# Mémoire d'Habilitation

de

l'UNIVERSITÉ PARIS 7 DENIS DIDEROT

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

présenté par

Vincent LAFFORGUE

# Conjecture de Baum-Connes, théorie de Fontaine en caractéristique $p$, et programme de Langlands géométrique.

Soutenu le 4 mars 2009.

**Rapporteurs :**

| | |
|---|---|
| M. Mark KISIN | University of Chicago |
| M. Georges SKANDALIS | Université Paris 7 |
| M. Guoliang YU | University of Vanderbilt |

**Jury :**

| | |
|---|---|
| M. Jean-Benoît BOST | Université Paris Sud |
| M. Pierre COLMEZ | CNRS |
| M. Alain CONNES | Collège de France |
| M. Gérard LAUMON | CNRS |
| M. Georges SKANDALIS | Université Paris 7 |
| M. Alain VALETTE | Université de Neuchâtel |
| M. Guoliang YU | University of Vanderbilt |

## Remerciements

Je remercie Jean-Benoît Bost, qui a dirigé ma thèse et dont les idées très originales sur la conjecture de Baum-Connes sont à l'origine de tous mes travaux sur ce sujet.

Je remercie Georges Skandalis pour son aide constante depuis plus de dix ans. Les discussions que nous avons ensemble m'apportent énormément.

Depuis plusieurs années je me suis intéressé à des questions différentes de celles que j'avais étudiées pendant ma thèse. Cela a été possible grâce aux nombreuses discussions que j'ai eues avec Alain Genestier et Sergey Lysenko. Ils m'ont consacré beaucoup de temps et les articles que nous avons écrits en commun sont issus des projets de recherche qu'ils avaient élaborés avant que nous ne travaillions ensemble.

Mes travaux sur la version banachique de la propriété (T) renforcée et les plongements d'expanseurs sont issus de discussions avec Uri Bader, Assaf Naor et Gilles Pisier.

Pour tous les travaux que je présente dans ce mémoire, j'ai été aidé par des discussions avec de nombreuses personnes que je tiens à remercier, en particulier Paul Baum, Yves Benoist, Alain Connes, Yves de Cornulier, Michel Duflo, Nigel Higson, Pierre Julg, François Pierrot et Alain Valette pour les questions reliées à la conjecture de Baum-Connes, Gaëtan Chenevier, Laurent Clozel, Jean-François Dat, Guy Henniart, Laurent Lafforgue, Gérard Laumon, Colette Moeglin et Bao Châu Ngô pour les formes automorphes, Laurent Berger, Christophe Breuil, Olivier Brinon, Pierre Colmez, Laurent Fargues et Mark Kisin pour la théorie de Fontaine, et Sasha Beilinson, David Ben-Zvi, Roman Bezrukavnikov, Vladimir Drinfeld, Edward Frenkel, Dennis Gaitsgory et Bertrand Toën pour le programme de Langlands géométrique.

Je remercie tous les membres de l'équipe Algèbres d'Opérateurs de l'Institut de Mathématiques de Jussieu pour le soutien et les conditions de travail excellentes dont je bénéficie.

Mark Kisin, Georges Skandalis et Guoliang Yu ont accepté d'être rapporteurs de mon habilitation et je les remercie pour leur travail.

Enfin je suis très honoré de la présence des membres du jury.

# Table des matières

Ce mémoire, présenté en vue d'obtenir l'habilitation à diriger des recherches, donne un aperçu de mes travaux depuis 2001. Je n'évoquerai pas ici le contenu de ma thèse [**Laf99**], soutenue en 1999, et publiée un peu plus tard, sous une forme améliorée, dans [**Laf00, Laf02**].

Les quatre chapitres correspondent aux sujets, assez indépendants les uns des autres, auxquels j'ai réfléchi depuis cette époque.

## Travaux présentés pour l'habilitation

- **Dans le Chapitre 1 :**

[1] V. Lafforgue. Banach KK-theory and the Baum-Connes conjecture, Proceedings of the ICM 2002 (Beijing), vol II, 795–812.

[2] N. Higson, V. Lafforgue and G. Skandalis. Counter-examples to the Baum-Connes conjecture. *Geom. Funct. Anal.* 12(2) :330–354, 2002.

[3] V. Lafforgue. Une remarque sur les fonctions conditionnellement de type négatif. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 342(7) : 497–499, 2006.

[4] V. Lafforgue (avec un appendice de Hervé Oyono-Oyono). $K$-théorie bivariante pour les algèbres de Banach, groupoïdes et conjecture de Baum-Connes. *J. Inst. Math. Jussieu* 6(3) : 415–451, 2007.

[5] V. Lafforgue. Un renforcement de la propriété (T). *Duke Math. J.*, 143(3) :559–602, 2008.

- **Dans le Chapitre 2 :**

[6] A. Genestier et V. Lafforgue. L'isomorphisme des deux tours. Une autre approche en égales caractéristiques. *L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld*, Progress in Math. 262, 2008.

[7] A. Genestier et V. Lafforgue. Théorie de Fontaine en égales caractéristiques. *preprint*, 2008.

[8] V. Lafforgue. Valeurs spéciales des fonctions $L$ en caractéristique $p$. Preprint 2008.

- **Dans le Chapitre 3 :**

[9] V. Lafforgue. Estimées pour les valuations $p$-adiques des valeurs propres d'opérateurs de Hecke. Preprint 2008.

- **Dans le Chapitre 4 :**

[10] V. Lafforgue et S. Lysenko. Geometric Weil representation : local field case. A paraître dans *Compositio Math.*

Tous ces textes se trouvent à l'adresse
http ://people.math.jussieu.fr/~vlafforg/

CHAPITRE 1

# Travaux autour de la conjecture de Baum-Connes

La $KK$-théorie de Kasparov [**Kas88**] et la conjecture de Baum-Connes [**BCH94**] seront les thèmes dominants de ce chapitre. Il serait beaucoup trop long d'entamer des rappels sur ces sujets et sur la $KK$-théorie banachique [**Laf02**]. Nous renvoyons à [**Ska91**] pour une introduction générale à la $KK$-théorie et à [**Ska99, Laf01**] et [1] pour des introductions bien adaptées à la suite.

Pour tout groupe localement compact $G$ et pour toute $C^*$-algèbre $A$ munie d'une action continue de $G$, et pour $j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K_j^{\mathrm{top}}(G,A) & \overset{\mu_{L^1}^{G,A}}{\to} & K_j(L^1(G,A)) \\ & \searrow \mu_{\mathrm{red}}^{G,A} & \downarrow i_* \\ & & K_j(C^*_{\mathrm{red}}(G,A)) \end{array}$$

où $i : L^1(G,A) \to C^*_{\mathrm{red}}(G,A)$ est l'inclusion naturelle. Rappelons simplement que $K_j^{\mathrm{top}}(G,A)$ est définie à l'aide de la $KK$-théorie de Kasparov mais que lorsque $A = \mathbb{C}$ c'est la $K$-homologie de l'espace classifiant pour les actions propres de $G$. On note $C_c(G,A)$ l'algèbre des fonctions continues à support compact sur $G$ à valeurs dans $A$ munie du produit de convolution $(f_1.f_2)(g) = \int_{g_1\in G} f_1(g_1)g_1(f_2(g_1^{-1}g))dg_1$ où $dg_1$ est une mesure de Haar sur $G$. On définit $L^1(G,A)$ comme la complétion de $C_c(G,A)$ pour la norme $\int ||f(g)||_A dg$ et $C^*_{\mathrm{red}}(G,A)$ comme la complétion pour la norme d'opérateur sur le $A$-module hilbertien $L^2(G,A)$. On rappelle que les algèbres de Banach complexes ont des groupes de $K$-théorie $K_j$ pour $j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

La conjecture de Baum-Connes (resp. la conjecture de Bost) affirme que $\mu_{\mathrm{red}}^{G,A}$ (resp. $\mu_{L^1}^{G,A}$) est toujours un isomorphisme de groupes abéliens.

Une complétion $\mathcal{A}(G)$ de $C_c(G)$ est dite inconditionnelle si $\|f\|$ ne dépend que $g \mapsto |f(g)|$. Si $A$ est comme ci-dessus on définit alors $\mathcal{A}(G,A)$ comme la complétion de $C_c(G,A)$ pour la norme $\big\|g \mapsto \|f(g)\|_A\big\|_{\mathcal{A}(G)}$. On peut définir une application d'assemblage $\mu_{\mathcal{A}}^{G,A}$ : $K_j^{\mathrm{top}}(G,A) \to K_j(\mathcal{A}(G,A))$. Si l'identité de $C_c(G)$ s'étend en un morphisme $\mathcal{A}(G) \to C^*_{\mathrm{red}}(G)$, il en va de même à coefficients, c'est-à-dire que l'identité de $C_c(G,A)$ s'étend en un morphisme $\mathcal{A}(G,A) \to C^*_{\mathrm{red}}(G,A)$ et on a un diagramme commutatif comme celui ci-dessus en remplaçant $L^1(G,A)$ par $C^*_{\mathrm{red}}(G,A)$.

Depuis ma thèse j'ai continué à réfléchir à la conjecture de Baum-Connes, mais il est apparu qu'il serait très difficile d'en démontrer de nouveaux cas. D'abord Nigel Higson, Georges Skandalis et moi-même avons trouvé des contre-exemples à la conjecture de Baum-Connes sous sa forme la plus générale (par exemple la surjectivité de l'application de Baum-Connes à coefficients pour tous les groupes discrets de type fini). Cependant il reste plausible que la conjecture soit vraie à coefficients quelconques pour les groupes réductifs sur les corps locaux ou pour les groupes hyperboliques. Dans le cas des groupes hyperboliques j'ai montré la conjecture à coefficients commutatifs par une méthode un peu ad hoc. En fait la conjecture à coefficients pour les groupes hyperboliques doit pouvoir être démontrée : l'injectivité est connue par [**KS94, KS03**] et j'ai une méthode pour montrer la surjectivité mais la rédaction serait vraiment très technique.

Au contraire les méthodes existantes ne suffisent pas pour montrer la conjecture de Baum-Connes à coefficients arbitraires pour les groupes simples sur les corps locaux de rang déployé $\geq 2$. Ce résultat négatif a cependant permis de dégager un renforcement de la propriété (T), que possèdent ces groupes, mais que les groupes hyperboliques et tous les groupes simples sur les corps locaux de rang déployé 1 ne possèdent pas, si bien que cette propriété (T) renforcée fait vraiment la différence entre le rang 1 et le rang $\geq 2$. Elle a aussi des applications au problème du plongement des graphes expanseurs dans des espaces de Banach.

## 1. Exhaustion des séries discrètes des groupes semi-simples réels connexes comme conséquence de la conjecture de Baum-Connes

Ce travail constitue la deuxième partie de [1]. Il montre que la conjecture de Baum-Connes sans coefficients pour les groupes de Lie semi-simples réels connexes de centre fini, qui a été prouvée dans [**Laf02**] par des méthodes de $K$-théorie permet de retrouver la classification des représentations de séries discrètes pour ces groupes, qui est due à [**HC65**], ainsi que leur réalisation à l'aide de l'opérateur de Dirac, obtenue par Parthasarathy [**Par72**] et par Atiyah et Schmid [**AS77**]. En fait, dès 1980, Connes et Moscovici [**CM82**] ont remarqué que la conjecture de Connes-Kasparov (i.e. la conjecture de Baum-Connes sans coefficients pour les groupes réductifs réels) implique "essentiellement" la construction et l'exhaustion des séries discrètes.

Dans toute la suite de ce paragraphe, $G$ est un groupe semi-simple réel connexe de centre fini. Soit $K$ un sous-groupe compact maximal et $\mathfrak{p}$ un supplémentaire de $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}$, fixé par l'action adjointe de $K$. On munit $\mathfrak{p}$ d'une métrique $K$-invariante et on note $\tilde{K}$ le revêtement d'ordre 2 de $K$ provenant de la suite exacte $1 \to \mathbb{Z}/2 \to \mathrm{Spin}(\mathfrak{p}) \to SO(\mathfrak{p}) \to 1$. On a donc la suite exacte

$$1 \to \mathbb{Z}/2 \to \tilde{K} \to K \to 1.$$

On note $R(\tilde{K})_-$ le sous-$\mathbb{Z}$-module de l'anneau des représentations de $R(\tilde{K})$ engendré par les représentations $(V, \sigma)$ de $\tilde{K}$ telles que $\sigma(-1) = -\mathrm{Id}$. On note $S$ la représentation spinorielle de $\tilde{K}$, qui est de ce type. Si $\dim(G/K)$ est pair $S$ est $\mathbb{Z}/2$-gradué. On note $i = \dim(G/K) \ \ [2]$.

Soit $(V, \sigma)$ une représentation de $\tilde{K}$ telle que $\sigma(-1) = -\mathrm{Id}$, si bien que $V \otimes S$ est un représentation de $K$. Soit $E_V$ le $C^*_{\mathrm{red}}(G)$-module hilbertien ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué si $i = 0$ [2]) formé des éléments $K$-invariants de $V^* \otimes S^* \otimes C^*_{\mathrm{red}}(G)$, où $K$ agit par translations à gauche sur $C^*_{\mathrm{red}}(G)$. Soit $D_V$ l'opérateur $C^*_{\mathrm{red}}(G)$-linéaire non borné sur $E_V$ égal à $\sum_j 1 \otimes c(p_j) \otimes \overrightarrow{p_j}$, où $(p_j)$ est une base orthonormale de $\mathfrak{p}$, $\overrightarrow{p_j}$ désigne le champ de vecteurs invariant à droite sur $G$ associé à $p_j$, et $c(p_j)$ est la multiplication de Clifford par $p_j$. Soit $T_V = \frac{D_V}{\sqrt{1+D_V^2}}$. Alors on définit $[d_V] \in K_i(C^*_{\mathrm{red}}(G))$ comme la classe de $(E_V, T_V) \in E(\mathbb{C}, C^*_{\mathrm{red}}(G))$.

En d'autres termes $E_V$ est le complété de l'espace des sections continues à support compact du fibré sur $K\backslash G$ associé à la représentation $V^* \otimes S^*$ de $K$, pour la norme $\|w\| = \sup_{f\in L^2(G), \|f\|_{L^2(G)}=1} \|w * f\|_{L^2((V^*\otimes S^*)\times_K G)}$, et $D_V$ est l'opérateur de Dirac, tordu par $V^*$.

La conjecture de Connes-Kasparov pour $G$, qui est aussi la conjecture de Baum-Connes sans coefficients pour $G$, a été montrée par des méthodes de $K$-théorie dans [**Laf02**].

**Conjecture de Connes-Kasparov.** *Le morphisme de groupes abéliens* $\mu^G_{\mathrm{red}} : R(\tilde{K})_- \to K_i(C^*_{\mathrm{red}}(G))$ *défini par* $[V] \mapsto [d_V]$ *est un isomomorphisme, et* $K_{i+1}(C^*_{\mathrm{red}}(G)) = 0$.

Soit $H$ une représentation de série discrète de $G$, c'est-à-dire une représentation irréducible unitaire qui a une masse positive pour la mesure de Plancherel. Ceci est équivalent au fait que pour tout (ou pour un) $x \in H$, $\|x\| = 1$, le coefficient de matrice $c_x(g) = \langle x, \pi(g)x\rangle$ est de carré intégrable. Alors $\|c_x\|^2_{L^2(G)}$ est indépendant de $x$, et son inverse s'appelle le degré formel de $H$, qui est noté $d_H$ et qui est aussi la masse de $H$ pour la mesure de Plancherel. Nous utilisons le résultat suivant : toutes les séries discrètes de $G$ sont isolées dans le dual tempéré. Plus précisément un argument de développement asymptotique montre que les coefficients de matrice appartiennent à l'algèbre de Schwartz ([**HC65**], II, corollary 1 page 77), et donc ils appartiennent à $C^*_{\mathrm{red}}(G)$ (et pas seulement à l'algèbre de Von Neumann de $G$).

