $\phi(1) = 1$,
2. $\forall g \in G$, $\forall k, k' \in K$, $\phi(kgk') = \phi(g)$,
3. $\forall g, g' \in G$, $\int_K \phi(gkg')dk = \phi(g)\phi(g')$,

4. *$\forall g \in G$, $\phi(g^{-1}) = \phi(g)$,*

5. *il existe $s \in \mathbb{R}_+$ et une constante $C \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $g \in G$, on ait $\phi(g) \leq C N_\rho(g)^{-1}\big(1 + d(g)\big)^s$,*

6. *pour tout $g \in G$, on a $\phi(g) \geq N_\rho(g)^{-1}$.*

Les 3 premières assertions sont (7.42),(7.43) et (7.45) de [Kna86] et l'assertion *4* résulte de la définition de ϕ comme coefficient de matrice en (7.40) et (7.41) de [Kna86]. D'après l'assertion *2*, il suffit de montrer les deux dernières pour $g \in exp(\overline{\mathfrak{a}^+})$. L'avant-dernière est 7.15.c dans [Kna86], et la dernière découle de 7.15.b et du fait que $\varphi_\rho^G = 1$ dans les notations de Knapp.

Il résulte des propositions 4.2.2 et 4.2.4 que pour $t \in \mathbb{R}_+$ assez grand on a

$$\Big(g \mapsto \phi(g)\big(1 + d(g)\big)^{-t}\Big) \in L^2(G).$$

Par suite (G, K, d, ϕ) vérifie (HC).

En général, lorsque G est un groupe de Lie semi-simple linéaire, si on note Θ l'involution de Cartan, $K = \{g \in G, \Theta(g) = g\}$ et G_0 la composante connexe de l'identité dans G, et $K_0 = G_0 \cap K$, on sait par ce qui précède que l'on peut construire d_0 et ϕ_0 tels que (G_0, K_0, d_0, ϕ_0) vérifie (HC). On étend de façon unique d_0 et ϕ_0 en d et ϕ par K-biinvariance et alors (G, K, d, ϕ) vérifie (HC). Ce dernier point m'a été suggéré par Michel Duflo.

4.3 Cas des groupes p-adiques

Je remercie L.Clozel qui m'a beaucoup aidé pour la redaction de ce paragraphe.

Soit G un groupe réductif sur un corps p-adique F ([Sil79], 0.1 et 0.4). Soit (P_0, A_0) une paire parabolique minimale et $P_0 = M_0 N_0$ la décomposition de Levi de P_0 déterminée par A_0 ([Sil79], 0.3). Une telle paire existe toujours et A_0 est un tore déployé maximal. Soit enfin K un sous-groupe compact maximal de G bon pour A_0 ([Sil79], 0.6). Bruhat et Tits ont montré qu'un tel sous-groupe K existe toujours. Il existe un plongement $G \hookrightarrow GL(n, F)$ tel que l'image de K soit incluse dans $GL(n, \mathcal{O})$, où $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers de F et on note $\sigma(x) = \log_q \|x\|$ comme dans [Sil79], 4.1. Enfin on note Ξ la fonction sphérique définie dans [Sil79], 4.2 et associée à (P_0, A_0) et K. D'après les remarques au début de 4.2 et le lemme 4.2.5 de [Sil79], le quadruplet (G, K, σ, Ξ) satisfait (HC).

Soit $\mathfrak{a}_0$ l'algèbre de Lie réelle associée à A_0 et $\mathfrak{a}_0^+$ une chambre de Weyl fermée ([Sil79], 0.5). Par définition $\mathfrak{a}_0 = \mathrm{Hom}(X(M_0), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$, d'où un homomorphisme $H_{M_0} : M_0 \to \mathfrak{a}_0$. On définit ${}^0M_0$ comme le noyau de cet homomorphisme et on en déduit un plongement, encore noté H_{M_0} de $M_0/{}^0M_0$ dont l'image est un réseau de $\mathfrak{a}_0$ ([Sil79], 0.5). Comme K est bon pour A_0, d'après [Sil79], 0.6, on a la décomposition de Cartan $G = K\big(M_0^+/{}^0M_0\big)K$ où $M_0^+ = H_{M_0}^{-1}(\mathfrak{a}_0^+)$ et pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}_0^+$ on définit une fonction $N_\lambda : G \to [1, +\infty[$ en posant $N_\lambda(kmk') = q^{\langle \lambda, H_{M_0}(m)\rangle}$ pour $k, k' \in K$ et $m \in M_0^+$. D'après l'assertion (iii) de la proposition 4.4.4 de [BT72] (cette référence m'a été indiquée par L.Clozel), si l'on suppose de plus que K contient $\hat{B}$ dans les notations de [BT72], ce que je crois être possible, pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}_0^+$, N_λ est une norme sur G. D'après le théorème 4.2.1 de [Sil79] il existe $r_0 \in \mathbb{N}$ et $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $c_1 \leq \delta_{P_0}(m)^{\frac{1}{2}}\Xi(m) \leq c_2(1+\sigma(m))^{r_0}$ pour tout $m \in M_0^+$. Or d'après le lemme 1.2.1.1 de [Sil79] on a $\delta_{P_0}(m) = q^{2\langle \rho, H_{M_0}(m)\rangle}$ où ρ est la demi-somme des éléments de $\Sigma(P_0, A_0)$, c'est-à-dire des racines positives de $\Sigma(G, A_0)$, comptées avec multiplicité. D'où $c_1 N_\rho(g)^{-1} \leq \Xi(g) \leq c_2(1+\sigma(g))^{r_0} N_\rho(g)^{-1}$ pour tout $g \in G$, en utilisant la décomposition de Cartan.

4.4 Espaces de Schwartz généralisés

Dans la suite (G, K, d, ϕ) est un quadruplet satisfaisant à (HC) et A désigne une algèbre de Banach sur laquelle G agit de façon continue par automorphismes préservant la norme.

4.4.1 Définition

Nous allons construire des espaces qui généralisent l'espace de Schwartz introduit par Harish-Chandra. Ce dernier est égal à $\cap_{p\in\mathbb{R}} \mathcal{S}_p^0(G, \mathbb{C})$ dans la définition suivante, si on oublie les conditions de régularité. Il est essentiel pour nous de construire des algèbres de Banach et non des algèbres de Fréchet.

Définition 4.4.1 *Soient N une norme sur G et $t \in \mathbb{R}$. On définit $\mathcal{S}_t^N(G, A)$ comme la complétion de l'espace $C_c(G, A)$ des fonctions continues à support compact de G dans A, pour la norme*

$$||f||_{\mathcal{S}_t^N(G,A)} = \sup_{g\in G} ||f(g)||_A \phi(g)^{-1} N(g)\big(1 + d(g)\big)^t.$$

Lorsque G est un groupe de Lie semi-simple linéaire connexe, λ un multiple de ρ, $N = N_\lambda$ et $A = \mathbb{C}$, des espaces analogues aux espaces ci-dessus apparaissent dans [GV88]. Le lemme suivant énonce deux propriétés évidentes vérifiées par ces normes.