Alors pour $x \in H$, $\|x\| = 1$, $p : g \mapsto d_H\overline{c_x(g)}$ est un idempotent dans $C^*_{\mathrm{red}}(G)$, tel que l'image de $p$ dans $L^2(G)$ par la représentation régulière gauche soit isomorphe à $H^*$ comme représentation de $G$ à droite. La classe de $p$ dans $K_0(C^*_{\mathrm{red}}(G))$ ne dépend pas de $H$ et sera notée $[H]$.

A l'aide de l'opérateur dual-Dirac de Kasparov, on obtient dans [1] la conséquence suivante de la conjecture de Connes-Kasparov pour $G$.

Corollaire 1.1. *Les séries discrètes de $G$ sont en bijection avec un sous-ensemble de l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations irréducibles $(V, \sigma)$ de $\tilde{K}$ vérifiant* $\sigma(-1) = -\mathrm{Id}$. *De plus si une série discrète $H$ correspond à $(V, \sigma)$, on a $[H] = \pm[d_V]$ dans $K_0(C^*_{\mathrm{red}}(G))$, $V = \pm(H\otimes S^*)$ comme combinaison formelle de représentations irréductibles de $K$, et $H$ apparaît dans le noyau de l'opérateur de Dirac tordu $D_V$.*

Si $\operatorname{rang} G \neq \operatorname{rang} K$, $S^*$ est 0 dans $R(K)$ (Barbasch and Moscovici [**BM83**] (1.2.5) page 156) d'où l'on déduit que $G$ n'a pas de série discrète.

Sinon on note $T$ un tore maximal de $K$, qui est aussi un tore maximal de $G$, on fixe une chambre de Weyl pour $G$, et on choisit la chambre de Weyl pour $K$ qui la contient. On note $\rho_K$ la demi-somme des racines positives de $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$. Alors un calcul de trace dans $K_0(C^*_{\mathrm{red}}(G))$ présenté dans [1] montre que les représentations irréductibles $V$ de $\tilde{K}$ (telles que $\sigma(-1) = -\mathrm{Id}$) qui correspondent à des séries discrètes sont exactement celles dont le plus haut poids $\mu$ est tel que $\mu + \rho_K$ soit régulier pour $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ (c'est-à-dire ne se trouve pas sur un mur).

## 2. Contre-exemples à la conjecture de Baum-Connes sous sa forme la plus générale

Dans un travail en commun avec Nigel Higson et Georges Skandalis [2], nous proposons des contre-exemples à

– l'injectivité et la surjectivité de l'application de Baum-Connes (sans coefficients) pour les groupoïdes séparés,
– l'injectivité et la surjectivité de l'application de Baum-Connes pour certains feuilletages dont le groupoïde d'holonomie n'est pas séparé,
– la conjecture de Baum-Connes à coefficients pour les groupes discrets.

Pour simplifier nous expliquerons seulement le dernier cas. Ces contre-exemples sont fondés sur le défaut de fonctorialité et le défaut d'exactitude du membre de droite de la conjecture de Baum-Connes.

Soit $u : G \to H$ un morphisme de groupes localement compacts, et $B$ une $H$-$C^*$-algèbre, qui est donc munie aussi d'une structure de $G$-$C^*$-algèbre. Alors dans le diagramme suivant, la flèche en pointillés n'existe pas en général :

$$\begin{array}{ccc} K_i^{\mathrm{top}}(G,B) & \longrightarrow & K_i^{\mathrm{top}}(H,B) \\ \downarrow \mu_{\mathrm{red}}^{G,B} & & \downarrow \mu_{\mathrm{red}}^{H,B} \\ K_i(C^*_{\mathrm{red}}(G,B)) & \dashrightarrow & K_i(C^*_{\mathrm{red}}(H,B)) \end{array}$$

D'autre part si $G$ est un groupe localement compact et $0 \to I \to A \to A/I \to 0$ est une suite exacte de $G$-$C^*$-algèbres, la suite $C^*_{\mathrm{red}}(G,I) \to C^*_{\mathrm{red}}(G,A) \to C^*_{\mathrm{red}}(G,A/I)$ n'est pas forcément exacte au milieu, et même la suite des groupes de $K$-théorie associée peut ne pas être exacte au milieu, si bien que le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} K_0^{\mathrm{top}}(G,I) & \to & K_0^{\mathrm{top}}(G,A) & \to & K_0^{\mathrm{top}}(G,A/I) \\ \downarrow \mu_{\mathrm{red}}^{G,I} & & \downarrow \mu_{\mathrm{red}}^{G,A} & & \downarrow \mu_{\mathrm{red}}^{G,A/I} \\ K_0(C^*_{\mathrm{red}}(G,I)) & \to & K_0(C^*_{\mathrm{red}}(G,A)) & \to & K_0(C^*_{\mathrm{red}}(G,A/I)) \end{array}$$

possède une ligne du haut exacte au milieu alors que le ligne du bas ne l'est pas (et donc si $B$ est le cône du morphisme de $I$ dans le cône de $A \to A/I$, $K_0^{\mathrm{top}}(G,B) = 0$ alors que $K_0(C^*_{\mathrm{red}}(G,B)) \neq 0$).

Il est important de noter que la conjecture de Bost est parfaitement fonctorielle et respecte l'exactitude, et qu'aucun contre-exemple à cette conjecture n'est connu.

Les groupes discrets qui fournissent ces contre-exemples sont des groupes aléatoires construits par Gromov [**Gro00, Gro03, Oll06, Oll04, Oll05, AD08**]. Plus précisément Gromov montre l'existence d'un groupe discret de type fini $\Gamma$ égal à $\varinjlim \Gamma_n$, où les $\Gamma_n$ sont des groupes hyperboliques et $\Gamma_1 \to \Gamma_2 \to \ldots$ sont des morphismes surjectifs, tel que le graphe de Cayley de $\Gamma$ contienne une suite d'expanseurs. On en déduit une suite exacte $0 \to I \to A \to A/I \to 0$ de $\Gamma$-$C^*$-algèbres commutatives séparables (avec $I = c_0(\mathbb{N} \times \Gamma)$ et $A$ une sous-algèbre séparable de $\ell^\infty(\mathbb{N}, c_0(\Gamma))$) telle que la suite

$$K_0(C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma,I)) \to K_0(C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma,A)) \to K_0(C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma,A/I))$$

ne soit pas exacte au milieu. On peut même montrer que $\mu_{\mathrm{red}}^{\Gamma,A}$ n'est pas bijective.

Au contraire, comme les $\Gamma_n$ sont hyperboliques, on s'attend à ce que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_{\mathrm{red}}^{\Gamma_n,A}$ soit bijective. Bien sûr $K_0$ commute à la limite inductive, mais on ne peut pas comparer $C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma,A)$ à la limite inductive des $C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma_n,A)$, puisque cette limite inductive n'existe pas, les morphismes de transition n'étant pas définis. Si on remplace $C^*_{\mathrm{red}}$ par $L^1$ tout se remet à marcher : la conjecture de Bost à coefficients est vraie pour chaque $\Gamma_n$ et en passant à la limite elle est vraie pour $\Gamma$ !

## 3. K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach, groupoïdes et conjecture de Baum-Connes à coefficients commutatifs pour les groupes hyperboliques

Pierre-Yves Le Gall [**Gal99**] a construit une théorie de Kasparov équivariante par rapport à des actions de groupoïdes. Le but de [4] (suivi d'un appendice de Hervé Oyono-Oyono) est d'étendre cette théorie (sans le produit de Kasparov) à la catégorie des algèbres de Banach, de même que nous l'avons fait dans [**Laf02**] pour la théorie de Kasparov équivariante par rapport aux actions de groupes.

On appelle champ (d'espaces ou d'algèbres de Banach) un champ continu dont les sections continues ont une norme semi-continue supérieurement.

Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde topologique, muni des applications source $s$ et but $r$ (pour "range"). On appelle $\mathcal{G}$-algèbre de Banach $A = (A, \alpha)$ la donnée d'un champ $A = (A_x)_{x \in \mathcal{G}^{(0)}}$ d'algèbres de Banach sur $\mathcal{G}^{(0)}$ et d'un champ d'isomorphismes d'agèbres de Banach (préservant la norme) $\alpha = (\alpha_g)_{g \in \mathcal{G}} : s^*A \to r^*A$ tel que pour tous $x \in \mathcal{G}^{(0)}, g \in \mathcal{G}, (g_1, g_2) \in \mathcal{G}^{(2)}$ on ait $\alpha_x = Id_{A_x}$, $\alpha_{g^{-1}} = \alpha_g^{-1}$ et $\alpha_{g_1 g_2} = \alpha_{g_1} \circ \alpha_{g_2}$. Soit $\lambda$ un système de Haar sur $\mathcal{G}$.

Si $A$ est une $\mathcal{G}$-algèbre de Banach, on note $C_c(\mathcal{G}, r^*A)$ l'espace des sections continues à support compact de $r^*A$ sur $\mathcal{G}$ et on munit cet espace de la structure d'algèbre suivante : pour $f_1, f_2 \in C_c(\mathcal{G}, r^*A)$, $(f_1 * f_2)(g) = \int_{\mathcal{G}^{r(g)}} f_1(g_1)\alpha_{g_1}(f_2(g_1^{-1}g))d\lambda^{r(g)}(g_1)$.

Si $A$ et $B$ sont deux $\mathcal{G}$-algèbres de Banach, et $\ell$ une longueur sur $\mathcal{G}$, on introduit un groupe abélien $KK^{\mathrm{ban}}_{\mathcal{G},\ell}(A, B)$ qui, lorsque $\mathcal{G}$ est un groupe, est celui défini dans [**Laf02**].

Soit $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ est une complétion inconditionnelle de $C_c(\mathcal{G})$, c'est-à-dire une norme d'algèbres sur $C_c(\mathcal{G})$ telle que $\|f\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G})}$ ne dépend que de la fonction $g \mapsto |f(g)|$ sur $\mathcal{G}$. Le complété de $C_c(\mathcal{G}, r^*A)$ pour la norme $\|f\| = \left\| g \mapsto e^{\ell(g)} \|f(g)\|_{A_{r(g)}} \right\|_{\mathcal{A}(\mathcal{G})}$ est une algèbre de Banach, notée $\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}, A)$.

Nous construisons un morphisme de descente

$$KK^{\mathrm{ban}}_{\mathcal{G},\ell}(A, B) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{A}_\ell(\mathcal{G}, A), \mathcal{A}(\mathcal{G}, B)).$$

Pour la conjecture de Baum-Connes pour les groupoïdes on renvoie à [**Tu99, Tu99a**]. Rappelons simplement qu'on a une application de Baum-Connes

$$\mu^{G,B}_{\mathrm{red}} : K^{\mathrm{top}}_*(\mathcal{G}, B) \to K_*(C^*_{\mathrm{red}}(\mathcal{G}, B)).$$

Pour toute complétion inconditionnelle $\mathcal{A}(G)$ on peut définir

$$\mu^{G,B}_{\mathcal{A}} : K^{\mathrm{top}}_*(\mathcal{G}, B) \to K_*(\mathcal{A}(\mathcal{G}, B)).$$

Lorsque $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ est une sous-algèbre (dense) de $C^*_{\mathrm{red}}(\mathcal{G})$, l'identité de $C_c(\mathcal{G}, B)$ s'étend en un morphisme $i^B : \mathcal{A}(\mathcal{G}, B) \to C^*_{\mathrm{red}}(\mathcal{G}, B)$ et on a $\mu^{G,B}_{\mathrm{red}} = i^B_* \circ \mu^{G,B}_{\mathcal{A}}$.

Nous nous intéressons à la surjectivité de $\mu^{G,B}_{\mathrm{red}}$ dans des cas où l'injectivité est démontrée par l'existence d'un élément $\gamma$.

THÉORÈME 1.2. *Supposons qu'il existe une $\mathcal{G}$-$C^*$-algèbre propre $A$, et*

$$\eta \in KK_{\mathcal{G}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), A) \quad \textit{et} \quad d \in KK_{\mathcal{G}}(A, C_0(\mathcal{G}^{(0)}))$$

*tels que*

$$\gamma = \eta \otimes_A d \in KK_{\mathcal{G}}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), C_0(\mathcal{G}^{(0)}))$$

*vérifie la condition suivante : il existe une suite $(\ell_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de longueurs sur $\mathcal{G}$ qui converge uniformément vers 0 sur tout compact de $\mathcal{G}$ et telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\iota(\gamma) = 1$ dans $KK^{\mathrm{ban}}_{\mathcal{G},\ell_i}(C_0(\mathcal{G}^{(0)}), C_0(\mathcal{G}^{(0)}))$. Alors pour toute complétion inconditionnelle $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ et pour toute $\mathcal{G}$-$C^*$-algèbre $B$, $\mu_{\mathcal{A}}^{G,B}$ est une surjection.*

Supposons maintenant que $\mathcal{G}$ est
- $\Gamma \ltimes X$ où $\Gamma$ est un groupe hyperbolique et $X$ un espace localement compact,
- ou un groupoïde étale $\mathcal{G}$ Morita équivalent au groupoïde de Poincaré d'un feuilletage à base compacte muni d'une métrique riemannienne longitudinale à courbure sectionnelle strictement négative.

Alors on peut montrer l'existence d'une complétion inconditionnelle $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ qui est une sous-algèbre dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe dans $C^*_{\mathrm{red}}(\mathcal{G})$. D'autre part $\mathcal{G}$ satisfait les hypothèses du théorème 1.2.

COROLLAIRE 1.3. *La conjecture de Baum-Connes à coefficients commutatifs est vraie pour les groupes hyperboliques et pour les groupoïdes de Poincaré des feuilletages à base compacte qui peuvent être munis d'une métrique riemannienne longitudinale à courbure sectionnelle strictement négative.*

Cette méthode ne permet pas d'établir la conjecture à coefficients commutatifs pour le produit de deux groupes hyperboliques. En effet on peut construire une action d'un produit de deux groupes hyperboliques sur un espace localement compact, telle que le groupoïde $\mathcal{G}$ associé ne possède pas de complétion inconditionnelle $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ qui soit une sous-algèbre dense et stable par calcul fonctionnel holomorphe dans $C^*_{\mathrm{red}}(\mathcal{G})$.

## 4. Une remarque sur les fonctions de type négatif

Le but de [3] est de montrer qu'un groupe localement compact n'ayant pas la propriété (T) possède des fonctions conditionnellement de type négatif dont la croissance est au moins linéaire.

THÉORÈME 1.4. *Soit $G$ un groupe localement compact, et $\ell$ une longueur propre sur ce groupe. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $G_n = \{g \in G, \ell(g) \leq n\}$. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout élément de $G_n$ est le produit de $n$ éléments de $G_1$ (si $G$ est discret, la propreté de $\ell$ équivaut donc à la finitude de $G_1$). Supposons que $G$ n'a pas la propriété (T) de Kazhdan. Alors il existe un espace de Hilbert $H$ muni d'une action affine, isométrique et continue de $G$ et un point $v \in H$, tel que, en notant $a_n = \sup_{g\in G_n} \|gv - v\|_H$, on a $a_1 > 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq (\frac{\sqrt{n}}{2} - 2)a_1$.*

Ce théorème est en un sens optimal, car pour les groupes suivants, qui n'ont pas la propriété $(T)$, toute fonction continue conditionnellement de type négatif est de croissance au plus linéaire en la longueur : $PGL_2(\mathbb{Q}_p)$, $SO(n, 1)$ pour tout $n \geq 2$ et tout réseau irréductible dans $SO(4, 1) \times SO(3, 2)$.