Lemme 4.4.2 *Soient N une norme sur G et $s, t \in \mathbb{R}$ tels que $t \geq s$. Alors $\mathcal{S}_t^N(G, A) \subset \mathcal{S}_s^N(G, A)$ et pour tout $f \in \mathcal{S}_t^N(G, A)$ on a $||f||_{\mathcal{S}_t^N(G,A)} \geq$*

$||f||_{\mathcal{S}_s^N(G,A)}$. *Soit de plus* $\theta \in [0,1]$ *et* $r = \theta s + (1-\theta)t$. *Alors pour tout* $f \in \mathcal{S}_t^N(G,A)$ *on a*

$$||f||_{\mathcal{S}_r^N(G,A)} \leq ||f||^{\theta}_{\mathcal{S}_s^N(G,A)} ||f||^{1-\theta}_{\mathcal{S}_t^N(G,A)}.$$

4.4.2 Structure d'algèbre de Banach

On munit $C_c(G,A)$ du produit suivant : lorsque $f_1, f_2 \in C_c(G,A)$, on pose $(f_1 * f_2)(g) = \int_G f_1(g_1)(g_1(f_2(g_1^{-1}g)))dg_1$. Intuitivement on peut noter les éléments de $C_c(G,A)$ sous la forme $f = \int_G f(g)e_g dg$.

Proposition 4.4.3 *Soit* $t \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $\int_G \phi^2(g)\big(1+d(g)\big)^{-t}dg$ *converge. Alors pour toute norme* N *sur* G *le produit ci-dessus munit* $\mathcal{S}_t^N(G,A)$ *d'une structure d'algèbre de Banach et en notant* $C = \int_G \phi^2(g)\big(1+d(g)\big)^{-t}dg$ *on a* $||f_1 * f_2||_{\mathcal{S}_t^N(G,A)} \leq 2C||f_1||_{\mathcal{S}_t^N(G,A)}||f_2||_{\mathcal{S}_t^N(G,A)}$ *pour tous* $f_1, f_2 \in C_c(G,A)$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
||(f_1 * f_2)(g)||_A &\leq \int_G ||f_1(g_1)||_A ||f_2(g_1^{-1}g)||_A dg_1 \\
\leq ||f_1||_{\mathcal{S}_t^N(G,A)}||f_2||_{\mathcal{S}_t^N(G,A)} &\int_G \phi(g_1)N(g_1)^{-1}\big(1+d(g_1)\big)^{-t} \\
&\qquad \phi(g_1^{-1}g)N(g_1^{-1}g)^{-1}\big(1+d(g_1^{-1}g)\big)^{-t}dg_1,
\end{aligned}$$

à supposer que la dernière intégrale converge. Or $N(g_1)^{-1}N(g_1^{-1}g)^{-1} \leq N(g)^{-1}$. Donc il nous suffit de montrer que dans l'inégalité suivante le membre de gauche converge et que l'inégalité a lieu :

$$\int_G \phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}\phi(g_1^{-1}g)\big(1+d(g_1^{-1}g)\big)^{-t}dg_1 \leq 2C\phi(g)\big(1+d(g)\big)^{-t} \quad (4.1)$$

Si $d(g_1) \leq d(g)/2$ on a $d(g_1^{-1}g) \geq d(g)/2$. D'où

$$\begin{aligned}
\int_{g_1 \in G, d(g_1) \leq d(g)/2} &\phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}\phi(g_1^{-1}g)\big(1+d(g_1^{-1}g)\big)^{-t}dg_1 \\
&\leq 2^t\big(1+d(g)\big)^{-t}\int_G \phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}\phi(g_1^{-1}g)dg_1.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_G \phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}\phi(g_1^{-1}g)dg_1 &= \int_{G\times K} \phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}\phi(g_1^{-1}kg)dg_1 dk \\
&= \left(\int_G \phi^2(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}dg_1\right)\phi(g) = C\phi(g) \quad (4.2)
\end{aligned}$$

Il reste à estimer la deuxième partie de l'intégrale :

$$\int_{g_1 \in G, d(g_1) \geq d(g)/2} \phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}\phi(g_1^{-1}g)\big(1+d(g_1^{-1}g)\big)^{-t}dg_1$$
$$\leq 2^t\big(1+d(g)\big)^{-t}\int_G \phi(g_1)\big(1+d(g_1^{-1}g)\big)^{-t}\phi(g_1^{-1}g)dg_1.$$

Le changement de variable $g_2 = g_1^{-1}g$ montre que cette dernière intégrale est égale à

$$\int_G \phi(gg_2^{-1})\big(1+d(g_2)\big)^{-t}\phi(g_2)dg_2 = \int_{G\times K} \phi(gkg_2^{-1})\big(1+d(g_2)\big)^{-t}\phi(g_2)dg_2dk$$
$$= \left(\int_G \phi^2(g_2)\big(1+d(g_2)\big)^{-t}dg_2\right)\phi(g) = C\phi(g).$$

4.4.3 Relations de plénitude

Rappelons la définition de la plénitude.

Définition 4.4.4 *Soient A et B deux algèbres de Banach et $\theta : A \to B$ un morphisme d'algèbres de Banach. On dit que θ est d'image dense si $\theta(A)$ est dense dans B et que θ est plein si pour tout $x \in A$ le rayon spectral de x dans A est égal au rayon spectral de $\theta(x)$ dans B. Lorsque θ est injectif, on dit que A est une sous-algèbre dense et pleine de B si θ est d'image dense et plein.*

L'intérêt de cette notion est qu'un morphisme d'image dense et plein induit un isomorphisme en K-théorie. Cela résulte du théorème A.2.1 de [Bos90] car on vérifie aisément que pour tout morphisme $\theta : A \to B$ d'image dense et plein on a $\tilde{\theta}^{-1}(\tilde{B}^{-1}) = \tilde{A}^{-1}$, c'est-à-dire que, pour tout $x \in A$, le spectre de x dans A est égal au spectre de $\theta(x)$ dans B.

Proposition 4.4.5 *Soient $s \in \mathbb{R}_+$ tel que $\int_G \phi^2(g)\big(1+d(g)\big)^{-s}dg$ converge et $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $t \geq s$. Soit N une norme sur G. Alors $\mathcal{S}_t^N(G,A)$ est une sous-algèbre dense et pleine de $\mathcal{S}_s^N(G,A)$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{S}_t^N(G,A)$. Nous devons montrer

$$\lim_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}_t^N(G,A)} = \lim_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}_s^N(G,A)}.$$

On a

$$||f^m(g)||_A \leq \int_{g_1\ldots g_m=g} ||f(g_1)||_A \ldots ||f(g_{m-1})||_A ||f(g_m)||_A dg_1 \ldots dg_{m-1}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \int_{g_1\ldots g_m=g, d(g_i)\geq d(g)/m} ||f(g_1)||_A \ldots ||f(g_{m-1})||_A ||f(g_m)||_A dg_1 \ldots dg_{m-1}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} ||f||^{m-1}_{\mathcal{S}^N_s(G,A)} ||f||_{\mathcal{S}^N_t(G,A)} \int_{g_1\ldots g_m=g, d(g_i)\geq d(g)/m} \frac{\phi(g_1)}{N(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^s} \cdots$$

$$\frac{\phi(g_i)}{N(g_i)\big(1+d(g_i)\big)^t} \cdots \frac{\phi(g_m)}{N(g_m)\big(1+d(g_m)\big)^s} dg_1 \ldots dg_{m-1}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} ||f||^{m-1}_{\mathcal{S}^N_s(G,A)} ||f||_{\mathcal{S}^N_t(G,A)} \frac{m^{t-s}}{\big(1+d(g)\big)^{t-s}} \int_{g_1\ldots g_m=g} \frac{\phi(g_1)}{N(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^s} \cdots$$

$$\frac{\phi(g_i)}{N(g_i)\big(1+d(g_i)\big)^s} \cdots \frac{\phi(g_m)}{N(g_m)\big(1+d(g_m)\big)^s} dg_1 \ldots dg_{m-1}$$

$$\leq ||f||^{m-1}_{\mathcal{S}^N_s(G,A)} ||f||_{\mathcal{S}^N_t(G,A)} \frac{m^{t-s+1}}{\big(1+d(g)\big)^{t-s}} (2C)^{m-1} \frac{\phi(g)}{N(g)\big(1+d(g)\big)^s},$$

où $C = \int_G \phi^2(g)\big(1+d(g)\big)^{-t} dg$ d'après la proposition 4.4.3 et l'hypothèse faite sur s. D'où

$$||f^m||_{\mathcal{S}^N_t(G,A)} \leq m^{t-s+1}(2C)^{m-1} ||f||^{m-1}_{\mathcal{S}^N_s(G,A)} ||f||_{\mathcal{S}^N_t(G,A)}.$$

En faisant tendre m vers l'infini on obtient l'inégalité

$$\lim_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}^N_t(G,A)} \leq 2C||f||_{\mathcal{S}^N_s(G,A)}.$$

En remplaçant f par f^n puis en faisant tendre n vers l'infini on en déduit l'inégalité

$$\lim_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}^N_t(G,A)} \leq \lim_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}^N_s(G,A)}$$

et l'inégalité dans l'autre sens est immédiate.

4.4.4 Un raffinement

Proposition 4.4.6 *Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\int_G \phi^2(g)(1+d(g))^{-t_0} dg$ converge. Soient $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $t > t_0$, $s \in \mathbb{R}$ tel que $s \leq t$, et N une norme sur G. Alors*

pour tout $f \in \mathcal{S}^N_t(G,A)$, $\lim_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}^N_s(G,A)}$ existe et

$$\lim_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}^N_s(G,A)} = \lim_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}^N_t(G,A)}.$$

On remarque que $\mathcal{S}_s^N(G,A)$ n'est pas en général une algèbre.

Démonstration. Si $s=t$ il n'y a rien à dire. Sinon soit r tel que $t>r>\max(t_0,s)$. Ecrivons $r=\theta s+(1-\theta)t$, avec $\theta\in]0,1[$. On a, pour tout $m\in\mathbb{N}^*$,

$$||f^m||_{\mathcal{S}_r^N(G,A)} \leq ||f^m||^{\theta}_{\mathcal{S}_s^N(G,A)}||f^m||^{1-\theta}_{\mathcal{S}_t^N(G,A)}.$$

D'où, si $||f^m||_{\mathcal{S}_t^N(G,A)}$ est non nul,

$$||f^m||_{\mathcal{S}_s^N(G,A)} \geq ||f^m||^{1/\theta}_{\mathcal{S}_r^N(G,A)}||f^m||^{1-1/\theta}_{\mathcal{S}_t^N(G,A)}. \tag{4.3}$$

Distinguons deux cas : si $\lim_{m\to\infty}||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}_t^N(G,A)}=0$, comme $||f^m||_{\mathcal{S}_s^N(G,A)}\leq ||f^m||_{\mathcal{S}_t^N(G,A)}$, la limite $\lim_{m\to\infty}||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}_s^N(G,A)}$ existe et vaut 0. Si $\lim_{m\to\infty}||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}_t^N(G,A)}$ est non nulle, elle est égale à $\lim_{m\to\infty}||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}_r^N(G,A)}$ d'après la proposition 4.4.5, et donc $\lim_{m\to\infty}||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}_s^N(G,A)}$ existe et lui est égale d'après (4.3) et grâce à l'inégalité $||f^m||_{\mathcal{S}_s^N(G,A)}\leq ||f^m||_{\mathcal{S}_t^N(G,A)}$.

4.5 Action des espaces de Schwartz sur des espaces L^p

Dans toute cette section nous considérons un quadruplet (G,K,d,ϕ) satisfaisant (HC) et une algèbre de Banach A sur laquelle G agit de façon continue par automorphismes préservant la norme.

Définition 4.5.1 *Soient N une norme sur G et $p\in[1,+\infty]$. On note $C_c(G,A)$ l'espace des fonctions continues à support compact de G dans A et $L^{p,N}_{\mathrm{norm}}(G,A)$ la complétion de $C_c(G,A)$ pour la norme*

$$\|f\|_{L^{p,N}_{\mathrm{norm}}(G,A)} = \left(\int_G \Big(\|f(g)\|_A\phi(g)^{\frac{2}{p}-1}N(g)\Big)^p dg\right)^{1/p} \textit{ si } p<+\infty$$

$$\textit{et } \|f\|_{L^{\infty,N}_{\mathrm{norm}}(G,A)} = \sup_{g\in G}\|f(g)\|_A\phi(g)^{-1}N(g) \textit{ si } p=+\infty.$$

Lorsque $N=1$, ces espaces sont des espaces L^p normalisés par ϕ de sorte que l'on impose aux fonctions K-biinvariantes en gros la même décroissance à l'infini, à savoir celle de ϕ, pour toute valeur de p.

Proposition 4.5.2 *Si $t\in\mathbb{R}_+$ est assez grand pour que $\int\phi(g)^2\big(1+d(g)\big)^{-t}dg$ converge, et en notant C la valeur de cette intégrale, pour toute norme N sur G, pour tout $p\in[1,+\infty]$ et pour tous $f_1,f_2\in C_c(G,A)$, on a*

$$\|f_1*f_2\|_{L^{p,N}_{\mathrm{norm}}(G,A)} \leq C\|f_1\|_{\mathcal{S}_t^N(G,A)}\|f_2\|_{L^{p,N}_{\mathrm{norm}}(G,A)},$$

et donc on a une inclusion

$$\mathcal{S}_t^N(G,A) * L^{p,N}_{\mathrm{norm}}(G,A) \subset L^{p,N}_{\mathrm{norm}}(G,A).$$

Démonstration de la proposition. L'idée de cette preuve m'a été suggérée par Kroum Tzanev. Soit $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $\int \phi(g)^2\big(1+d(g)\big)^{-t}dg$ converge. On pose $C = \int \phi(g)^2\big(1+d(g)\big)^{-t}dg$.

On doit montrer que, pour tout $p \in [1,+\infty]$, pour toute norme N sur G et pour toute fonction $h \in C_c(G,\mathbb{R}_+)$, on a

$$\left\| g \mapsto N(g)\phi(g)^{\frac{2}{p}-1} \int_G \phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t} N(g_1)^{-1}\phi(g_1^{-1}g)^{-\frac{2}{p}+1} N(g_1^{-1}g)^{-1}h(g_1^{-1}g)dg_1 \right\|_{L^p(G,\mathbb{R}_+)} \leq C\|h\|_{L^p(G,\mathbb{R}_+)}$$

en notant $\|.\|_{L^p(G,\mathbb{R}_+)}$ la norme L^p usuelle, non normalisée.

Comme $N(g) \leq N(g_1)N(g_1^{-1}g)$, il suffit de montrer que pour tout $p \in [1,+\infty]$ et pour toute fonction $h \in C_c(G,\mathbb{R}_+)$,

$$\left\| g \mapsto \phi(g)^{\frac{2}{p}-1} \int_G \phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}\phi(g_1^{-1}g)^{-\frac{2}{p}+1}h(g_1^{-1}g)dg_1 \right\|_{L^p(G,\mathbb{R}_+)} \leq C\|h\|_{L^p(G,\mathbb{R}_+)}.$$

Pour rédiger la preuve nous supposons $p \in]1,+\infty[$, mais la preuve s'étend aux cas $p=1$ et $p=+\infty$. Introduisons $q \in]1,+\infty[$ tel que $1/p+1/q=1$. D'après l'inégalité de Hölder, comme $-\frac{2}{p}+1 = \frac{1}{q}-\frac{1}{p}$, on a

$$\begin{aligned}
&\int_G \phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}\phi(g_1^{-1}g)^{-\frac{2}{p}+1}h(g_1^{-1}g)dg_1 \\
&= \int_G \Big(\phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}\phi(g_1^{-1}g)^{-1}h(g_1^{-1}g)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}\phi(g_1^{-1}g)\Big)^{\frac{1}{q}}dg_1 \\
&\leq \Big(\int_G \phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}\phi(g_1^{-1}g)^{-1}h(g_1^{-1}g)^p dg_1\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_G \phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}\phi(g_1^{-1}g)dg_1\Big)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