Enfin le théorème 1.4 permet de retrouver facilement un résultat de Shalom [**Sha00**].

COROLLAIRE 1.5. *(Shalom) Soit $\Gamma$ un groupe discret de type fini ayant la propriété (T). Alors il existe un groupe de présentation finie $\Gamma'$ ayant la propriété (T) tel que $\Gamma$ soit un quotient de $\Gamma'$.*

## 5. Conditions nécessaires pour montrer la conjecture de Baum-Connes par les méthodes connues

Soit $G$ un groupe localement compact possédant un élément $\gamma$ et $A$ une $G$-$C^*$-algèbre. Nous cherchons des conditions nécessaires pour montrer la surjectivité de

$$\mu_{\mathrm{red}}^{G,A} : K_*^{\mathrm{top}}(G,A) \to K_*(C^*_{\mathrm{red}}(G,A))$$

à l'aide de la $KK$-théorie banachique et d'un argument de stabilité par calcul fonctionnel holomorphe.

Rappelons que l'existence de l'élément $\gamma$ assure que cette application est injective.

Les conditions nécessaires que nous allons expliciter ne s'appliquent pas aux autres méthodes qui pourraient exister pour montrer la surjectivité, comme les idées de Jean-Benoît Bost sur le principe d'Oka.

La méthode pour laquelle nous cherchons des conditions nécessaires est la suivante : trouver une sous-algèbre $\mathcal{B}$ de $C^*_{\mathrm{red}}(G,A)$ contenant $C_c(G,A)$ et stable par calcul fonctionnel holomorphe dans $C^*_{\mathrm{red}}(G,A)$ (voir **[Bos90]** pour cette notion), et montrer $\gamma = 1$ dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{B}, C^*_{\mathrm{red}}(G,A))$. Nous demandons en fait que $\mathcal{B}$ soit stable par calcul fonctionnel holomorphe dans $C^*_{\mathrm{red}}(G,A)$ en un sens un peu affaibli, c'est-à-dire que tout élément de $C_c(G,A)$ a le même rayon spectral dans $\mathcal{B}$ et $C^*_{\mathrm{red}}(G,A)$ (et la même chose pour les éléments de $M_n(C_c(G,A))$) car cela suffit pour impliquer $K_*(\mathcal{B}) = K_*(C^*_{\mathrm{red}}(G,A))$. En revanche nous voulons que cela ait lieu pour des raisons évidentes, c'est-à-dire qu'il existe une longueur $\ell$ sur $G$, et une fonction $P : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ à croissance sous-exponentielle, telles que

$$\sup_{f \in C_c(G,A) \text{ supporté dans la boule de rayon } n} \frac{\|f\|_{\mathcal{B}}}{\|f\|_{C^*_{\mathrm{red}}(G,A)}} \leq P(n).$$

Pour montrer $\gamma = 1$ dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{B}, C^*_{\mathrm{red}}(G,A))$, on doit construire une homotopie entre $\gamma$ et 1 dans $KK_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ (ou pour tout $s > 0$, trouver une constante $C$ et construire une homotopie dans $KK^{\mathrm{ban}}_{G,s\ell+C}(\mathbb{C},\mathbb{C})$) et montrer (ce qui est évidemment le plus difficile) que cette homotopie se descend en une homotopie dans $KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{B}, C^*_{\mathrm{red}}(G,A))$. Bien sûr on ne s'attend pas à avoir un morphisme $KK_G^{\mathrm{ban}}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \to KK^{\mathrm{ban}}(\mathcal{B}, C^*_{\mathrm{red}}(G,A))$ (on n'a pas supposé $\mathcal{B}$ de la forme $\mathcal{A}(G,A)$ où $\mathcal{A}$ est une bonne complétion car avec cette restriction la condition de stabilité par calcul fonctionnel holomorphe serait impossible à réaliser dans la plupart des cas). C'est seulement pour cette homotopie particulière que l'on espère une descente, et on cherche une condition nécessaire pour qu'elle existe. Ecrivons cette homotopie de 1 à $\gamma$ sous la forme $(E_t, \pi_t, T_t)_{t\in[0,1]}$, où $E_t = (E^<, E^>)$ est une $\mathbb{C}$-paire $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée sur laquelle $G$ agit par la représentation $\pi_t$. Une condition nécessaire pour la descente est que, pour tout $t \in [0,1]$ on puisse construire un $\mathcal{B}$-$C^*_{\mathrm{red}}(G,A)$-bimodule $(\mathcal{E}_t^<, \mathcal{E}_t^>)$ comme complétion de $(C_c(G, A\otimes E_t^<), C_c(G, A\otimes E_t^>))$. Supposons $G$ discret et $A$ unitaire pour simplifier. Pour $x \in E_t^>$, $\xi \in E_t^<$, $f \in C_c(G,A)$, $\langle \delta_1 \otimes 1_A \otimes \xi, f(\delta_1 \otimes 1_A \otimes x)\rangle = \mathrm{Schur}_{c_{\xi,x}}(f)$ où $c_{\xi,x}$ est le coefficient de matrice $c_{\xi,x}(g) = \langle \xi, \pi(g)x\rangle$ et où, pour toute fonction fonction $c : G \to \mathbb{C}$, $\mathrm{Schur}_c : C_c(G,A) \to C_c(G,A)$ est le produit de Schur, qui à $g \mapsto f(g)$ associe $g \mapsto c(g)f(g)$. Une condition nécessaire pour l'existence d'un tel $\mathcal{B}$-$C^*_{\mathrm{red}}(G,A)$-bimodule est donc que pour tout coefficient de matrice $c$, $\mathrm{Schur}_c$ s'étende en une application continue de $\mathcal{B}$ dans $C^*_{\mathrm{red}}(G,A)$ et que pour tous $\xi \in E_t^<, x \in E_t^>$, on ait

$$\left\|\mathrm{Schur}_{c_{\xi,x}}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}, C^*_{\mathrm{red}}(G,A))} \leq \|\xi\|_{E_t^<} \|x\|_{E_t^>}.$$

Choisissons pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ des vecteurs $\xi_m \in E^<_{1/m}$ et $x_m \in E^>_{1/m}$ de norme 1 tel que $c_m = c_{\xi_m, x_m}$ tende vers la fonction 1 uniformément sur les parties compactes de $G$ (on peut choisir de tels vecteurs car $(E^<_0, E^>_0)$ contient la représentation triviale). Il est assez raisonnable de supposer que chaque fonction $c_m$ tend vers 0 à l'infini (parce que en $t = 1$ l'homotopie doit atteindre $\gamma$, et en pratique les coeffients de matrices pour $(E^<_1, E^>_1)$ tendent vers 0 à l'infini).

Une condition nécessaire est donc l'existence d'une suite de fonctions $c_m \in C_0(G)$ tendant vers la fonction 1 (uniformément sur les parties compactes de $G$) telle que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\|\mathrm{Schur}_{c_m}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{B}, C^*_{\mathrm{red}}(G,A))} \leq 1$.

En mettant ensemble les deux conditions ci-dessus, on trouve la condition nécessaire suivante, qui ne fait plus intervenir $\mathcal{B}$.

**Condition nécessaire.** Il existe une fonction $P : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ à croissance sous-exponentielle, et une suite de fonctions $c_m \in C_0(G)$ tendant vers la fonction 1 (uniformément sur les parties compactes de $G$) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{m \in \mathbb{N}^*, f \in C_c(G,A) \text{ supporté dans la boule de rayon } n} \frac{\|\mathrm{Schur}_{c_m}(f)\|_{C^*_{\mathrm{red}}(G,A)}}{\|f\|_{C^*_{\mathrm{red}}(G,A)}} \leq P(n). \tag{1}$$

Cette condition nécessaire est satisfaite pour tous les groupes pour lesquels la conjecture de Baum-Connes à coefficients est démontrée. D'abord si $G$ est a-$T$-menable, c'est-à-dire s'il agit de façon affine, isométrique et propre sur un espace Hilbert $H$, on choisit $x \in H$, on introduit la fonction conditionnellement de type négatif $\Psi : g \mapsto \|g(x) - x\|^2_H$ et en prenant $c_m(g) = \exp(\frac{\Psi(g)}{m})$ et $P = 1$, l'inégalité (1) est satisfaite pour toute $G$-$C^*$-algèbre $A$. Notons que dans ce cas $c_m$ est un coefficient de matrice de la représentation unitaire qui apparaît au point $\frac{1}{m}$ de l'homotopie de 1 à $\gamma$ construite par Higson et Kasparov [**HK01**]. Rappelons que, si $c$ est un coefficient de matrice entre deux vecteurs de norme 1 dans un espace de Hilbert muni d'une représentation unitaire, $\mathrm{Schur}_c : C^*_{\mathrm{red}}(G,A) \to C^*_{\mathrm{red}}(G,A)$ est de norme $\leq 1$ (c'est ce qui permet la descente de Kasparov, et cela résulte du fait que le produit tensoriel d'une représentation unitaire de $G$ par le $A$-module hilbertien $L^2(G,A)$ est isomorphe à une somme de copies de $L^2(G,A)$).

Cette condition nécessaire est satisfaite aussi pour les groupes hyperboliques (pour lesquels j'espère montrer la conjecture de Baum-Connes) : on fixe un système fini de générateurs, et en notant $B_m$ la boule de rayon $m$ pour la longueur des mots, et $c_m$ la fonction caractéristique de $B_m$, il existe un polynôme $P$ tel que l'inégalité (1) est satisfaite pour toute $G$-$C^*$-algèbre $A$.

Hélas si $G$ est un groupe presque simple sur un corps local, dont l'algèbre de Lie contient $\mathfrak{sl}_3$, il n'existe pas de suite de fonction $c_m$ telle que l'inégalité (1) soit satisfaite pour toute $G$-$C^*$-algèbre $A$ (on demande en plus que $c_m$ soit bi-invariant par un compact maximal : on est autorisé à le faire car ci-dessus on pouvait choisir les vecteurs $x_m$ et $\xi_m$ invariants par un compact maximal). Cela est démontré dans [5] (avec $A = C_0(G/K)$ où $K$ est un compact maximal de $G$) comme une étape intermédiaire de la preuve que ces groupes satisfont la propriété $(T)$ renforcée [5] : dans le cas archimédien cela apparaît clairement, dans le cas non archimédien cela est un peu caché dans la preuve.

Lorsque $A = \mathbb{C}$, la condition ci-dessus est évidemment satisfaite pour les groupes ayant la propriété (RD), mais j'ignore si elle est vérifiée par un réseau $\Gamma$ d'un groupe réductif $G$

sur un corps local $F$, pour lesquels la propriété (RD) n'est pas connue, ou est fausse, comme par exemple pour $SL_3(\mathbb{Z})$. J'ignore même la réponse si on prend pour $c_m$ la restriction à $\Gamma$ d'une suite de fonctions sphériques sur $G(F)$ tendant vers la fonction constante égale à 1, ou bien, dans le cas non archimédien, la suite des fonctions caractéristiques des boules de rayon $m$ associées à la longueur $\gamma \mapsto d(x_0, \gamma x_0)$ sur $\Gamma$, où $x_0$ est un point de l'immeuble de $G(F)$, et $d$ la distance des murs sur l'immeuble.

## 6. Propriété $(T)$ renforcée et application aux plongements des expanseurs

Le travail [5] est issu des questions soulevées au paragraphe précédent.

En 1999, après une discussion avec Pierre Julg, Nigel Higson et moi-même avons établi que, pour démontrer la conjecture de Baum-Connes avec des coefficients arbitraires pour $G = SL_3(\mathbb{R})$ ou $SL_3(\mathbb{Q}_p)$, il suffisait de trouver $\ell$ une longueur sur $G$, et pour tout $s > 0$ de trouver $C > 0$ et une homotopie entre $\gamma$ et 1 dans un groupe défini comme $KK_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, mais en autorisant des representations $\pi$ de $G$ dans des espaces de Hilbert, qui ne soient pas nécessairement unitaires mais satisfassent $\|\pi(g)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq Ce^{s\ell(g)}$ pour tout $g \in G$.

Malheurement , $G = SL_3(\mathbb{R})$ et $SL_3(\mathbb{Q}_p)$ ont la propriété (T) renforcée : pour toute longueur $\ell$ sur $G$, il existe $s > 0$ tel que pour tout $C > 0$ la representation triviale de $G$ est isolée parmi les représentations $\pi$ de $G$ dans des espaces de Hilbert satisfaisant

$$\|\pi(g)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq Ce^{s\ell(g)} \text{ pour tout } g \in G.$$

**Remarque.** $Sp(n, 1)$ et les groupes hyperboliques n'ont pas la propriété (T) renforcée. Pour un groupe hyperbolique il est même possible d'approcher la représentation triviale par des représentations $\pi$ dans des espaces de Hilbert avec croissance polynomiale (i.e. $\|\pi(g)\| \leq P(\ell(g))$ où $P$ est un polynôme).

Pour $Sp(n, 1)$ cela a été utilisé par Pierre Julg pour monter la conjecture de Baum-Connes à coefficients. Pour les groupes hyperboliques j'ai une preuve partiellement écrite mais les détails sont très techniques.

Par conséquent la propriété (T) renforcée marque la différence entre

- rang 1, courbure $< 0$, cas où la conjecture de Baum-Connes à coefficients est démontré ou peut l'être avec les techniques actuelles,
- rang $\geq 2$, courbure $\leq 0$, cas où la conjecture de Baum-Connes à coefficients est hors d'atteinte pour le moment (sauf peut-être avec les idées de Jean-Benoît Bost sur le principe d'Oka).

Dans le cas non archimédien, la propriété (T) s'étend aux représentations dans certains espaces de Banach.

Pour simplifier nous donnons l'énoncé pour $SL_3$ et pour des corps locaux non archimédiens de caractéristique 2.

Soit $r \geq 1$ et $F$ un corps local non archimédien dont le corps résiduel a pour cardinal $2^r$. Soit $\ell$ une longueur sur $G = SL_3(F)$.

Pour $\epsilon, s, C \in \mathbb{R}_+^*$ on introduit $\mathcal{C}_{r,\epsilon}^{s,C}$ la classe des représentations $\pi$ de $G$

- dans des espaces de Banach réels $E$ qui ne contiennent pas $(1+\epsilon)$-isométriquement $\ell_1^{r+1}$
- et telles que pour tout $g \in G$, $\|\pi(g)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq Ce^{s\ell(g)}$

On dit qu'un espace de Banach $E$ contient $(1+\epsilon)$-isométriquement $\ell_1^{r+1}$ s'il existe une application linéaire $i : \ell_1^{r+1} \to E$ telle que $\|x\| \leq \|i(x)\| \leq (1+\epsilon)\|x\|$ pour tout $x \in \ell_1^{r+1}$.

**Remarque.** Un espace de Banach uniformément convexe ne contient pas $(1+\epsilon)$-isométriquement $\ell_1^2$, où $\epsilon$ dépend du module d'uniforme convexité. Un espace de Banach $B$-convexe est un espace de Banach $E$ tel qu'il existe $r$ et $\epsilon > 0$ pour lesquels $E$ ne contient pas $(1+\epsilon)$-isométriquement $\ell_1^{r+1}$.