D'après (4.2),

$$\int_G \phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}\phi(g_1^{-1}g)dg_1 = C\phi(g). \tag{4.5}$$

D'après (4.4) et (4.5), comme $p(\frac{2}{p}-1) = 1-\frac{p}{q}$,

$$\left\| g \mapsto \phi(g)^{\frac{2}{p}-1} \int_G \phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}\phi(g_1^{-1}g)^{-\frac{2}{p}+1} h(g_1^{-1}g)dg_1 \right\|^p_{L^p(G,\mathbb{R}_+)}$$

$$\leq \int_{G\times G} \phi(g)^{1-\frac{p}{q}}\phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}\phi(g_1^{-1}g)^{-1}h(g_1^{-1}g)^p(C\phi(g))^{\frac{p}{q}}dg_1dg$$

$$= \int_{G\times G} \phi(g)\phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}\phi(g_1^{-1}g)^{-1}h(g_1^{-1}g)^pC^{\frac{p}{q}}dg_1dg$$

$$= \int_{G\times G} \phi(g_1g_2)\phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}\phi(g_2)^{-1}h(g_2)^pC^{\frac{p}{q}}dg_1dg_2$$

en faisant le changement de variables $g = g_1g_2$ et enfin

$$\int_{G\times G} \phi(g_1g_2)\phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}\phi(g_2)^{-1}h(g_2)^pC^{\frac{p}{q}}dg_1dg_2$$
$$= C^{1+\frac{p}{q}}\int_G h(g_2)^p dg_2,$$

car, par un calcul analogue à (4.5), on a

$$\int_G \phi(g_1g_2)\phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}dg_1 = C\phi(g_2).$$

Ceci clôt la démonstration de la proposition car $(C^{1+\frac{p}{q}})^{\frac{1}{p}} = C$.

4.6 Questions de plénitude liées à l'action sur les espaces L^p

Lorsque E est un espace de Banach, notons $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes continus de E, munie de la norme d'opérateur. Sous les hypothèses de la proposition 4.5.2, il existe un morphisme continu d'algèbres de Banach $\iota : \mathcal{S}_t^N(G,A) \to \mathcal{L}(L^{p,N}_{\mathrm{norm}}(G,A))$.

Proposition 4.6.1 *Si $t\in\mathbb{R}_+^*$ est assez grand pour que l'intégrale $\int_G \phi(g)^2\big(1+d(g)\big)^{-\frac{t}{2}}dg$ converge, pour toute norme N sur G et pour tout $p\in[1,+\infty]$ le morphisme d'algèbres de Banach*

$$\iota : \mathcal{S}_t^N(G,A) \to \mathcal{L}(L^{p,N}_{\mathrm{norm}}(G,A))$$

défini à la proposition 4.5.2 est plein.

Nous commençons par un lemme.

Lemme 4.6.2 *Si $t \in \mathbb{R}_+$ est assez grand pour que l'intégrale $\int_G \phi(g)^2 \big(1 + d(g)\big)^{-\frac{t}{2}} dg$ converge, pour toute norme N sur G et tout $p \in [1, +\infty]$, on a une inclusion continue*

$$\mathcal{S}_t^N(G, A) * L^{p,N}_{\mathrm{norm}}(G, A) * \mathcal{S}_t^N(G, A) \subset \mathcal{S}_{-t}^N(G, A),$$

ou, plus précisément, en notant C la valeur de l'intégrale $\int_G \phi(g)^2 \big(1 + d(g)\big)^{-\frac{t}{2}} dg$, pour tous $f_1, f_2, f_3 \in C_c(G, A)$ on a

$$\|f_1 * f_2 * f_3\|_{\mathcal{S}_{-t}^N(G,A)} \leq C^{2-\frac{1}{p}} \|f_1\|_{\mathcal{S}_t^N(G,A)} \|f_2\|_{L^{p,N}_{\mathrm{norm}}(G,A)} \|f_3\|_{\mathcal{S}_t^N(G,A)}.$$

Démonstration du lemme. Soit $t \in \mathbb{R}_+$ tel que l'intégrale $\int_G \phi(g)^2 \big(1 + d(g)\big)^{-\frac{t}{2}} dg$ converge. Posons $C = \int_G \phi(g)^2 \big(1 + d(g)\big)^{-\frac{t}{2}} dg$. Nous allons montrer que pour toute norme N sur G, pour tout $p \in [1, +\infty]$, pour tout $h \in C_c(G, \mathbb{R}_+)$ et pour tout $g \in G$

$$\begin{aligned}\int_{G\times G} \Big(\phi(g_1)\big(1 + d(g_1)\big)^{-t} N(g_1)^{-1}\Big) \Big(h(g_2)\phi(g_2)^{-\frac{2}{p}+1} N(g_2)^{-1}\Big) \\ \Big(\phi(g_2^{-1}g_1^{-1}g)\big(1 + d(g_2^{-1}g_1^{-1}g)\big)^{-t} N(g_2^{-1}g_1^{-1}g)^{-1}\Big) dg_1 dg_2 \\ \leq C^{2-\frac{1}{p}} \|h\|_{L^p(G,\mathbb{R}_+)} \phi(g)\big(1 + d(g)\big)^t N(g)^{-1}.\end{aligned}$$

Comme $N(g) \leq N(g_1)N(g_2)N(g_2^{-1}g_1^{-1}g)$, il suffit de montrer que pour tout $p \in [1, +\infty]$, pour tout $h \in C_c(G, \mathbb{R}_+)$ et pour tout $g \in G$

$$\begin{aligned}\int_{G\times G} \Big(\phi(g_1)\big(1 + d(g_1)\big)^{-t}\Big) \Big(h(g_2)\phi(g_2)^{-\frac{2}{p}+1}\Big) \\ \Big(\phi(g_2^{-1}g_1^{-1}g)\big(1 + d(g_2^{-1}g_1^{-1}g)\big)^{-t}\Big) dg_1 dg_2 \leq C^{2-\frac{1}{p}} \|h\|_{L^p(G,\mathbb{R}_+)} \phi(g)\big(1 + d(g)\big)^t.\end{aligned}$$

Pour rédiger la preuve nous supposons $p \in]1, +\infty[$, mais la preuve s'étend aux cas $p = 1$ et $p = +\infty$. Introduisons $q \in]1, +\infty[$ tel que $1/p + 1/q = 1$. Par dualité entre $L^p(G, \mathbb{R}_+)$ et $L^q(G, \mathbb{R}_+)$ cela revient à montrer que pour tout $p \in [1, +\infty]$ et pour tout $g \in G$

$$\begin{aligned}\Big\| g_2 \mapsto \int_G \Big(\phi(g_1)\big(1 + d(g_1)\big)^{-t}\Big) \Big(\phi(g_2)^{-\frac{2}{p}+1}\Big) \\ \Big(\phi(g_2^{-1}g_1^{-1}g)\big(1 + d(g_2^{-1}g_1^{-1}g)\big)^{-t}\Big) dg_1 \Big\|_{L^q(G,\mathbb{R}_+)} \leq C^{2-\frac{1}{p}} \phi(g)\big(1 + d(g)\big)^t.\end{aligned}$$

Or comme $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}\big(1+d(g_2^{-1}g_1^{-1}g)\big)^{-t} &\leq \big(1+d(g_2^{-1}g_1^{-1}g)\big)^{-\frac{t}{2}}\\ &\leq \big(1+d(g_2)\big)^{-\frac{t}{2}}\big(1+d(g_1)\big)^{\frac{t}{2}}\big(1+d(g)\big)^{\frac{t}{2}}.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_G \Big(\phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-t}\Big)\Big(\phi(g_2)^{-\frac{2}{p}+1}\Big)\Big(\phi(g_2^{-1}g_1^{-1}g)\big(1+d(g_2^{-1}g_1^{-1}g)\big)^{-t}\Big)dg_1&\\ \leq \big(1+d(g)\big)^{\frac{t}{2}}\phi(g_2)^{-\frac{2}{p}+1}\big(1+d(g_2)\big)^{-\frac{t}{2}}&\\ \int_G \Big(\phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-\frac{t}{2}}\Big)\Big(\phi(g_2^{-1}g_1^{-1}g)\Big)dg_1&\end{aligned} \tag{4.6}$$

Mais

$$\begin{aligned}&\int_G \Big(\phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-\frac{t}{2}}\Big)\Big(\phi(g_2^{-1}g_1^{-1}g)\Big)dg_1\\ &=\int_{G\times K\times K}\Big(\phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-\frac{t}{2}}\Big)\Big(\phi(g_2^{-1}kg_1^{-1}k'g)\Big)dg_1dkdk'\\ &=\Big(\int_G \phi(g_1)^2\big(1+d(g_1)\big)^{-\frac{t}{2}}dg_1\Big)\phi(g_2)\phi(g)=C\phi(g_2)\phi(g).\end{aligned} \tag{4.7}$$

En reportant (4.7) dans (4.6) il vient

$$\begin{aligned}\big(1+d(g)\big)^{\frac{t}{2}}\phi(g_2)^{-\frac{2}{p}+1}\big(1+d(g_2)\big)^{-\frac{t}{2}}\int_G \Big(\phi(g_1)\big(1+d(g_1)\big)^{-\frac{t}{2}}\Big)\Big(\phi(g_2^{-1}g_1^{-1}g)\Big)dg_1&\\ \leq C\Big(\phi(g)\big(1+d(g)\big)^{\frac{t}{2}}\Big)\Big(\phi(g_2)^{-\frac{2}{p}+2}\big(1+d(g_2)\big)^{-\frac{t}{2}}\Big),&\end{aligned}$$

et comme $-\frac{2}{p}+2=\frac{2}{q}$, on a $\Big\|g_2\mapsto \phi(g_2)^{-\frac{2}{p}+2}\big(1+d(g_2)\big)^{-\frac{t}{2}}\Big\|_{L^q(G,\mathbb{R}_+)}\leq C^{\frac{1}{q}}$, d'où

$$\begin{aligned}&\Big\|g_2\mapsto C\Big(\phi(g)\big(1+d(g)\big)^{\frac{t}{2}}\Big)\Big(\phi(g_2)^{-\frac{2}{p}+2}\big(1+d(g_2)\big)^{-\frac{t}{2}}\Big)\Big\|_{L^q(G,\mathbb{R}_+)}\\ &\qquad\leq C^{2-\frac{1}{p}}\phi(g)\big(1+d(g)\big)^{\frac{t}{2}}\leq C^{2-\frac{1}{p}}\phi(g)\big(1+d(g)\big)^{t}\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Démonstration de la proposition. Soit $t\in\mathbb{R}_+^*$ tel que l'intégrale $\int_G \phi(g)^2\big(1+d(g)\big)^{-\frac{t}{2}}dg$ converge. Comme l'intégrale $\int_G \phi(g)^2\big(1+d(g)\big)^{-t}dg$ converge on a $\mathcal{S}_t^N(G,A)\subset L^{p,N}_{\mathrm{norm}}(G,A)$ et comme $\int_G \phi(g)^2\big(1+d(g)\big)^{-\frac{t}{2}}dg$

converge on peut appliquer le lemme 4.6.2. Il existe donc des constantes C et C' telles que pour tout $f \in \mathcal{S}_t^N(G,A)$ on ait

$$\begin{aligned} \|f^m\|_{\mathcal{S}_{-t}^N(G,A)} &\leq C\|f\|_{\mathcal{S}_t^N(G,A)}\|f^{m-2}\|_{L^{p,N}_{\mathrm{norm}}(G,A)}\|f\|_{\mathcal{S}_t^N(G,A)} \\ &\leq C'\|f\|^3_{\mathcal{S}_t^N(G,A)}\|\iota(f)^{m-3}\|_{\mathcal{L}(L^{p,N}_{\mathrm{norm}}(G,A))}. \end{aligned}$$

D'où, pour tout $f \in \mathcal{S}_t^N(G,A)$,

$$\limsup_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}_{-t}^N(G,A)} \leq \lim_{m\to\infty} ||\iota(f)^m||^{1/m}_{\mathcal{L}(L^{p,N}_{\mathrm{norm}}(G,A))}.$$

Comme $t/2 < t$ on peut appliquer la proposition 4.4.6 à t et à $s = -t$ et on obtient

$$\limsup_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}_{-t}^N(G,A)} = \lim_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}_t^N(G,A)}.$$

Ainsi la proposition est démontrée.

4.7 Lien avec les algèbres $L^1(G,A)$

Dans toute cette section nous considérons un quadruplet (G,K,d,ϕ) satisfaisant (HC) et une algèbre de Banach A sur laquelle G agit de façon continue par automorphismes préservant la norme.

Définition 4.7.1 *Soit N une norme sur G et $t \in \mathbb{R}_+$. On note $L_t^{1,N}(G,A)$ la complétion de $C_c(G,A)$ pour la norme*

$$\|f\|_{L_t^{1,N}(G,A)} = \int_G \|f(g)\|_A N(g)(1+d(g))^t dg.$$

Il est immédiat que $L_t^{1,N}(G,A)$ est une algèbre de Banach pour le produit de convolution.

Proposition 4.7.2 *Soit N une norme sur G et $s,t \in \mathbb{R}_+$ avec $s \leq t$. Alors $L_t^{1,N}(G,A)$ est une sous-algèbre dense et pleine de $L_s^{1,N}(G,A)$.*

La preuve de cette proposition est analogue à celle de la proposition 4.4.5.

Pour trouver des espaces de Schwartz généralisés pleins dans ces algèbres nous avons besoin d'une donnée supplémentaire.

Nous dirons qu'une norme N_ϕ sur G vérifie la propriété (N) si les conditions suivantes sont satisfaites :

- *(N1)* $N_\phi(1) = 1$ et pour tout $g \in G$, $N_\phi(g^{-1}) = N_\phi(g)$,

– *(N2)* pour tous $g \in G$ et $k, k' \in K$, $N_\phi(kgk') = N_\phi(g)$,

– *(N3)* il existe $s \in \mathbb{R}_+$ et deux constantes C_1 et C_2 dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que, pour tout $g \in G$,

$$C_1 N_\phi(g)^{-1} \leq \phi(g) \leq C_2 N_\phi(g)^{-1}\big(1 + d(g)\big)^s.$$

Notons que si G est un groupe de Lie semi-simple linéaire connexe, et K, d, ϕ sont comme dans le paragraphe 2, $N_\phi = N_\rho$ convient. Dans le cas d'un groupe de Lie semi-simple général on peut prendre les images inverses de K, d, ϕ et N_ϕ associés au groupe adjoint.

De même, si G est un groupe réductif sur un corps p-adique et K, σ et Ξ sont comme dans le paragraphe 4.3, $N_\phi = N_\rho$ convient.