THÉORÈME 1.6. *Soit $r \geq 1$ et $F$ un corps local non archimédien dont le corps résiduel a pour cardinal $2^r$. Soit $\ell$ une longueur sur $G = SL_3(F)$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $s > 0$ tel que pour tout $C > 0$ la représentation triviale de $G$ est isolée parmi des représentations de la classe $\mathcal{C}_{r,\epsilon}^{s,C}$, c'est-à-dire, pour être précis, la complétion $\mathcal{A}$ de $C_c(G)$ pour la norme*

$$\|f\|_{\mathcal{A}} = \sup_{(E,\pi) \text{ dans la classe } \mathcal{C}_{r,\epsilon}^{s,C}} \|\pi(f)\|_{\mathcal{L}(E)} \quad \left(\text{en notant } \pi(f) = \int_G f(g)\pi(g)dg\right)$$

*contient un idempotent auto-adjoint $p$ tel que pour toute représentation $(E,\pi)$ dans $\mathcal{C}_{r,\epsilon}^{s,C}$, l'image de $\pi(p)$ est le sous-espace fermé $E^G$ formé des vecteurs $G$-invariants dans $E$.*

COROLLAIRE 1.7. *Soit $\Gamma$ un réseau dans dans $G$. On fixe un système fini de générateurs de $\Gamma$. Soit $\Gamma_n$ une suite de sous-groupes d'indice fini de $\Gamma$ telle que $\sharp\Gamma/\Gamma_n$ tende vers l'infini quand $n \to \infty$. Alors les graphes $\Gamma/\Gamma_n$ ne se plongent pas uniformément dans les espaces de Banach, qui, pour un certain $\epsilon > 0$, ne contiennent pas $(1+\epsilon)$-isométriquement $\ell_1^{r+1}$.*

Notons que ce corollaire n'est pas une conséquence du fait que les graphes $\Gamma/\Gamma_n$ forment une suite d'expanseurs. Par exemple on ne sait pas si les suites de graphes de Ramanujan construits à l'aide d'algèbres de quaternions se plongent uniformément dans des espaces de Banach uniformément convexes (bien sûr on pense que non).

CHAPITRE 2

# Caractéristique $p$

Je vais présenter ici trois travaux, réalisés entre 2003 et 2006, bien que leur rédaction soit plus récente. Les deux premiers sont le fruit d'une collaboration avec Alain Genestier.

Le point de départ est le résultat suivant de Drinfeld, qui permet de traduire en termes d'algèbre (semi)-linéaire les analogues en caractéristique $p$ des schémas en groupes finis et plats et des groupes $p$-divisibles.

PROPOSITION 2.1. *(Drinfeld* [**Dri87**] *paragraphe 2, SGA 3 $VII_A$ 7.4,* [**Gen96**] *chapitre 1). Soit $S$ un schéma sur $\mathbb{F}_q$ et $r \in \mathbb{N}$. On note* Fr *le morphisme de $S$ dans lui-même qui à une section locale $x$ du faisceau structural associe $x^q$. Alors il y a une équivalence de catégories entre*

- *les $\mathcal{O}_S$-modules localement libres $M$ de rang $r$ munis d'un morphisme $\phi_M : \mathrm{Fr}^*(M) \to M$,*
- *les schémas en groupe finis et plats $G$, de présentation finie, d'ordre $q^r$, munis d'une action de $\mathbb{F}_q$ qui induit sur le cotangent de $G$ l'action de $\mathbb{F}_q$ provenant du fait que $S$ est un schéma sur $\mathbb{F}_q$, et dont le Verschiebung est nul.*

Dans la suite on notera $G = \mathrm{Gr}(M, \phi_M)$. La correspondance entre $(M, \phi_M)$ et $G$ est la suivante. Si on note $M^*$ et $M^{*,(q)}$ les schémas en groupes qui sont les espaces totaux de $M^*$ et $\mathrm{Fr}^*(M)^*$, le transposé de $\phi_M$ et le Frobenius relatif de $M^*$ sur $S$ sont des morphismes de schémas en groupes de $M^*$ vers $M^{*,(q)}$ et alors $G = \mathrm{Ker}({}^t\phi_M - Frob : M^* \to M^{*,(q)})$. Dans l'autre sens $M$ est le faisceau des homomorphismes de schémas en groupes commutatifs avec action de $\mathbb{F}_q$ de $G$ dans $\mathbb{G}_a$ (muni d'une action de $\mathcal{O}_S$ qui vient de l'action de $\mathcal{O}_S$ sur $\mathbb{G}_a$ par homothéties, et d'un morphisme $\mathrm{Fr}^*(M) \to M$ qui vient du morphisme $x \mapsto x^q$ de $\mathbb{G}_a$ dans lui-même au-dessus de $S$). Drinfeld montre en complément que $Lie^*(G) = \mathrm{Coker}(\phi_M)$, où $Lie^*(G)$ désigne l'image inverse de $\Omega^1_{G/S}$ par la section nulle.

Soit $\mathcal{O}$ un anneau de valuation discrète localement compact d'égales caractéristiques $p > 0$. On identifie son corps résiduel à $\mathbb{F}_q$ et on note $K$ son corps des fractions. On fixe une uniformisante $\pi$ de $\mathcal{O}$, ce qui induit des identifications $\mathcal{O} \simeq \mathbb{F}_q[[\pi]]$, $K \simeq \mathbb{F}_q((\pi))$.

Soit $S$ un schéma formel adique sur $\mathrm{Spf}\mathcal{O}$ ($\mathcal{O}_S$ est donc complet pour une topologie adique relativement à un faisceau d'idéaux qui contient $\pi$ ; pour nous complet sous-entendra toujours séparé). Soit $\mathcal{O}\widehat{\otimes}\mathcal{O}_S$ le faisceau sur $S$ qui, à un ouvert affine $\mathrm{Spf}B$ associe le complété $\mathcal{O}\widehat{\otimes}B$ de $\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{F}_q} B$ vis-à-vis de la topologie $\pi \otimes 1$-adique. On notera toujours $z$ au lieu de $\pi \otimes 1$, en gardant la notation $\pi$ pour $1 \otimes \pi$ ($z$ et $\pi$ sont donc deux sections partout définies du faisceau $\mathcal{O}\widehat{\otimes}\mathcal{O}_S$). L'isomorphisme $\mathcal{O} = \mathbb{F}_q[[\pi]]$ induit par le choix de l'uniformisante $\pi$ fournit une identification $\mathcal{O}\widehat{\otimes}B = B[[z]]$.

Soit $\sigma$ l'endomorphisme $1 \otimes \mathrm{Fr}$ de $\mathcal{O}\widehat{\otimes}\mathcal{O}_S$ qui est l'identité sur $z$ et agit par $b \mapsto b^q$ sur les sections locales de $\mathcal{O}_S$. Pour tout faisceau $M$ de $\mathcal{O}\widehat{\otimes}\mathcal{O}_S$-modules, on note ${}^\tau M = M \otimes_{\mathcal{O}\widehat{\otimes}\mathcal{O}_S,\sigma} \mathcal{O}\widehat{\otimes}\mathcal{O}_S$. Si $x$ est une section de $M$, on note ${}^\tau x$ la section $x \otimes 1$ de ${}^\tau M$.

Définition 2.2. *Un chtouca local minuscule de rang $r$ sur $S$ est une paire $(M, \phi_M)$ formée d'un faisceau $M$ de $\mathcal{O}\widehat{\otimes}\mathcal{O}_S$-modules qui est localement libre de rang $r$ pour la topologie de Zariski de $S$, et d'un morphisme $\phi_M : {}^\tau M \to M$ tel qu'il existe $\psi : M \to {}^\tau M$ vérifiant $\phi_M \circ \psi = (z - \pi)$ et $\psi \circ \phi_M = (z - \pi)$.*

Soit $(M, \phi_M)$ un chtouca local minuscule sur $S$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $G_n = Gr(M/z^n M, \phi_M \mod z^n)$. Alors $(G_n)$ est une suite de schémas en groupe finis et plats de présentation finie, munis d'une action de $\mathcal{O}$, avec des inclusions $G_n \to G_{n+m}$, donnant lieu aux suites exactes habituelles. L'existence de $\psi$ dans la définition d'un chtouca local minuscule assure que l'action de $\mathcal{O}$ sur $Lie^*(G_n)$ est linéaire (c'est-à-dire provient du fait que $S$ est un schéma formel sur $\mathrm{Spf}\mathcal{O}$). On dit que $(G_n)$ est un $\mathcal{O}$-module $\pi$-divisible. Comme cette notion est un peu longue à définir, nous énonçons l'équivalence pour la sous-catégorie des $\mathcal{O}$-modules formels $\pi$-divisibles. On appelle $\mathcal{O}$-module formel sur $S$ un groupe formel lisse $X$ muni d'une action de $\mathcal{O}$ telle que l'action tangente de $\mathcal{O}$ sur $\mathrm{Lie}X$ coïncide avec celle provenant des structures de $\mathcal{O}$-algèbre de $\mathcal{O}_S$ et de $\mathcal{O}_S$-module de $\mathrm{Lie}X$.

Proposition 2.3. *(**[Gen96]**, ch. I, prop. 2.2.3 et 2.2.6) On a une équivalence entre la catégorie des $\mathcal{O}$-modules formels $X$ sur $S$ tels que $\pi \in \mathcal{O}$ agisse par une isogénie (notée $X(\pi)$), et la catégorie des chtoucas locaux $(M, \phi_M)$ sur $S$ tels que l'endomorphisme semi-linéaire de $M/zM$ induit par $\phi_M$ soit, localement pour la topologie de Zariski sur $S$, topologiquement nilpotent.*

On dit que $(M, \phi_M)$ est le module de coordonnées de $X$, car $M = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{F}_q}(X, \widehat{\mathbb{G}}_{a,S})$, où $\mathbb{F}_q$ agit sur $\widehat{\mathbb{G}}_{a,S}$ de la manière évidente. L'action de $\mathcal{O}$ provient de l'action de $\mathcal{O}$ sur $X$ et l'action de $\mathcal{O}_S$ vient de l'action de $\mathcal{O}_S$ sur $\widehat{\mathbb{G}}_{a,S}$ par homothéties. De plus l'isogénie de Frobenius $\tau : \widehat{\mathbb{G}}_{a,S} \to \widehat{\mathbb{G}}_{a,S}$ induit une application $\mathrm{Id}_{\mathcal{O}} \otimes \mathrm{Fr}_{\mathcal{O}_S}$-linéaire $\phi_M : {}^\tau M \to M$. La hauteur normalisée de $X$ est le rang de $M$ comme $\mathcal{O}\widehat{\otimes}\mathcal{O}_S$-module et la dimension de $X$ est le rang de $\mathrm{Coker}\,(\phi)$ comme $\mathcal{O}_S$-module.

Dans [7], nous introduisons la notion plus générale de chtouca local, qui n'a pas d'analogue exact en inégales caractéristiques. C'est une version locale des chtoucas de Drinfeld [**Dri77**].

Définition 2.4. *Un chtouca local de rang $r$ sur $S$ est une paire $(M, \phi_M)$ formée d'un faisceau $M$ de $\mathcal{O}\widehat{\otimes}\mathcal{O}_S$-modules qui est localement libre de rang $r$ pour la topologie de Zariski de $S$, et d'un isomorphisme*

$$\phi_M : {}^\tau M[\frac{1}{z-\pi}] \to M[\frac{1}{z-\pi}]$$

*tel que, pour certains entiers $s, t \in \mathbb{Z}$, on ait*

$$(z-\pi)^t M \subset \phi_M({}^\tau M) \subset (z-\pi)^s M.$$

On dira que $M = (M, \phi_M)$ est d'amplitude $\subset [s, t]$ si la condition ci-dessus est vérifiée.

Un morphisme de chtoucas locaux $(M, \phi_M) \to (M', \phi_{M'})$ sur $S$ est un morphisme de faisceaux de $\mathcal{O}\widehat{\otimes}\mathcal{O}_S$-modules $M \to M'$, tel que $\phi_{M'} \circ {}^\tau f = f \circ \phi_M$. La catégorie des chtoucas locaux sur $S$ est $\mathcal{O}$-linéaire.

Une isogénie est un morphisme $f : (M, \phi_M) \to (M', \phi_{M'})$ tel qu'il existe un morphisme $g : (M, \phi_M) \to (M', \phi_{M'})$ et une fonction localement constante $e : S \to \mathbb{N}$ pour lesquels

$g \circ f = z^e$ et $f \circ g = z^e$. La catégorie des chtoucas locaux à isogénie près s'obtient à partir de la catégorie des chtoucas locaux en inversant les isogénies et les isomorphismes dans cette catégorie sont appelés des quasi-isogénies.

Un chtouca local est minuscule s'il est d'amplitude $\subset [0,1]$.

Nous allons maintenant expliquer une variante du lemme de rigidité de Drinfeld (lemme 3 de l'appendice de [**Dri76**]), qui servira dans les deux paragraphes suivants.

On fixe un corps parfait $k$ contenant $\mathbb{F}_q$ et on suppose que $S$ est le spectre d'une algèbre $B$ sur $\mathcal{O}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} k = k[[z]]$, complète pour la topologie $\pi$-adique et sans $\pi$-torsion. Soit $(D, \phi_D)$ un chtouca local à isogénie près sur $k$. Il jouera le rôle de $F$-isocristal pour rigidifier le chtouca local $M$, comme dans [**RZ**].

Soit $(M, \phi_M)$ un chtouca local sur $B$ et $\rho$ une quasi-isogénie entre la restriction de $(M, \phi_M)$ à $B/\pi B$ et l'image inverse de $(D, \phi_D)$ à $B/\pi B$ par le morphisme $k \to B/\pi B$ qui vient de la structure de $\mathcal{O}\widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} k$-algèbre sur $B$.

Soit $K \hat{\hat{\otimes}} B$ le complété de $\mathcal{O}\widehat{\otimes} B[\frac{1}{z}]$ pour la topologie $\pi$-adique de $B$.

Pour $b \in B$ on note $v(b) = \sup\{k \in \mathbb{N}, b \in \pi^k B\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ : ce n'est pas une valuation, mais on a $v(b+b') \geq \min(v(b), v(b'))$ et $v(bb') \geq v(b) + v(b')$ pour $b, b' \in B$ et $v(b) = +\infty$ si et seulement si $b = 0$. Alors

$$K \hat{\hat{\otimes}} B = \{\sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n z^n, b_n \in B, v(b_{-n}) \text{ tend vers } +\infty \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty\}.$$

On définit une sous-$\mathcal{O}\widehat{\otimes} B[\frac{1}{z}]$-algèbre de $K \hat{\hat{\otimes}} B$ en posant

$$\mathcal{C}(B) = \{\sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n z^n, b_n \in B, \frac{v(b_{-n})}{n} \text{ tend vers } +\infty \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty\}.$$

Les éléments de $\mathcal{C}(B)$ donnent des fonctions sur la variété rigide $\mathrm{Spm} B[\frac{1}{\pi}] \times_{\mathrm{Spm} K} \{0 < |z| < 1\}$.

On introduit $\alpha = (1 - \frac{\pi}{z})(1 - \frac{\pi^q}{z})(1 - \frac{\pi^{q^2}}{z})... \in \mathcal{C}(B)$. Comme $\alpha = 1$ modulo $\pi$, $\alpha$ est une unité dans $K \hat{\hat{\otimes}} B$, donc $\alpha$ n'est pas diviseur de 0 dans $\mathcal{C}(B)$.

Lemme 2.5. *Il existe un unique morphisme $R$ de $\mathcal{C}(B)[\frac{1}{\alpha}]$-modules congru à $\rho$ modulo $\pi$ de $M \otimes_{\mathcal{O}\widehat{\otimes} B} \mathcal{C}(B)[\frac{1}{\alpha}]$ vers $D \otimes_{k((z))} \mathcal{C}(B)[\frac{1}{\alpha}]$ vérifiant*

$$R(\phi_M \otimes 1) = (\phi_D \otimes 1)^\tau R.$$

*De plus c'est un isomorphisme de $\mathcal{C}(B)[\frac{1}{\alpha}]$-modules.*

En effet on relève $\rho$ en $r_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}\widehat{\otimes} B[\frac{1}{z}]}(M[\frac{1}{z}], D \otimes_{k((z))} \mathcal{O}\widehat{\otimes} B[\frac{1}{z}])$ et on pose

$$R = \lim_{n \mapsto +\infty} \phi_D ... {}^{\tau^{n-1}}\phi_D {}^{\tau^n} r_0 {}^{\tau^{n-1}}\phi_N^{-1} ... \phi_N^{-1}$$

(où la limite est prise pour la topologie $\pi$-adique).