Proposition 4.7.3 *Soit N_ϕ une norme sur G vérifiant (N). Alors pour $t \in \mathbb{R}_+$ assez grand, pour tout $s \in \mathbb{R}_+$ et pour toute norme N sur G, $\mathcal{S}_{s+t}^{N_\phi N}(G, A)$ est une sous-algèbre dense et pleine de $L_s^{1,N}(G, A)$.*

Démonstration. Soit $t_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\Big(g \mapsto \phi(g) N_\phi(g)^{-1}\big(1 + d(g)\big)^{-t_1}\Big) \text{ appartienne à } L^1(G, \mathbb{R}_+).$$

Si $t \geq t_1$, pour tout $s \in \mathbb{R}_+$ et pour toute norme N, $\mathcal{S}_{s+t}^{N_\phi N}(G, A)$ est une sous-algèbre de $L_s^{1,N}(G, A)$, et elle est évidemment dense.

Soit $t_2 \in \mathbb{R}_+$ tel qu'il existe une constante $C_2 \in \mathbb{R}_+$ avec $C_2\big(1 + d(g)\big)^{t_2} \geq N_\phi(g)\phi(g)$ pour tout $g \in G$. On a

$$L_{t_2}^{1,N}(G, A) \subset L_{\mathrm{norm}}^{1,N_\phi N}(G, A). \tag{4.8}$$

Soient enfin t_0 comme dans la proposition 4.4.6 et t_3 tel que pour $t \geq t_3$ la conclusion du lemme 4.6.2 soit vraie.

Alors pour tout $t > \max(t_0, t_1 + t_2, t_3)$, pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, pour toute norme N sur G, $\mathcal{S}_{s+t}^{N_\phi N}(G, A)$ est une sous-algèbre dense et pleine de $L_s^{1,N}(G, A)$. En effet par le lemme 4.6.2 et à cause de (4.8) il existe des constantes C et C' telles que pour tout $f \in C_c(G, A)$, on ait

$$\begin{aligned} \|f^m\|_{\mathcal{S}_{-s-t}^{N_\phi N}(G,A)} &\leq C \|f\|_{\mathcal{S}_{s+t}^{N_\phi N}(G,A)} \|f^{m-2}\|_{L_{\mathrm{norm}}^{1,N_\phi N}(G,A)} \|f\|_{\mathcal{S}_{s+t}^{N_\phi N}(G,A)} \\ &\leq C' \|f\|_{\mathcal{S}_{s+t}^{N_\phi N}(G,A)} \|f^{m-2}\|_{L_{t_2}^{1,N}(G,A)} \|f\|_{\mathcal{S}_{s+t}^{N_\phi N}(G,A)}. \end{aligned}$$

Comme $s + t \geq t_1 + t_2$, l'inégalité ci-dessus s'étend à tout $f \in \mathcal{S}_{s+t}^{N_\phi N}(G, A)$. En passant à la limite, on obtient, pour tout $f \in \mathcal{S}_{s+t}^{N_\phi N}(G, A)$,

$$\limsup_{m \to \infty} ||f^m||_{\mathcal{S}_{-s-t}^{N_\phi N}(G,A)}^{1/m} \leq \lim_{m \to \infty} ||f^m||_{L_{t_2}^{1,N}(G,A)}^{1/m}.$$

Comme $s+t>t_0$, d'après la proposition 4.4.6, on a

$$\limsup_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}^{N_\phi N}_{-s-t}(G,A)} = \lim_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{\mathcal{S}^{N_\phi N}_{s+t}(G,A)}.$$

Enfin par la proposition 4.7.2,

$$\lim_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{L^{1,N}_{t_2}(G,A)} = \lim_{m\to\infty} ||f^m||^{1/m}_{L^{1,N}_{s}(G,A)}.$$

La démonstration est achevée.

En fait en utilisant une version un peu modifiée du lemme 4.6.2, on pourrait éviter le recours à la proposition 4.7.2.

4.8 Lien avec $C^*_r(G,A)$

Récapitulons d'abord ce qui a été démontré concernant $C^*_r(G)$. Soit (G,K,d,ϕ) un quadruplet satisfaisant (HC). Les propositions 4.5.2 et 4.6.1 impliquent le résultat suivant.

Proposition 4.8.1 *Si $t\in\mathbb{R}^*_+$ est assez grand pour que l'intégrale $\int_G \phi(g)^2\big(1+d(g)\big)^{-\frac{t}{2}}dg$ converge, $\mathcal{S}_t(G)$ est une sous-algèbre dense et pleine de $C^*_r(G)$.*

Soit maintenant A une C^*-algèbre munie d'une action continue de G par automorphismes de C^*-algèbres.

Proposition 4.8.2 *Si $t\in\mathbb{R}_+$ est assez grand pour que l'intégrale $\int_G \phi(g)^2\big(1+d(g)\big)^{-t}dg$ converge, $\mathcal{S}_t(G,A)$ est une sous-algèbre dense de $C^*_r(G,A)$.*

Il est important de noter que cette sous-algèbre n'est pas pleine en général. On le voit facilement lorsque $A=C(G/\Gamma)$ où Γ est un sous-groupe discret cocompact de G. Elle n'est même pas pleine lorsque $A=C(G/B)$ avec $G=SL(n,\mathbb{C})$ et B le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures, mais cela est un peu plus dur à démontrer.

Démonstration de la proposition. On note $L^2(G,A)$ le complété de $C_c(G,A)$ pour la structure suivante de A-module préhilbertien : pour $a\in A$ et $x,y\in C_c(G,A)$,

$$(xa)(g)=x(g)a \text{ et } \langle x,y\rangle=\int_G x^*(g)y(g)dg.$$

Comme G est unimodulaire on munit $C_c(G,A)$ de l'involution suivante : pour $f\in C_c(G,A)$ et $g\in G$, $f^*(g)=g(f(g^{-1}))^*$. L'action de $C_c(G,A)$ sur $L^2(G,A)$ donnée par

$$(fx)(g)=\int_G g^{-1}(f(g_1))x(g_1^{-1}g)dg_1$$

pour $f\in C_c(G,A)$ et $x\in C_c(G,A)\subset L^2(G,A)$

définit un morphisme involutif de $C_c(G,A)$ vers l'algèbre des endomorphismes de A-modules hilbertiens de $L^2(G,A)$ et on rappelle que $C_r^*(G,A)$ est l'adhérence de l'image de $C_c(G,A)$ par ce morphisme. Les conventions que nous avons adoptées sont celles de [Kas88], 1.3 et 1.7.

Soit $t \in \mathbb{R}_+$ tel que l'intégrale $\int_G \phi(g)^2 \big(1+d(g)\big)^{-t} dg$ converge. On pose $C = \int_G \phi(g)^2 \big(1+d(g)\big)^{-t} dg$. Il est clair que pour tout $f \in C_c(G,A)$ on a $\|f\|_{L^2(G,A)} \leq C^{\frac{1}{2}} \|f\|_{\mathcal{S}_t(G,A)}$. Par la proposition 4.4.3, $\mathcal{S}_t(G,A)$ est une algèbre et l'involution préserve la norme de $\mathcal{S}_t(G,A)$. On conclut en appliquant le lemme ci-dessous à $\mathcal{S}_t(G,A)$ munie de la norme $\max(1,C)\|.\|_{\mathcal{S}_t(G,A)}$.