## 1. Isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld en égales caractéristiques

Le travail [6] a pour but de donner une preuve plus explicite, mais limitée au cas d'égales caractéristiques, du théorème de Faltings affirmant l'isomorphisme des tours de

Lubin-Tate et de Drinfeld [**Fal02**]. Il fait partie d'un livre en commun avec Laurent Fargues [**Far08**].

On garde les notations $\mathcal{O}, K, \pi, q, p$.

On fixe un entier $d \geq 1$ et on note $D$ l'unique $K$-algèbre à division centrale simple (à isomorphisme non unique près) d'invariant $1/d$ et $\mathcal{O}_D$ l'ordre maximal de $D$. Si l'on note $K_d$ l'extension non ramifiée de degré $d$ de $K$, $\mathcal{O}_d$ son anneau d'entiers et $\tau \in \mathrm{Gal}(K_d/K)$ l'automophisme induisant $(\lambda \mapsto \lambda^q)$ sur le corps résiduel, les algèbres $D$ et $\mathcal{O}_D$ s'écrivent simplement comme des algèbres de polynômes non commutatifs $K_d[\Pi]$ (resp. $\mathcal{O}_d[\Pi]$) en une indéterminée $\Pi$ vérifiant les relations $\Pi^d = \pi$ et $\Pi a = \tau(a)\Pi\,,\ \forall a \in K_d$.

On note $\mathcal{B} \subset M_d(\mathcal{O})$ l'ordre d'Iwahori des matrices triangulaires supérieures modulo $\pi$ et

$$P_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \pi & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}\,,$$

de sorte que l'on a $\mathcal{B} = \{\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{diag}(\lambda_{i,0}, \cdots, \lambda_{i,d-1}) P_\pi^i, \lambda_{i,j} \in \mathbb{F}_q\}$.

On note $\breve{K} \supset K_d$ le complété de l'extension maximale non ramifiée de $K$, $\breve{\mathcal{O}}$ son anneau d'entiers et on note encore $\tau$ l'automorphisme de Frobenius de $\breve{K}$.

On note $\mathrm{Nilp}\,\breve{\mathcal{O}}$ la catégorie des $\breve{\mathcal{O}}$-schémas sur lesquels l'image de $\pi$ est localement (pour la topologie de Zariski) nilpotente. Les $\breve{\mathcal{O}}$-schémas formels seront considérés comme des ind-objets de $\mathrm{Nilp}\,\breve{\mathcal{O}}$.

Définition 2.6. *Soit $S$ un $\mathcal{O}$-schéma tel que l'image de $\pi$ soit localement topologiquement nilpotente.*

- *1) Un $\mathcal{O}_D$-module formel est un $\mathcal{O}$-module formel muni d'une action $\mathcal{O}$-linéaire de $\mathcal{O}_D$.*
- *2) Un $\mathcal{O}_D$-module formel $X$ est dit spécial lorsque l'action tangente de $\mathcal{O}_d$ sur* $\mathrm{Lie}X$ *fait de* $\mathrm{Lie}X$ *un $\mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_S$-module inversible.*

Les $\mathcal{O}$-modules formels $\mathbb{X}$ de dimension 1 et hauteur $d$ sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ sont tous isomorphes. On pose

$$\mathbb{X} = \widehat{\mathbb{G}}_{a,\overline{\mathbb{F}}_q} \text{ en tant que groupe formel et } \mathbb{X}(\pi) = \tau^d.$$

La $\mathcal{O}$-algèbre des endomorphismes de $\mathbb{X}$ est $O_D$, dont l'action est définie par

$$\mathbb{X}(\lambda) = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{F}_{q^d}) \text{ et } \mathbb{X}(\Pi) = \tau\,.$$

Le $\mathcal{O}_D$-module formel

$$\mathbb{Y} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \mathbb{X}(\Pi^i \bullet \Pi^{-i})$$

(où $\mathbb{X}(\Pi^i \bullet \Pi^{-i})$ désigne le $\mathcal{O}_D$ module formel obtenu en tordant l'action de $\mathcal{O}_D$ sur $\mathbb{X}$ par l'automorphisme $\Pi^i \bullet \Pi^{-i}$ de $\mathcal{O}_D$) est spécial. L'isogénie $r_{\mathcal{O}^d} = \mathrm{diag}(1, \tau, \cdots, \tau^{d-1}) : \mathbb{X}^d \to \mathbb{Y}$ identifie $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_D}(\mathbb{Y}) \otimes_{\mathcal{O}} K$ à $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_D}(\mathbb{X}^d) \otimes_{\mathcal{O}} K = M_d(K)$ et pour cette identification, $\mathrm{End}_{\mathcal{O}_D}\mathbb{Y} \subset M_d(K)$ est l'ordre d'Iwahori ${}^t\mathcal{B}$ des matrices triangulaires inférieures modulo $\pi$.

On considère le foncteur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}}$ qui à $S \in \operatorname{Nilp} \breve{\mathcal{O}}$ associe l'ensemble des classes d'isomorphie de couples $(X, \rho)$, où

– $X$ est un $\mathcal{O}$-module formel sur $S$ de dimension 1 et hauteur $d$

– $\rho : \mathbb{X}_{S_0} \dashrightarrow X_{S_0}$ est une quasi-isogénie.

L'espace de modules avec structures de niveau « de type Iwahori »

$$\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times} = \{(X, \rho), H_1 \subset \cdots \subset H_{d-1} \subset X(\pi)\}$$

où $(X, \rho)$ est comme dans la définition de l'espace de Lubin-Tate $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}}$ et $H_i$ est un sous-schéma en groupes (avec action de $\mathbb{F}_q$) de $X[\pi]$, fini et plat d'ordre $q^i$, est ind-représenté par

$$\coprod_{h \in \mathbb{Z}} \operatorname{Spf}(\breve{\mathcal{O}}[[x_1, \cdots, x_d]]/(x_1 \cdots x_d - (-1)^d \pi))$$

(dans la suite on considérera toujours $(x_i)_{i \in \{1, \cdots, d\}}$ comme une suite périodique $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$) et les objets universels sont $X = \widehat{\mathbb{G}}_a$ comme groupe formel avec action de $\mathbb{F}_q$ et $X(\pi) = (\tau - x_d) \cdots (\tau - x_1)$, $H_i = \operatorname{Ker}[(\tau - x_i) \cdots (\tau - x_1)]$, et la quasi-isogénie $\rho$ est déterminée par la condition $\rho \equiv \tau^h$ modulo $(x_1 \cdots, x_d)$.

Traduisons ceci en termes de modules de coordonnées. Notons $P = P_\pi \otimes 1$.

Théorème 2.7. *Le module de coordonnées $(M_X, F_X)$ du $\mathcal{O}$-module formel universel $X$ sur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times}$ est*

– $M_X = \mathcal{O}^d \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times}}$

– $F_X = \Phi_X \circ \tau$

*où l'on note $\Phi_X$ la matrice $\operatorname{diag}(x_1, \cdots, x_d) + {}^tP$ et $\tau = \operatorname{Id}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes} \operatorname{Fr}_{\mathcal{O}_{\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times}}}$. La matrice $R_X$ associée à la quasi-isogénie $\rho$ comme dans le lemme 2.5 est*

$$R_X = \lim_{n \to \infty} {}^tP^{n+h}\ {}^{\tau^{n-1}}\Phi_X^{-1} \cdots \Phi_X^{-1} = {}^tP^h \sum_{j \geq 0} \operatorname{diag}(r_{1,j}, \cdots, r_{d,j})\, {}^tP^{-j}$$

*où $r_{i,0} = 1$ et où la limite définissant $r_{i,j}$ converge pour la topologie $(x_1, \cdots, x_d)$-adique. Donc $R_X$ est à coefficients dans $K \mathbin{\widehat{\widehat{\otimes}}} \mathcal{O}_{\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times}}$ et satisfait l'équation $R_X \Phi_X = {}^tP^\tau R_X$.*

On considère le foncteur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ qui à $S \in \operatorname{Nilp} \breve{\mathcal{O}}$ associe l'ensemble des classes d'isomorphie de couples $(Y, \rho)$, où

– $Y$ est un $\mathcal{O}_D$-module formel spécial sur $S$ de hauteur $d^2$

– $\rho : \mathbb{Y}_{S_0} \dashrightarrow Y_{S_0}$ est une quasi-isogénie compatible à l'action de $\mathcal{O}_D$.

D'après Drinfeld [**Dri76**] Le foncteur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ est (ind)-représentable par un $\breve{\mathcal{O}}$-schéma formel (voir aussi [**Gen96**] en égales caractéristiques).

A l'aide de structures de niveau de Drinfeld on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ un foncteur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n}$, qui est (ind-)représenté par un $\breve{\mathcal{O}}$-schéma formel fini et plat $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n}$ au-dessus de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT}}$. La tour $(\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n})_n$ est munie d'une action (à gauche) du groupe $\operatorname{GL}_d(K) \times D^\times$, où $\operatorname{GL}_d(K)$ agit par « correspondances de Hecke » sur les structures de niveau alors que le groupe $D^\times$ agit sur la quasi-isogénie.

Sur la fibre générique au sens de Raynaud $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}^{\mathrm{rig}}$ de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$, $Y[\pi^n]^{\mathrm{rig}}$ est un schéma en groupes (et même en $\mathcal{O}_D$-modules) fini et étale au-dessus de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r}$ qui est localement (pour la topologie étale) isomorphe à $\pi^{-n}\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_D$. Les structures de niveau d'échelon $\pi^n$ : $\pi^{-n}\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_D \xrightarrow{\sim} Y[\pi^n]^{\mathrm{rig}}$ définissent alors un revêtement fini étale galoisien $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n}$ de $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r}$, de groupe de Galois $(\mathcal{O}_D/\pi^n\mathcal{O}_D)^\times$. La tour $(\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n})_n$ est munie d'une action à gauche de $\mathrm{GL}_d(K) \times D^\times$, où $\mathrm{GL}_d(K)$ agit sur les quasi-isogénies et $D^\times$ agit sur la structure de niveau.

On cherche un isomorphisme « $\varprojlim_n$ » $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},n}$ = « $\varprojlim_n$ » $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,n}$ où « $\varprojlim$ » est une sorte de limite projective (en un sens à préciser). On enverra un point $x = (x_m)_m$ de $(\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},m})_m$ sur un point $y = (y_n)_n$ de $(\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,n})_n$, où $y_n$ sera défini à l'aide de séries dépendant de *tous* les $x_m$ : en particulier, si $x$ est à valeurs dans une extension $L$ de $K$ (nécessairement infinie), $y$ sera un point à valeurs dans *le complété* $\pi$*-adique* de $L$.

On construit donc des modèles entiers $\pi$-adiques des deux tours. Ces modèles entiers correspondent à des recouvrements affinoïdes purs, indexés par l'ensemble $\mathcal{I}$ formés des suites strictement croissantes $(\Lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de réseaux de $K^d$ telles que $\Lambda_{i+d} = \pi^{-1}\Lambda_i, \forall i \in \mathbb{Z}$ et qu'il existe un entier $h(\underline{\Lambda})$ tel que $[\Lambda_i : \mathcal{O}^d] = i + h(\underline{\Lambda}), \forall i \in \mathbb{Z}$. Cet ensemble $\mathcal{I}$ est muni d'une action de $\mathbb{Z}$ par décalage des indices et le quotient s'identifie à l'ensemble des chambres de l'immeuble de $\mathrm{PGL}_d(K)$. De plus il est muni d'une action de $(\mathrm{GL}_d(K) \times D^\times)/K^\times$ où $\mathrm{GL}_d(K)$ agit sur les réseaux, et $D^\times$ par décalage des indices. Du côté Drinfeld ces affinoïdes sont définis sur le "rez-de-chaussée" $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{D}r,0}$ (où ils définissent le modèle entier $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0}$ considéré précédemment) et donc le modèle entier $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\infty}$ s'obtient à partir de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,0}$ par normalisation. Du côté Lubin-Tate, l'affinoïde indexé par $\underline{\Lambda} \in \mathcal{I}$ est défini en un niveau correspondant à l'intersection de $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_K)$ et des stabilisateurs des $\Lambda_i$. Dans les deux cas on appelera domaine fondamental l'affinoïde correspondant à $P^{-\bullet}\mathcal{O}^d$ (dont le stabilisateur est $\mathcal{B}^\times$).

Pour $\Lambda \in \mathcal{I}$, on note $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,\Lambda}$ la limite projective complétée des schémas formels $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},n,\Lambda}$. Par recollement on obtient un schéma formel $\pi$-adique $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,\mathcal{I}}$. Ce schéma formel peut être considéré comme une « $\pi$-adification » de la tour de Lubin-Tate.

Nous pouvons maintenant énoncer notre résultat principal.

THÉORÈME 2.8. *Il existe un isomorphisme (explicite)* $(\mathrm{GL}_d(K)\times D^\times)/K^\times$*-équivariant*

$$\varphi : \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,\mathcal{I}} \xrightarrow{\sim} \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\infty}.$$

Nous allons expliquer notre construction de l'isomorphisme entre les domaines fondamentaux.

Du côté Lubin-Tate le domaine fondamental en niveau Iwahori est l'ouvert affinoïde $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}$ de $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times}$, inclus dans la composante $h = 0$, et formé des $(x_1, \cdots, x_d)$ tels que $v(x_i^q/x_{i+1}) \geq 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ (où $v$ est la valuation).

Sur $\breve{\mathcal{M}}^{\mathrm{rig}}_{\mathcal{LT},n,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}$ la structure de niveau est un morphisme $\pi^{-n}\mathcal{O}/\mathcal{O} \to X[\pi^n]$. En identifiant le $\mathbb{F}_q$-dual de $K/\mathcal{O}$ à $\mathcal{O}$ par le résidu $\mathcal{O} \otimes K/\mathcal{O} \to \mathbb{F}_q$, il correspond à un morphisme $M_\sigma : M_X/z^nM_X \to (\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}) \otimes \mathcal{O}_S$ compatible aux Frobenius $F_X$ sur la source et $\tau$ sur le but. A la limite sur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d} =: \mathrm{Spf}\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ on a une matrice $S_{\mathcal{LT}} = \sum_{j\geq 0} \mathrm{diag}(s^{\mathcal{LT}}_{1,j}, \cdots, s^{\mathcal{LT}}_{d,j})\, {}^tP^j$ à coefficients dans $\mathcal{O}\widehat{\otimes}A_{\mathcal{LT},\infty}$ telle que $S_{\mathcal{LT}}\Phi_X = {}^\tau S_{\mathcal{LT}}$

c'est-à-dire $(s_{i,j}^{\mathcal{LT}})^q - x_{i-j} s_{i,j}^{\mathcal{LT}} = s_{i,j-1}^{\mathcal{LT}}$. La condition de structure de niveau à la Drinfeld s'écrit $(s_{i,0}^{\mathcal{LT}})^{q-1} = x_i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Ainsi sur le domaine fondamental $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d} = \mathrm{Spf}\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ on a

– une matrice $R_{\mathcal{LT}} = \mathrm{Id}_d + \sum_{j\geq 1} \mathrm{diag}(r_{1,j}^{\mathcal{LT}}, \cdots, r_{d,j}^{\mathcal{LT}})\, {}^tP^{-j}$, à coefficients dans $K \,\widehat{\widehat{\otimes}}\, \widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ (en fait les $r_{i,j}^{\mathcal{LT}}$ sont des fonctions sur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\mathcal{B}^\times,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}$)
– une matrice $S_{\mathcal{LT}} = \sum_{j\geq 0} \mathrm{diag}(s_{1,j}^{\mathcal{LT}}, \cdots, s_{d,j}^{\mathcal{LT}})\, {}^tP^j$ à coefficients dans $\mathcal{O}\widehat{\otimes} A_{\mathcal{LT},\infty}$,
– le produit $T_{\mathcal{LT}} = S_{\mathcal{LT}} R_{\mathcal{LT}}^{-1}$ qui est à coefficients dans $K \,\widehat{\widehat{\otimes}}\, \widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty}$ et vérifie $T_{\mathcal{LT}}\, {}^tP = {}^\tau T_{\mathcal{LT}}$.

De même sur le domaine fondamental $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\infty,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d} =: \mathrm{Spf}A_{\mathcal{D}r,\infty}$ on a

– une matrice $R_{\mathcal{D}r} = \mathrm{Id}_d + \sum_{j\geq 1} P^{-j}\, \mathrm{diag}(r_{1,j}^{\mathcal{D}r}, \cdots, r_{d,j}^{\mathcal{D}r})$ à coefficients dans $K \,\widehat{\widehat{\otimes}}\, \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ (en fait les $r_{i,j}^{\mathcal{D}r}$ sont des fonctions sur $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}$)
– une matrice $S_{\mathcal{D}r} = \sum_{j\geq 0} P^j\, \mathrm{diag}(s_{1,j}^{\mathcal{D}r}, \cdots, s_{d,j}^{\mathcal{D}r})$ à coefficients dans $\mathcal{O}\widehat{\otimes} A_{\mathcal{D}r,\infty}$ qui exprime la structure de niveau
– le produit $T_{\mathcal{D}r} = S_{\mathcal{D}r} R_{\mathcal{D}r}^{-1}$ qui est à coefficients dans $K \,\widehat{\widehat{\otimes}}\, \widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ et vérifie $PT_{\mathcal{D}r} = {}^\tau T_{\mathcal{D}r}$.

En fait (en tout point de Berkovich des espaces ci-dessus) les matrices $R_{\mathcal{LT}}$ et $R_{\mathcal{D}r}$ sont des fonctions inversibles sur le disque épointé rigide $0 < |z| < 1$ privé des $\pi^{q^i}$ pour $i \in \mathbb{N}$, les matrices $S_{\mathcal{LT}}$ et $S_{\mathcal{D}r}$ sont des fonctions inversibles sur le disque épointé rigide $0 < |z| < 1$ privé des $\pi^{q^i}$ pour $i < 0$ et les matrices $T_{\mathcal{LT}}$ et $T_{\mathcal{D}r}$ sont des fonctions inversibles sur le disque épointé rigide $0 < |z| < 1$ privé des $\pi^{q^i}$ pour $i \in \mathbb{Z}$.

THÉORÈME 2.9. *Il existe un unique isomorphisme de $\breve{\mathcal{O}}$-schémas formels*

$$\varphi_{P^{-\bullet}\mathcal{O}^d} : \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{LT},\infty,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d} = \mathrm{Spf}\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty} \to \mathrm{Spf}\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty} = \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{D}r,\infty,P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}$$

*tel que* $\varphi_{P^{-\bullet}\mathcal{O}^d}^*(T_{\mathcal{D}r}) = {}^tT_{\mathcal{LT}}$.

On introduit un $\overline{\mathbb{F}}_q$-schéma formel affine intermédiaire $\mathrm{Spf}A_{\mathcal{I}nt}$ « classifiant » les matrices $T_{\mathcal{D}r} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} P^j\, \mathrm{diag}(t_{i,j})$ vérifiant l'équation $PT_{\mathcal{D}r} = {}^\tau T_{\mathcal{D}r}$ et certaines conditions supplémentaires.

La construction de l'isomorphisme $\varphi_{P^{-\bullet}\mathcal{O}^d} : \mathrm{Spf}\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty} \to \mathrm{Spf}\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}$ se réduit alors à celle d'un diagramme

$$\mathrm{Spf}\widehat{A}_{\mathcal{LT},\infty} \underset{\text{décomposition}}{\overset{\text{produit}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Spf}A_{\mathcal{I}nt} \underset{\text{produit}}{\overset{\text{décomposition}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Spf}\widehat{A}_{\mathcal{D}r,\infty}.$$

tel que les composées de deux flèches superposées soient l'identité. On peut représenter les matrices $R_{\mathcal{LT}}, \cdots$ comme des matrices triangulaires de taille infinie, dont les lignes et les colonnes sont indexées par $\mathbb{Z}$ et dont les diagonales parallèles à la diagonale principale sont périodiques de période $d$. Par exemple $R_{\mathcal{LT}}$ et $S_{\mathcal{LT}}$ sont représentées par

$$\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & 1 & r_{i-1,1} & r_{i-1,2} & \cdots \\ \cdots & 0 & 1 & r_{i,1} & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & s_{i-1,0} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & s_{i,1} & s_{i,0} & 0 & \cdots \\ \cdots & s_{i+1,2} & s_{i+1,1} & s_{i+1,0} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Les morphismes de décomposition ci-dessus sont donc des décompositions de Birkhoff pour des matrices infinies. Ce sont les limites de décompositions de Bruhat pour les matrices finies extraites, elles-mêmes données par des formules de type Cramer.

L'équation $PT_{\mathcal{D}r} = {}^{\tau}T_{\mathcal{D}r}$ apparaît aussi en inégales caractéristiques. Si l'on considère un point d'une des tours défini sur $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$, l'analogue de la matrice $T$ en inégales caractéristiques est à coefficients dans $B^+_{\text{cris}}$, et apparaît dans [**Far08**], II.10, sous le nom de matrice $X$, reliant le module de Tate et le module de Dieudonné.

## 2. Théorie de Fontaine en égales caractéristiques

Nous allons utiliser le lemme 2.5 pour associer une structure de Hodge-Pink à un chtouca local rigidifié sur une base affine $\pi$-adique et sans $\pi$-torsion. Les structures de Hodge-Pink ont été introduites dans [**Pin97**]. Dans le cas minuscule une structure de Hodge-Pink est simplement une structure de Hodge d'amplitude $\subset [0,1]$. Voici la définition générale, où $B, (M, \phi_M), (D, \phi_D), \rho$ sont comme dans le lemme 2.5.

Définition 2.10. *On appelle structure de Hodge-Pink un $(B[\frac{1}{\pi}])[[z-\pi]]$-module libre $V$ muni d'un isomorphisme*

$$V \otimes_{(B[\frac{1}{\pi}])[[z-\pi]]} (B[\frac{1}{\pi}])((z-\pi)) \simeq D \otimes_{k((z))} (B[\frac{1}{\pi}])((z-\pi)).$$

On a un morphisme $\mathcal{C}(B) \to (B[\frac{1}{\pi}])[[z-\pi]]$ (si on voit $\mathcal{C}(B)$ comme un espace de fonctions du disque épointé rigide $0 < |z| < 1$ vers $B$, c'est la restriction à un voisinage formel de $\pi$). Il s'étend en un morphisme $\mathcal{C}(B)[\frac{1}{\alpha}] \to (B[\frac{1}{\pi}])((z-\pi))$.

Définition 2.11. *La structure de Hodge-Pink sur $D$ associée à $(M, \phi_M)$ et à $\rho$ est*

$$\begin{aligned} V &= {}^{\tau}R(\phi_M^{-1}(M \otimes_{\mathcal{O}\widehat{\otimes}B} (B[\frac{1}{\pi}])[[z-\pi]])) \\ &= (\phi_D \otimes 1)^{-1}(R(M \otimes_{\mathcal{O}\widehat{\otimes}B} (B[\frac{1}{\pi}])[[z-\pi]])). \end{aligned}$$

Nous montrons dans [7] que la structure de Hodge-Pink permet de reconstruire le $\mathcal{O}\widehat{\otimes}B[\frac{1}{z}]$-module $M[\frac{1}{z}]$, c'est-à-dire qu'elle détermine $M$ à isogénie près. Il semble très difficile dans cette généralité de déterminer quelles structures de Hodge-Pink sont associées à un chtouca local. Nous répondons à cette question dans le cas où $B$ est un anneau de valuation discrète complet, en montrant l'analogue en égales caractéristiques du théorème “faiblement admissible implique admissible” de Colmez et Fontaine [**CF00**]. Hartl [**Har05**] a étendu ce résultat à certains anneaux de valuation non discrète en s'appuyant sur [**HP04**] qui adapte à la situation d'égales caractéristiques les anneaux de Fontaine et certains résultats de Kedlaya [**Ked05**].

Au contraire notre point de vue est de n'introduire aucun anneau analogue aux anneaux de Fontaine, et aucun groupe de Galois et en particulier, si la base est le spectre d'un anneau de valuation discrète, de ne pas recourir à une clôture algébrique de son corps des fractions. Avec les notations du paragraphe 1, les anneaux analogues aux anneaux de Fontaine contiennent les valeurs des coefficients des matrices $S$ et $T$ en un point de Berkovich de l'une de deux tours et nous ne considérons ici que des anneaux qui contiennent les valeurs des coefficients de la matrice $R$. Ce point de vue est mieux adapté à la théorie entière.

Examinons le cas d'une base non nécessairement $\pi$-adique. On associe aux chtoucas locaux rigidifiés sur un schéma formel des structures de Hodge-Pink sur sa fibre générique au sens de Raynaud-Berthelot. En effet on peut recouvrir cette variété rigide analytique par des spectres d'algèbres de Tate, dont les anneaux d'entiers sont des algèbres $\pi$-adiques et sans $\pi$-torsion, de sorte qu'on est ramené au cas affine $\pi$-adique et sans $\pi$-torsion. Dans le cas universel où la base est un espace de modules de chtoucas locaux rigidifiés, la structure de Hodge-Pink associée au chtouca local universel définit une application vers l'espace de modules des structures de Hodge-Pink, appelée application des périodes (voir [**RZ**] chapitre 4 et [**Har05**]).

Supposons maintenant que la base est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet $\mathcal{O}_L$ de corps résiduel $k$ parfait. On note $L$ le corps des fractions de $\mathcal{O}_L$. On suppose $\mathcal{O}_L$ muni d'une structure de $\mathcal{O}$-algèbre de sorte que l'image de $\pi$ dans $\mathcal{O}_L$ soit un élément non nul de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_L$.

Soit $D$ un chtouca local à isogénie près sur $k$. On note $t_N(D)$ l'unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que le déterminant de la matrice de $\Phi_D$ dans une base de $D$ sur $k((z))$ soit le produit de $z^k$ et d'une unité. On note $U_D = {}^{\tau}D \otimes_{k((z))} L[[z-\pi]]$. On rappelle qu'une structure de Hodge-Pink sur $D$ est un $L[[z-\pi]]$-réseau $V_D$ dans $U_D \otimes_{L[[z-\pi]]} L((z-\pi)) = {}^{\tau}D \otimes_{k((z))} L((z-\pi))$. On note $t_H(D)$ l'unique $l \in \mathbb{Z}$ tel que $\det(V_D) = (z-\pi)^{-l}\det(U_D)$.

DÉFINITION 2.12. *Une structure de Hodge-Pink $V$ sur $D$ est dite faiblement admissible si $t_H(D) = t_N(D)$ et pour tout sous-objet $D'$ de $D$ (c'est-à-dire tout sous-$k((z))$-espace vectoriel $D'$ tel que $\phi_D({}^{\tau}D') = D'$), en posant $V' = V \cap ({}^{\tau}D' \otimes_{k((z))} L((z-\pi)))$ on ait $t_H(D') \leq t_N(D')$.*

Le théorème "faiblement admissible implique admissible" est le suivant.

THÉORÈME 2.13. *Une structure de Hodge-Pink sur $D$ provient d'un chtouca local sur $\mathcal{O}_L$ si et seulement si elle est faiblement admissible.*

La preuve que nous donnons dans [7] est très voisine de la preuve d'un résultat en théorie entière, dont nous allons maintenant donner l'énoncé.

Mentionnons que pour les chtoucas minuscules sur une base quelconque on possède une théorie cristalline et le théorème de relèvement de Grothendieck [**Gro70**] comme pour les groupes $p$-divisibles. Quand la base est le spectre d'un anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_L$ comme précedemment, on a l'analogue des résultats démontrés par Breuil [**Bre02**] à la suite de [**Fal99**]. Soit $S = \mathcal{O}\widehat{\otimes}\mathcal{O}_L[[\frac{\pi^q}{z}]]$.

PROPOSITION 2.14. *Soit $V$ est une structure de Hodge-Pink faiblement admissible "minuscule", c'est-à-dire $U_D \subset V_D \subset (z-\pi)^{-1}U_D$. Il y a une bijection entre les chtoucas locaux (minuscules) sur $\mathcal{O}_L$ dans la classe d'isogénie déterminée par $V$ et les $S$-module* *libres $\mathcal{M}$, munis d'un isomorphisme*

$$\mathcal{M} \otimes_S S[\frac{1}{z}] \simeq {}^{\tau}D \otimes_{k((z))} S[\frac{1}{z}],$$

*et "fortement divisibles", c'est-à-dire tels que*

$$S.z^{-1}\ {}^{\tau}((\phi_D \otimes 1)(\mathcal{M} \cap (z-\pi)V_D)) = \mathcal{M}.$$

Pour les chtoucas locaux non nécessairement minuscules, on a une théorie entière semblable à celle qui existe en inégales caractéristiques si on impose une condition qui se lit sur la structure de Hodge-Pink et qui fait penser à la transversalité de Griffiths. Cette condition est automatique pour les chtoucas locaux minuscules. Elle prend plusieurs formes, dont certaines gardent un sens en inégales caractéristiques, et y sont toujours vérifiées.

## 3. Valeurs spéciales des fonctions $L$ en caractéristique $p$

Le travail [8], réalisé en 2004 et rédigé récemment, interprète les valeurs spéciales de fonctions $L$ en caractéristique $p$ à l'aide de groupes d'extensions dans la catégorie des chtoucas, et d'un peu de théorie de Fontaine en égales caractéristiques. Il y a une analogie avec la conjecture de Bloch-Kato [**BK90**], surtout avec le point de vue de [**Kat93, Fon92, FPR94**], mais il n'y a pas d'équation fonctionnelle, la cohomologie cohérente apparaît à la place de la cohomologie étale et la difficulté n'est pas du tout la même ! L'élément zeta de Kato est introduit dans [**Kat93**] dans certains cas (en particulier comme générateur du déterminant de la cohomologie d'un faisceau $\ell$-adique sur un courbe lisse sur $\mathbb{F}_q$). Dans notre situation l'élément zeta peut toujours être défini, et les démonstrations sont très simples. Les valeurs spéciales sont transcendantes en général, mais les démonstrations sont essentiellement algébriques, sans difficultés d'analyse. On utilise la formule des traces d'Anderson [**And00, BP04**], qui est une variante de la formule des points fixes de Woods-Hole. Le rapport avec d'autres travaux sur les valeurs spéciales en caractéristique $p$, comme [**AT90**], n'est pas immédiat.

Les chtoucas sont plus généraux que les $t$-motifs d'Anderson [**And86**], et constituent un bon cadre pour ce problème, car les calculs de groupes d'extension dans la catégorie des chtoucas sont particulièrement aisés.