Lemme 4.8.3 *Soient G un groupe localement compact unimodulaire et A une G-C^*-algèbre et B une algèbre de Banach contenant $C_c(G,A)$ comme sous-algèbre dense et telle que l'on ait $\|f\|_B = \|f^*\|_B$, $\|f\|_B \leq \|f\|_{L^2(G,A)}$ pour $f \in C_c(G,A)$ et $\|f_1 f_2\|_B \leq \|f_1\|_B \|f_2\|_B$ pour $f_1, f_2 \in B$. Alors $\|f\|_{C_r^*(G,A)} \leq \|f\|_B$ pour tout $f \in C_c(G,A)$.*

Démonstration du lemme. Pour tous $f, x \in C_c(G,A)$ on a l'inégalité

$$\|fx\|_{L^2(G,A)} \leq \|f\|_B \|x\|_{L^1(G,A)}. \tag{4.9}$$

Soient $f, x \in C_c(G,A)$. On a $\|fx\|^2_{L^2(G,A)} \leq \|x\|_{L^2(G,A)} \|(f^*f)x\|_{L^2(G,A)}$ puisque $\|\langle fx, fx\rangle_{L^2(G,A)}\|_A = \|\langle x, (f^*f)x\rangle_{L^2(G,A)}\|_A \leq \|x\|_{L^2(G,A)} \|(f^*f)x\|_{L^2(G,A)}$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ il vient

$$\|fx\|^{2^{m+1}}_{L^2(G,A)} \leq \|x\|^{2^{m+1}-1}_{L^2(G,A)} \|(f^*f)^{2^m} x\|_{L^2(G,A)}.$$

D'après (4.9), $\|(f^*f)^{2^m} x\|_{L^2(G,A)} \leq \|(f^*f)^{2^m}\|_B \|x\|_{L^1(G,A)}$ et on sait que $\|(f^*f)^{2^m}\|_B \leq \|f\|_B^{2^{m+1}}$. D'où

$$\|fx\|^{2^{m+1}}_{L^2(G,A)} \leq \|x\|^{2^{m+1}-1}_{L^2(G,A)} \|f\|_B^{2^{m+1}} \|x\|_{L^1(G,A)}.$$

En faisant tendre m vers l'infini on obtient

$$\|fx\|_{L^2(G,A)} \leq \|f\|_B \|x\|_{L^2(G,A)}$$

et la démonstration est achevée.

Chapitre 5

Conclusion

Soit G un groupe localement compact, et $\underline{E}G$ l'espace classifiant les actions propres de G. Nous avons défini au paragraphe 1.7, pour toute G-C^*-algèbre B et pour toute bonne complétion $\mathcal{A}(G)$ de $C_c(G)$, une application $\mu_{\mathcal{A}}^B : K_*^{\mathrm{top}}(G, B) \to K_*(\mathcal{A}(G, B))$.

Nous rappelons que la classe $\mathcal{C}$, définie dans l'introduction, est formée

- par les groupes localement compacts agissant proprement, continûment et isométriquement sur une variété riemannienne complète simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle (voir [Kas88]), ou sur un immeuble de Bruhat-Tits affine (voir [KS91]), ou sur un espace métrique uniformément localement fini, faiblement géodésique et faiblement bolique (voir [KS94]),

- par les groupes discrets agissant proprement et par isométries sur un espace métrique faiblement géodésique, faiblement bolique et de géométrie grossière bornée (voir [KS]),

- et par les groupes localement compacts vérifiant la propriété de Haagerup, c'est-à-dire agissant de façon affine et propre sur un espace de Hilbert (voir [HK97]).

Tous ces groupes vérifient les hypothèses de la proposition 1.7.11 ou de la proposition 1.7.12, d'après [Kas88, KS94, KS91, KS, HK97, Tu98].

D'où le résultat suivant.

Proposition 5.0.4 *Pour tout groupe G dans la classe $\mathcal{C}$, pour toute bonne complétion $\mathcal{A}(G)$ de $C_c(G)$ et pour toute G-C^*-algèbre B, $\mu_{\mathcal{A}}^B$ est une injection.*

Nous rappelons que la classe $\mathcal{C}'$ est formée par les groupes localement compacts agissant proprement, isométriquement et continûment

- sur une variété riemannienne complète simplement connexe, à courbure sectionnelle négative ou nulle et bornée inférieurement,
- ou sur un immeuble affine de Bruhat-Tits uniformément localement fini,
- ou sur un espace métrique uniformément localement fini, faiblement géodésique, faiblement bolique et vérifiant une condition supplémentaire de bolicité forte (ce cas contient le précédent),

et par les groupes localement compacts possédant la propriété de Haagerup.

Les groupes du premier type vérifient les hypothèses du théorème 1.7.13 d'après le chapitre 3 et [Kas88], les groupes du deuxième type et du troisième type vérifient les hypothèses du théorème 1.7.13 d'après le chapitre 2 et [KS94, KS] et enfin les groupes possédant la propriété de Haagerup vérifient les hypothèses de la proposition 1.7.13 d'après [HK97, Tu98]. D'autre part la classe $\mathcal{C}'$ est contenue dans la classe $\mathcal{C}$ et la proposition 5.0.4 s'applique. D'où le résultat suivant, qui est notre résultat principal.

Théorème 5.0.5 *Pour tout groupe G dans la classe $\mathcal{C}'$, pour toute bonne complétion $\mathcal{A}(G)$ de $C_c(G)$ et pour toute G-C^*-algèbre B, $\mu_{\mathcal{A}}^B$ est une bijection.*

On a le corollaire suivant. Soit G un groupe localement compact et notons $\mathcal{A}_{\max}(G)$ la complétion de $C_c(G)$ pour la norme $\|f\|_{\mathcal{A}_{\max}(G)} = \big\|g \mapsto |f(g)|\big\|_{C_r^*(G)}$, de sorte que l'on possède un morphisme involutif d'algèbres de Banach de $\mathcal{A}_{\max}(G)$ dans $C_r^*(G)$.

Corollaire 5.0.6 *Supposons que G appartienne à la classe $\mathcal{C}'$, et que l'application $K_*(\mathcal{A}_{\max}(G)) \to K_*(C_r^*(G))$ soit surjective. Alors la conjecture de Baum-Connes est vraie pour G, c'est-à-dire que $\mu_r : K_*^{\mathrm{top}}(G) \to K_*(C_r^*(G))$ est une bijection.*

La condition suffisante la meilleure que je connaisse pour que la deuxième hypothèse du corollaire soit satisfaite est la suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tout élément de $M_n(C_c(G))$ a même rayon spectral dans $M_n(\mathcal{A}_{\max}(G))$ et dans $M_n(C_r^*(G))$ (cette condition est suffisante en vertu du lemme 1.7.2). Cette dernière condition est satisfaite si $C_r^*(G)$ possède une sous-algèbre dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe qui est une bonne complétion de $C_c(G)$, mais elle est a priori plus faible.

Cette dernière situation se produit pour les groupes de Lie semi-simples (plus précisément les groupes de Lie dont l'algèbre de Lie est semi-simple et dont le morphisme adjoint a un noyau fini) et pour les groupes réductifs sur un corps p-adique d'après le chapitre 4 et pour les groupes discrets vérifiant la propriété (RD) de Jolissaint (introduite dans [Jol85, Jol87, Jol90]).

D'après [dlH88] les groupes hyperboliques possèdent la propriété (RD), et donc en particulier les sous-groupes discrets cocompacts de $Sp(n, 1)$. D'après [RRS97] les sous-groupes discrets de type fini de $SL_3(\mathbb{F})$ la possèdent aussi pour tout corps p-adique $\mathbb{F}$. Une démonstration analogue montre qu'il en va de même pour les sous-groupes discrets cocompacts de $SL_3(\mathbb{R})$ [Laf98].

Pour appliquer la méthode de KK-théorie banachique à de nouveaux cas le plus important est donc de trancher la conjecture d'Alain Valette qui affirme que tout groupe agissant de façon continue, isométrique, propre et cocompacte sur un espace symétrique riemannien ou sur un immeuble de Bruhat-Tits affine a la propriété (RD) ([FRR93] page 74).