Soit $X$ une courbe projective lisse sur $\mathbb{F}_q$. On note $\mathrm{Fr} : X \to X$ le morphisme $x \mapsto x^q$. Soit $C = \mathrm{Spec} A$ une courbe affine lisse sur $\mathbb{F}_q$. On note $F$ le corps des fractions de $A$. On suppose $C$ et $X$ géométriquement irréductibles pour simplifier. On appelle chtouca un quadruplet $(\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j)$, où $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ des fibrés vectoriels sur $C \times X$, et $\mathcal{E} \xrightarrow{i} \mathcal{E}' \xleftarrow{j} (\mathrm{Id} \times \mathrm{Fr})^*(\mathcal{E})$ des morphismes qui sont des isomorphismes au point générique de $C \times X$. On note $\tau$ l'application qui à une section de $\mathcal{E}$ associe la section de $(\mathrm{Id} \times \mathrm{Fr})^*(\mathcal{E})$ qui est son image inverse. On note $Z(\det(i))$ et $Z(\det(j))$ les hypersurfaces de $C \times X$, lieux des zéros de $\det(i)$ et $\det(j)$.

Soit $v \in |C|$, et $A_v$ et $F_v$ les complétés de $A$ et $F$ en $v$.

Soit $(\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j)$ un chtouca tel que $Z(\det(i))$ et $Z(\det(j))$ ne contiennent pas $\{v\} \times X$. Soit $U$ l'ouvert de $X$ tel que

$$\{v\} \times U = \{v\} \times X \backslash \Big( \{v\} \times X \cap \big( Z(\det(i)) \cup Z(\det(j)) \big) \Big).$$

Alors $(\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j)$ définit une représentation galoisienne $\pi_1(U) \to GL_r(A_v)$ où $r$ est le rang de $\mathcal{E}$. Donc pour tout point fermé $x \in |U|$ on possède une classe de conjugaison dans $GL_r(A_v)$.

En fait nous demanderons seulement que $Z(\det(i))$ ne contienne pas $\{v\} \times X$. A tout $x \in |X|$ tel que $v \times x$ n'appartienne pas à $Z(\det(i))$ on peut associer une classe de conjugaison dans $M_r(A_v)$, et le produit infini des polynômes caractéristiques duaux de ces classes de conjugaison est la fonction $L$.

Voici la définition formelle des fonctions $L$. Pour $x \in |X|$, on note $k(x)$ son corps résiduel et $d_x$ son degré sur $\mathbb{F}_q$. La restriction $\mathcal{E}_x$ de $\mathcal{E}$ à $C \times \{x\}$ est un $A \otimes k(x)$-module libre. Pour $x \in |X|$ tel que $Z(\det(i)) \not\supset C \times \{x\}$, le facteur local de la fonction $L$ de $(\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j)$ est par définition

$$\begin{aligned} L(x, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j), T) &= \det_F(1 - T i^{-1} j \tau|_{\mathcal{E}_x \otimes_A F})^{-1} \\ &= \det_{F \otimes_{\mathbb{F}_q} k(x)}(1 - T^{d_x} (i^{-1} j \tau)^{d_x}|_{\mathcal{E}_x \otimes_A F})^{-1} \in 1 + T^{d_x} F[[T^{d_x}]]. \end{aligned}$$

Soit $S$ une partie finie de $|X|$ telle que $\{v\} \times S$ contienne $(\{v\} \times X) \cap Z(\det(i))$. On pose $L_S(\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j), T) = \prod_{x \in |X| \setminus S} L(x, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j), T) \in 1 + TF[[T]]$. On montre que l'image de ce produit dans $1 + TF_v[[T]]$ appartient à $1 + TA_v\langle\langle T\rangle\rangle$ , où $A_v\langle\langle T\rangle\rangle$ est l'algèbre de Tate. Il existe $r \in \mathbb{N}$ et $G \in 1 + TA_v\langle\langle T\rangle\rangle$ uniques tels que $L_S((\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j), T) = (1-T)^r G(T)$ et $G(1) \neq 0$. On dit que $r$ est l'ordre d'annulation en 1 et $G(1) \in A_v \setminus \{0\}$ la valeur spéciale, notée $L_S^*((\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j), 1)$.

Supposons pour simplifier que $Z(\det(i))$ ne contient aucun des $\{c\} \times X$ pour $c \in |C|$. Notons $R\Gamma(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j))$ le complexe de $A$-modules qui calcule les groupes d'extension de $(\mathcal{O}, \mathcal{O}, \mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ par $(\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j)$ dans la catégorie des couples $(\mathcal{F}, \mathcal{F}', \tilde{i}, \tilde{j})$, où $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont des fibrés vectoriels sur $C \times X$, munis de morphismes $\mathcal{F} \xrightarrow{\tilde{i}} \mathcal{F}' \xleftarrow{\tilde{j}} {}^\tau\mathcal{F}$. On montre que ce complexe est le cône du morphisme de complexes

$$R\Gamma(X, \mathcal{E}) \xrightarrow{i - j\tau} R\Gamma(X, \mathcal{E}').$$

On en déduit un isomorphisme de $A$-modules inversibles

$$\det(R\Gamma(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j)))^{-1} \simeq \det(R\Gamma(X, \mathcal{E}))^{-1} \otimes \det(R\Gamma(X, \mathcal{E}')) \simeq \det(\operatorname{Coker} i),$$

où le deuxième isomorphisme vient de la suite exacte $0 \to \mathcal{E} \xrightarrow{i} \mathcal{E}' \to \operatorname{Coker} i \to 0$. Cette identification peut être considérée comme l'analogue de l'élément zeta introduit par Kato dans 3.2.2 (iv) et le paragraphe 3.5 de [**Kat93**] comme générateur du déterminant de la cohomologie d'un faisceau $\ell$-adique sur un courbe lisse sur $\mathbb{F}_q$.

Pour $w \in S$ on note $\mathcal{O}_w$ l'anneau des fonctions sur un voisinage formel de $w$ dans $X$, et $\mathcal{M}_w$ et $\mathcal{M}_{w'}$ les $A_v \widehat{\otimes} \mathcal{O}_w$-modules libres obtenus par restriction de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$. Le complexe

$$\mathcal{C}_w = (\mathcal{M}_w \xrightarrow{i - j\tau} \mathcal{M}'_w)$$

calcule les groupes d'extension dans une catégorie de chtoucas locaux. Grâce à la théorie de Fontaine en égales caractéristiques, sous une hypothèse supplémentaire, on a une suite exacte tout à fait analogue à la suite exacte habituelle $0 \to H^0 \to D \to D \oplus (H_{dR}/\mathrm{Fil}^0 H_{dR}) \to H^1_f \to 0$ (cf [**BK90**] corollaire 3.8.4) mais où $H_{dR}/\mathrm{Fil}^0 H_{dR}$ est remplacé par $\operatorname{Coker} i$. La raison en est que les structures de Hodge doivent être remplacées par des structures de Hodge-Pink (voir [7]) et que $\operatorname{Coker} i$ joue le même rôle dans les calculs de groupes d'extensions de structures de Hodge-Pink que $H_{dR}/\mathrm{Fil}^0 H_{dR}$ pour les structures de Hodge. On en déduit une identification $\det(\bigoplus_w \mathcal{C}_w)^{-1} = \det(\operatorname{Coker} i) \otimes_A A_v$, qui existe encore sans cette hypothèse supplémentaire.

Le cône de

$$R\Gamma(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j)) \otimes_A A_v \to \bigoplus_w \mathcal{C}_w$$

calcule donc des groupes d'extensions à support compact sur $X - S$ et sera noté

$$R\Gamma_{S,v}(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j)).$$

Ce qui précède fournit une identification

$$\det(R\Gamma_{S,v}(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j)))^{-1} = A_v,$$

donnée par un générateur $\mathrm{zeta}_{S,v}$.

Les groupes de cohomologie de $R\Gamma_{S,v}(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j))$ sont nuls sauf en degré 1 et 2 et on a un morphisme de $A_v$ -modules de type fini

$$H^1_{S,v}(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j)) \xrightarrow{\alpha} H^2_{S,v}(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j)).$$

Le morphisme de $F_v$-espaces vectoriels $\alpha \otimes 1_{F_v}$ est analogue au morphisme d'accouplement des hauteurs $H^1_f(M^*(1))^*_{\mathbb{R}} \to H^1_f(M)_{\mathbb{R}}$ de la "suite exacte fondamentale", quand $M$ est un motif sur un corps de nombre.

On suppose que $\alpha \otimes 1_{F_v}$ est un isomorphisme (il n'y a pas de raison que ce soit toujours vrai). Alors $\alpha \otimes 1_{F_v}$ fournit une autre identification

$$\lambda : \det(R\Gamma_{S,v}(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j)))^{-1} \otimes_{A_v} F_v \to F_v.$$

Théorème 2.15. *Sous l'hypothèse que $\alpha \otimes 1_{F_v}$ est un isomorphisme, l'ordre d'annulation de $L_S((\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j), T)$ en 1 est*

$$\dim H^1_{S,v}(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j)) \otimes_{A_v} F_v = \dim H^2_{S,v}(X, (\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j)) \otimes_{A_v} F_v$$

*et $L^*_S((\mathcal{E}, \mathcal{E}', i, j), 1) = \lambda(\mathrm{zeta}_{S,v})$.*

CHAPITRE 3

# Estimées $p$-adiques pour les valeurs propres de Hecke

Le petit travail [9] (réalisé en 2004 et rédigé récemment) avait pour origine la question de la réduction modulo $p$ de la correspondance de Langlands sur les corps de fonctions de caractéristique $p$. En fait le problème est que la réduction modulo $p$ de l'isomorphisme de Satake ne fait plus intervenir l'anneau des représentations du groupe dual, mais un anneau beaucoup plus dégénéré. En revanche l'étude des exposants de $p$ intervenant dans l'isomorphisme de Satake, qui sont explicités dans [**Gro98**], donne des estimées sur les valuations $p$-adiques des valeurs propres d'opérateurs de Hecke pour les formes automorphes cuspidales sur les corps de fonctions et pour les formes automorphes cuspidales cohomologiques sur les corps de nombres.

Sur les corps de fonctions, on a des estimées pour les formes automorphes cuspidales pour tous les groupes réductifs, mais pour $GL_n$ grâce à la correspondance de Langlands établie par Laurent Lafforgue [**LLaf02**], on obtient la conséquence suivante :

PROPOSITION 3.1. *Soit $U$ un ouvert de $X$, $\ell$ premier à $p$, et $\mathcal{F}$ un faisceau $\ell$-adique lisse irréductible de rang $r$ sur $U$ (à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$) dont le déterminant est un caractère d'ordre fini. Soit $x \in |U|$. D'après le (i) du théorème VII.6 (iv) de* [**LLaf02**]*, les valeurs propres $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ de* $\mathrm{Frob}_x$ *sont dans $\overline{\mathbb{Q}}$. Soit $\mathfrak{p}$ une place de $\overline{\mathbb{Q}}$ au-dessus de $p$ et $v_\mathfrak{p}$ la valuation $\mathfrak{p}$-adique, normalisée de telle sorte que $v_\mathfrak{p}(q^{\deg(x)}) = 1$. Alors, en permutant les indices pour que $v_\mathfrak{p}(\alpha_1) \leq \cdots \leq v_\mathfrak{p}(\alpha_r)$, on a pour tout $i \in \{0, \ldots r\}$,*

$$\sum_{j=1}^{i} v_\mathfrak{p}(\alpha_j) \geq \sum_{j=1}^{i} \frac{2j-r-1}{2} = -\frac{i(r-i)}{2} \tag{2}$$

*(ces inégalités étant bien sûr des égalités pour $i=0$ et $i=r$).*

On peut réexprimer ces inégalités en disant que le polygône de Newton (convexe) des valuations $\mathfrak{p}$-adiques des valeurs propres de $\mathrm{Frob}_x$, dont les extrémités sont les points $(i, \sum_{j=1}^{i} v_\mathfrak{p}(\alpha_j))$ pour $i = 0, \ldots, r$, est au-dessus du polygône convexe de pentes $-\frac{r-1}{2}, \ldots, \frac{r-1}{2}$, dont les extrémités sont les points $(i, -\frac{i(r-i)}{2})$ pour $i = 0, \ldots, r$.

Les estimées du corollaire 3.1 impliquent celles proposées par Deligne dans le (iv) de la conjecture (1.2.10) page 155 de [**Del80**] et celles montrées par Laurent Lafforgue dans le théorème VII.6 (iv) de [**LLaf02**].

Sur les corps de nombres on obtient des estimées qui correspondent exactement, par la correspondance conjecturale entre formes automorphes algébriques et motifs, aux estimées de Katz-Mazur [**Ma72, Maz73**]. En fait ces estimées étaient déjà connues (le cas d'un système local trivial figure dans [**Cl94**]).

CHAPITRE 4

# Fonctorialité dans le programme de Langlands géomérique

Depuis 2005 je m'intéresse surtout au programme de Langlands géométrique. Je vais présenter un article en commun avec Sergey Lysenko sur la correspondance theta géométrique, et expliquer mon programme de recherches actuel.

Rappelons d'abord le problème dans le cadre "arithmétique" et sur les corps de fonctions.

Soit $X$ une courbe projective lisse sur $\mathbb{F}_q$, et $G$ un groupe réductif déployé sur $\mathbb{F}_q$. On rappelle que le groupe dual $\hat{G}$ est le groupe réductif défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ dont les poids, racines, copoids et coracines sont les copoids, coracines, poids et racines de $G$. Par exemple les groupes déployés $GL_n$, $SO_{2n+1}$, $Sp_{2n}$, $SO_{2n}$ ont pour duaux respectifs $GL_n$, $Sp_{2n}$, $SO_{2n+1}$, $SO_{2n}$. On note $\mathrm{Bun}_G$ le champ classifiant les $G$-torseurs sur $X$ (localement triviaux pour la topologie étale). Soit $\ell$ un nombre premier distinct de $p$. En gros on espère associer à toute représentation continue $\rho : \pi_1(X) \to \hat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ une fonction $f_\rho$ sur $\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)$ qui est propre pour les opérateurs de Hecke avec des valeurs propres déterminées par $\rho$ et dont le "premier coefficient de Fourier" vaut 1 (condition dite de normalisation de Whittaker) et obtenir ainsi une base de toutes les fonctions sur $\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)$.

Soit $H$ un autre groupe réductif déployé sur $\mathbb{F}_q$ et $\iota : \hat{H} \to \hat{G}$ un morphisme. Pour toute représentation continue $\rho : \pi_1(X) \to \hat{H}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ on a $\iota \circ \rho : \pi_1(X) \to \hat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. On rappelle que $f_\rho$ et $f_{\iota\circ\rho}$ sont des fonctions sur $\mathrm{Bun}_H(\mathbb{F}_q)$ et $\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)$ respectivement. On cherche alors une fonction $K$ sur $\mathrm{Bun}_H(\mathbb{F}_q)\times\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)$ telle que $\int_{\mathrm{Bun}_H(\mathbb{F}_q)} K(x,y) f_\rho(x)dx = f_{\iota\circ\rho}(y)$ pour tout $\rho : \pi_1(X) \to \hat{H}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. De façon rigoureuse $K$ doit être compatible avec les opérateurs de Hecke et la normalisation de Whittaker, comme nous allons le rappeler dans un cadre géométrique.

En effet on peut chercher un objet $\mathcal{F}$ dans la catégorie dérivée $D(\mathrm{Bun}_H \times \mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ des faisceaux $\ell$-adiques sur $\mathrm{Bun}_G$, muni d'une action de Frobenius dont la trace soit $K$ (on ne s'attend pas à ce que $\mathcal{F}$ soit pervers).