D'autre part d'après [Jol90], $SL(3, \mathbb{Z})$ ne possède pas la propriété (RD). En fait il ne vérifie pas non plus la condition ci-dessus. Une nouvelle idée est donc nécessaire pour monter la conjecture de Baum-Connes (sans coefficients) pour $SL(3, \mathbb{Z})$.

Table des matières

Bibliographie

[BBV96] C. Béguin, H. Bettaieb, and A. Valette. K-theory for C^*-algebras of one relator groups. *Preprint de l'université de Neuchâtel*, 1996.

[BC82] P. Baum and A. Connes. K-theory for Lie groups and foliations. 1982.

[BC88a] P. Baum and A. Connes. Chern character for discrete groups. In *A fête of topology*, pages 163–232. Academic Press, Boston, MA, 1988.

[BC88b] P. Baum and A. Connes. K-theory for discrete groups. In *Operator algebras and applications, Vol. 1*, volume 135 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–20. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

[BCH94] P. Baum, A. Connes, and N. Higson. Classifying space for proper actions and K-theory of group C^*-algebras. In *C^*-algebras: 1943–1993 (San Antonio, TX, 1993)*, volume 167 of *Contemp. Math.*, pages 240–291. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[BHP97] P. Baum, N. Higson, and R. Plymen. A proof of the Baum-Connes conjecture for p-adic $GL(n)$. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 325(2):171–176, 1997.

[Bos90] J.-B. Bost. Principe d'Oka, K-théorie et systèmes dynamiques non commutatifs. *Inventiones Math.,101*, pages 261–333, 1990.

[BS89] S. Baaj and G. Skandalis. C^*-algèbres de Hopf et théorie de Kasparov équivariante. *K-Theory*, 2(6):683–721, 1989.

[BT72] F. Bruhat and J. Tits. Groupes réductifs sur un corps local. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (41):5–251, 1972.

[Cun83] J. Cuntz. K-theoretic amenability for discrete groups. *J. Reine Angew. Math.*, 344:180–195, 1983.

[Cun97] J. Cuntz. Bivariante K-theorie für lokalconvexe Algebren und der Chern-Connes Character. *preprint de l'Université de Heidelberg*, 1997.

[Dix64] J. Dixmier. *Les C^*-algèbres et leurs représentations.* Gauthiers-Villars, 1964.

[dlH88] P. de la Harpe. Groupes hyperboliques, algèbres d'opérateurs et un théorème de Jolissaint. *C.R.A.S*, 307,série 1:pages 771–774, 1988.

[dlHV89] P. de la Harpe and A. Valette. *La propriété (T) de Kazdhan pour les groupes localement compacts.* Astérisque, 1989.

[FRR93] S. Ferry, A. Ranicki, and J. Rosenberg, editors. *Novikov conjectures, Index theorems and Rigidity*, volume 1. London Mathematical Society, LNS 226, 1993.

[GHT97] E. Guentner, N. Higson, and J. Trout. Equivariant E-theory for C^*-algebras. *preprint*, 1997.

[GV88] R. Gangolli and V.S. Varadarajan. *Harmonic analysis of spherical functions on real reductive groups.* Springer-Verlag, 1988.

[HK97] N. Higson and G. Kasparov. Operator K-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space. *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, 3:131–142 (electronic), 1997.

[HKT98] N. Higson, G. Kasparov, and J. Trout. A Bott periodicity theorem for infinite-dimensional Euclidean space. *Adv. Math.*, 135(1):1–40, 1998.

[JK95] P. Julg and G. Kasparov. Operator K-theory for the group $SU(n,1)$. *J. Reine Angew. Math.*, 463:99–152, 1995.

[Jol85] P. Jolissaint. Croissance d'un groupe de génération finie et fonctions lisses sur son dual. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 300(17):601–604, 1985.

[Jol87] P. Jolissaint. Les fonctions à décroissance rapide dans les C^*-algèbres réduites de groupes. *Thèse,Genève*, 1987.

[Jol90] P. Jolissaint. Rapidly decreasing functions in reduced C^*-algebra of groups. *Trans.Amer.Math.Soc*, 317:pages 167–196, 1990.

[Jul97] P. Julg. Remarks on the Baum-Connes conjecture and Kazhdan's property T. In *Operator algebras and their applications (Waterloo, ON, 1994/1995)*, volume 13 of *Fields Inst. Commun.*, pages 145–153. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[JV84] P. Julg and A. Valette. K-theoretic amenability for $SL_2(Q_p)$, and the action on the associated tree. *J. Funct. Anal.*, 58(2):194–215, 1984.

[JV86] P. Julg and A. Valette. Twisted coboundary operator on a tree and the Selberg principle. *J. Operator Theory*, 16(2), 1986.

[Kas81] G. G. Kasparov. K-theory, group C^*-algebras, and higher signatures (conspectus). In *Novikov conjectures, index theorems and rigidity, Vol. 1 (Oberwolfach, 1993)*, volume 226 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 101–146. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981.

[Kas84] G. G. Kasparov. Lorentz groups: K-theory of unitary representations and crossed products. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 275(3):541–545, 1984.

[Kas88] G.G. Kasparov. Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture. *Invent. Math. 91*, pages 147–201, 1988.

[Kna86] A. W. Knapp. *Representation theory of semi-simple groups.* Princeton University, 1986.

[KS] G. Kasparov and G. Skandalis. Groups acting properly on bolic spaces and the Novikov conjecture.

[KS91] G. G. Kasparov and G. Skandalis. Groups acting on buildings, operator K-theory, and Novikov's conjecture. *K-Theory*, 4(4):303–337, 1991.

[KS94] G. Kasparov and G. Skandalis. Groupes boliques et conjecture de Novikov. *C.R.A.S,Paris*, Série I(319):815–820, 1994.

[Laf98] V. Lafforgue. A proof of property (RD) for discrete cocompact subgroups of $SL_3(R)$. *preprint du DMI*, 1998.

[OO98] H. Oyono-Oyono. La conjecture de Baum-Connes pour les groupes agissant sur les arbres. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Série I*, (326):799–804, 1998.

[Pim86] M. V. Pimsner. KK-groups of crossed products by groups acting on trees. *Invent. Math.*, 86(3):603–634, 1986.

[PV82] M. Pimsner and D. Voiculescu. K-groups of reduced crossed products by free groups. *J. Operator Theory*, 8(1):131–156, 1982.

[RRS97] J. Ramagge, G. Robertson, and T. Steger. A Haagerup inequality for $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_1$ and $\tilde{A}_2$ buildings. *preprint, to appear in Geometric and Functional Analysis Vol 8(1998)*, 1997.

[Sil79] A.J. Silberger. *Introduction to harmonic analysis on reductive p-adic groups.* Princeton University Press, 1979.

[Tho98] K. Thomsen. Asymtotic homomorphisms and equivariant KK-theory. *preprint*, 1998.

[Tu96] Jean-Louis Tu. Thèse de doctorat. *Université Paris 7*, 1996.

[Tu97] J.L. Tu. The Baum-Connes conjecture and discrete group actions on trees. *à paraître dans K-theory*, 1997.

[Tu98] J.L. Tu. La conjecture de Baum-Connes pour les feuilletages moyennables. *preprint de l'Université Paris 7*, 1998.

[Vig90] M.-F. Vignéras. On formal dimensions for reductive p-adic groups. In *Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part I (Ramat Aviv, 1989)*, pages 225–266. Weizmann, Jerusalem, 1990.

[Was87] A. Wassermann. Une démonstration de la conjecture de Connes-Kasparov pour les groupes de Lie linéaires connexes réductifs. *Note C.R.A.S.,Série 1*, (304):pages 559–562, 1987.

[Wol73] J. A. Wolf. Essential self-adjointness for the Dirac operator and its square. *Indiana Univ. Math. J.*, 22:611–640, 1972/73.