On fixe un corps algébriquement clos $k$ de caractéristique $p > 2$ et on suppose que $X$ est une courbe projective lisse sur $k$. On garde $\ell$ un nombre premier différent de $p$. Les groupes $H$ et $G$ sont supposés définis sur $k$. On se donne toujours $\iota : \hat{H} \to \hat{G}$. On cherche $\mathcal{F} \in D(\mathrm{Bun}_H \times \mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, compatible aux foncteurs de Hecke et à la normalisation de Whittaker, comme nous allons l'expliquer maintenant. Soit $F : D(\mathrm{Bun}_H, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to D(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ le foncteur défini par $F(\mathcal{K}) = p_{2,!}(\mathcal{F} \otimes p_1^*(\mathcal{K}))$ pour $\mathcal{K} \in D(\mathrm{Bun}_H, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, où $p_1$ et $p_2$ sont les projections de $\mathrm{Bun}_H \times \mathrm{Bun}_G$ sur $\mathrm{Bun}_H$ et $\mathrm{Bun}_G$.

Grâce à l'équivalence de Satake géométrique **[MV08]** pour toute représentation $W$ de $\hat{G}$ on a un foncteur de Hecke $H_{G,W} : D(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to D(\mathrm{Bun}_G \times X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Donnons l'exemple des représentations minuscules de $GL_n$. Pour $G = GL_n$ et $i \in \{1, \dots, n\}$, le foncteur $H_{GL_n,\Lambda^i\mathrm{St}}$ (où St est la représentation standard du groupe dual $\hat{G} = GL_n$) est défini comme suit. On rappelle que $\mathrm{Bun}_n = \mathrm{Bun}_{GL_n}$ est le champ classifiant les fibrés vectoriels de rang $n$ sur $X$. Soit $\mathcal{H}_n^i$ le champ classifiant les quadruplets $(x, M, M', \beta : M' \hookrightarrow M)$, où $x \in X$ et $M', M \in \mathrm{Bun}_n$ sont tels que $M' \subset M \subset M'(x)$ et que $M/M'$ soit de longueur $i$. On a un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Bun}_n & \stackrel{h^{\leftarrow}}{\leftarrow} & \mathcal{H}_n^i & \stackrel{\mathrm{supp}\times h^{\rightarrow}}{\rightarrow} & X \times \mathrm{Bun}_n \\ M & \leftarrow & (x, M, M', \beta) & \mapsto & (x, M') \end{array}$$

et le foncteur $H_{GL_n, \Lambda^i \mathrm{St}}$ est défini par la formule

$$H_{GL_n, \Lambda^i \mathrm{St}}(\mathcal{K}) = (\mathrm{supp} \times h^{\rightarrow})_! h^{\leftarrow *}(\mathcal{K}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell(\frac{(n-i)i}{2})[(n-i)i].$$

De même toute représentation $W$ de $\hat{H}$ détermine un foncteur $H_{H,W} : D(\mathrm{Bun}_H, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to D(\mathrm{Bun}_H \times X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

Soit $\psi : \mathbb{F}_p \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$ un caractère non trivial, et $\mathcal{L}_\psi$ le faisceau d'Artin-Schreier sur $\mathbb{A}^1$ associé à $\psi$. Le foncteur de Whittaker

$$\mathrm{Whit}_G : D(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to D(\mathrm{Spec} k, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

est défini de la façon suivante (voir **[Lys02]**). Soient $T \subset B \subset G$ un tore maximal et un Borel dans $G$. On choisit un $T$-torseur $\mathcal{F}_T$ muni, pour chaque racine simple $\check{\alpha}$ de $G$, d'un isomorphisme $\mathcal{F}_T^{\check{\alpha}} \simeq \Omega$ (en notant $\mathcal{F}_T^{\check{\alpha}}$ le fibré en droites extension des scalaires de $\mathcal{F}_T$ par $T \xrightarrow{\check{\alpha}} \mathbb{G}_m$). Soit $\mathrm{Bun}_N^{\mathcal{F}_T}$ le champ classifiant les $B$-torseurs $\mathcal{F}_B$ sur $X$ muni d'un isomorphisme $\mathcal{F}_B \times_B T \simeq \mathcal{F}_T$. On a $\pi : \mathrm{Bun}_N^{\mathcal{F}_T} \to \mathrm{Bun}_G$ (qui à $\mathcal{F}_B$ associe $\mathcal{F}_B \times_B G$) et $\epsilon : \mathrm{Bun}_N^{\mathcal{F}_T} \to \mathbb{A}^1$ (qui à $\mathcal{F}_B$ associe la somme sur les racines simples de l'extension de $\mathcal{O}$ par $\Omega$ associée à $\mathcal{F}_B$, grâce à l'isomorphisme $\mathcal{F}_T^{\check{\alpha}} \simeq \Omega$). Soit $d_N$ la dimension de $\mathrm{Bun}_N^{\mathcal{F}_T}$ et $d_G$ la dimension de $\mathrm{Bun}_G$. On note $P_\psi^0 = \epsilon^*(\mathcal{L}_\psi)[d_N]$. Alors pour $\mathcal{K} \in D(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, on pose

$$\mathrm{Whit}_G(\mathcal{K}) = \mathrm{R}\Gamma_c(\mathrm{Bun}_N^{\mathcal{F}_T}, P_\psi^0 \otimes \pi^*(\mathcal{K}))[-d_G].$$

On définit de même $\mathrm{Whit}_H$.

A tout $\hat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$-système local $\mathcal{E}$ sur $X$ on espère associer $\mathrm{Aut}_\mathcal{E} \in D(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ tel que $H_{G,W}(\mathrm{Aut}_\mathcal{E}) \simeq \mathrm{Aut}_\mathcal{E} \boxtimes \mathcal{E}$ pour toute représentation $W$ de $\hat{G}$ et $\mathrm{Whit}_G(\mathrm{Aut}_\mathcal{E}) = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$. On cherche un foncteur $F : D(\mathrm{Bun}_H, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to D(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ tel que pour tout $\hat{H}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$-système local sur $X$ on ait $F(\mathrm{Aut}_\mathcal{E}) = \mathrm{Aut}_{\iota_*\mathcal{E}}$ où $\iota_*\mathcal{E}$ est le $\hat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$-système local image de $\mathcal{E}$ par $\iota$. Voici l'énoncé du problème en termes non conjecturaux.

**Problème** Trouver $\mathcal{F} \in D(\mathrm{Bun}_H \times \mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ tel que le foncteur $F : D(\mathrm{Bun}_H, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to D(\mathrm{Bun}_G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ défini par $F(\mathcal{K}) = p_{2,!}(\mathcal{F} \otimes p_1^*(\mathcal{K}))$ pour $\mathcal{K} \in D(\mathrm{Bun}_H, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ satisfasse les deux conditions

- pour toute représentation $W$ de $\hat{G}$, on a un isomorphisme de foncteurs $F \circ H_{H,W|_{\hat{H}}} \simeq H_{G,W} \circ F$,
- on a un isomorphisme de foncteurs $\mathrm{Whit}_G \circ F = \mathrm{Whit}_H$.

## 1. Correspondance theta géométrique

Dans le cas où

- $H = SO_{2n}$, $G = Sp_{2n}$ et $\iota : \hat{H} = SO_{2n} \to \hat{G} = SO_{2n+1}$ est l'inclusion évidente
- $H = Sp_{2n}$, $G = SO_{2n+2}$ et $\iota : \hat{H} = SO_{2n+1} \to \hat{G} = SO_{2n+2}$ est l'inclusion évidente

la correspondance theta géométrique, construite par Sergey Lysenko dans [**Lys06**] donne une solution au problème ci-dessus. Sergey Lysenko a montré la compatibilité aux operateurs de Hecke dans [**Lys08**], en utilisant notre article commun [10]. Bien que le résultat soit connu au niveau des fonctions la preuve géométrique est très difficile. Sergey Lysenko et moi-même montrons la compatibilité à la normalisation de Whittaker dans un article en préparation [**LL08**]. Le résultat était aussi connu dans le cas des fonctions et la géométrisation de la preuve n'est pas difficile.

Pour construire le faisceau theta, il est plus canonique de remplacer $\mathrm{Bun}_{Sp_{2m}}$ par $\mathrm{Bun}_{Sp^{\Omega}_{2m}}$ qui désigne le champ classifiant les fibrés $M$ de rang $2m$ sur $X$ munis d'une forme alternée non dégénérée $\Lambda^2 M \to \Omega$ (le choix d'une racine carrée de $\Omega$ identifie ces deux champs). On note $\widetilde{\mathrm{Bun}}_{Sp^{\Omega}_{2m}}$ la $\mu_2$-gerbe au-dessus de $\mathrm{Bun}_{Sp^{\Omega}_{2m}}$ qui classifie les couples $(M, A)$ avec $M \in \mathrm{Bun}_{Sp^{\Omega}_{2m}}$ et $A$ un fibré en droites sur $X$ muni d'un isomorphisme $A^2 \simeq \det(R\Gamma(X, M))$.

Le produit tensoriel fournit un morphisme $\mathrm{Bun}_{SO_{2n}} \times \mathrm{Bun}_{Sp^{\Omega}_{2n}} \to \mathrm{Bun}_{Sp^{\Omega}_{4n^2}}$ qui se relève en un morphisme

$$\alpha : \mathrm{Bun}_{SO_{2n}} \times \mathrm{Bun}_{Sp^{\Omega}_{2n}} \to \widetilde{\mathrm{Bun}}_{Sp^{\Omega}_{4n^2}}.$$

De même on a un morphisme

$$\alpha' : \mathrm{Bun}_{Sp^{\Omega}_{2n}} \times \mathrm{Bun}_{SO_{2n+2}} \to \widetilde{\mathrm{Bun}}_{Sp^{\Omega}_{4n(n+1)}}.$$

Alors l'objet $\mathcal{F}$ de $D(\mathrm{Bun}_{SO_{2n}} \times \mathrm{Bun}_{Sp^{\Omega}_{2n}})$ ou de $D(\mathrm{Bun}_{Sp^{\Omega}_{2n}} \times \mathrm{Bun}_{SO_{2n+2}})$ qui doit réaliser la fonctorialité est (à un décalage près) $\alpha^*(\mathrm{Aut})$, respectivement $\alpha'^*(\mathrm{Aut})$, où $\mathrm{Aut} \in D(\widetilde{\mathrm{Bun}}_{Sp^{\Omega}_{2m}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est le faisceau theta construit par Sergey Lysenko dans [**Lys06**] (et $m = 2n^2$, respectivement $m = 2n(n+1)$). Il est important de noter que Aut est pervers mais que $\alpha^*(\mathrm{Aut})$ et $\alpha'^*(\mathrm{Aut})$ ne le sont pas (même à un décalage près).

Le but de [10] est de construire une catégorie qui géométrise la représentation de Weil du groupe métaplectique sur un corps local non-archimédien. Soit $x \in X$ et $M_0$ un fibré vectoriel de rang $2m$ sur le disque formel $D_x$, voisinage formel de $x$ dans $X$, muni d'un forme alternée non dégénérée $\Lambda^2 M_0 \to \Omega_{D_x}$. Soit $\widetilde{\mathrm{Bun}}^{x}_{Sp^{\Omega}_{2m}}$ le champ classifiant les $(M, A, \tau)$ avec $(M, A) \in \widetilde{\mathrm{Bun}}_{Sp^{\Omega}_{2m}}$ et $\tau$ un isomorphisme symplectique de la restriction de $M$ à $D_x$ vers $M_0$. Dans [10] nous construisons une catégorie abélienne $\mathcal{C}^x_{\mathrm{Weil}}$ qui s'identifie, pour tout choix d'un sous-fibré lagrangien $L_0$ dans $M_0$, à la catégorie des faisceaux pervers sur $L_0(F_x)$ où $F_x$ est le corps des fonctions sur le disque formel épointé $D^*_x$ (plus précisément $L_0(F_x)$ est un ind-pro-espace vectoriel et cette catégorie est définie comme une double limite et en fait nous construisons une catégorie un peu différente, mais nous donnons tous les ingrédients pour construire $\mathcal{C}^x_{\mathrm{Weil}}$). Des foncteurs d'entrelacement canoniques montrent que cette catégorie $\mathcal{C}^x_{\mathrm{Weil}}$ ne dépend pas du choix de $L_0$ (ces opérateurs apparaissent dans [**Del82**] et ont aussi été étudiés par Hadani et Gurevich [**HG07**] de façon indépendante). A un problème de $\mu_2$-gerbe près $\mathcal{C}^x_{\mathrm{Weil}}$ de dépend que de la restriction de $M_0$ au disque formel épointé et pour cette raison $\mathcal{C}^x_{\mathrm{Weil}}$ est munie d'une action d'une $\mu_2$-gerbe $\widetilde{Sp(M_0)(F_x)}$ sur le groupe de lacets $Sp(M_0)(F_x)$. On a un objet privilégié $Sp(M_0)(\mathcal{O}_x)$-équivariant $I_0 \in \mathcal{C}^x_{\mathrm{Weil}}$ : si $L_0$ est un lagrangien de $M_0$ sur $D_x$, $I_0$ s'identifie au faisceau $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ (avec décalage pervers) sur $L_0(\mathcal{O}_x)$ (en notant $\mathcal{O}_x$ l'anneau des fonctions sur $D_x$). On a aussi une catégorie dérivée $\mathcal{D}^x_{\mathrm{Weil}}$ (qui s'identifie, pour $L_0$ lagrangien de $M_0$, à $D(L_0(F_x), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$).

D'autre part nous construisons un foncteur $\widetilde{Sp(M_0)}(F_x)$-équivariant Glob : $\mathcal{D}^x_{\mathrm{Weil}} \to D(\widetilde{\mathrm{Bun}_{Sp^\Omega_{2m}}}^x, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Soit $(M, A, \tau) \in \widetilde{\mathrm{Bun}_{Sp^\Omega_{2m}}}^x$, $L$ un sous-fibré lagrangien de $M$ sur $X$, $L_0$ l'image par $\tau$ de la restriction de $L$ à $D_x$, $\mathcal{K} \in \mathcal{D}^x_{\mathrm{Weil}} = D(L_0(F_x), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Alors la restriction au point $(M, A, \tau)$ de Glob($\mathcal{K}$) est en gros $R\Gamma_c(H^0(X \setminus \{x\}, L), i^*(\mathcal{K}))$ où $i$ est l'inclusion de $H^0(X \setminus \{x\}, L)$ dans $L_0(F_x)$ (grâce à $\tau$). Enfin nous montrons que dans l'identification entre les objets de $D(\widetilde{\mathrm{Bun}_{Sp^\Omega_{2m}}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ et les objets $Sp(M_0)(\mathcal{O}_x)$-équivariants de $D(\widetilde{\mathrm{Bun}_{Sp^\Omega_{2m}}}^x, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, le faisceau theta Aut correspond à Glob($I_0$).

Soit maintenant $m = 4n^2$ ou $m = 4n(n+1)$. Pour montrer que la restriction à $\mathrm{Bun}_H \times Bun_G$ de Aut est compatible aux foncteurs de Hecke, il suffit de montrer un énoncé similaire dans la catégorie $\mathcal{D}^x_{\mathrm{Weil}}$ associée à $M_0 \otimes V_0$, où $M_0$ et $V_0$ sont des fibrés symplectiques et orthogonaux sur $D_x$. En fait Sergey Lysenko montre essentiellement que la sous-catégorie des objets $SO(V_0)(\mathcal{O}_x) \times Sp(M_0)(\mathcal{O}_x)$-équivariants de $\mathcal{D}^x_{\mathrm{Weil}}$ est équivalente à la catégorie des représentations de $\hat{H}$ avec les actions évidentes (et donc compatibles entre elles) des catégories tannakiennes des foncteurs de Hecke pour $H$ et pour $G$.

## 2. Programme de recherches actuel

Tout ce qui a été dit précédemment est encore vrai si on remplace le corps $k$ par $\mathbb{C}$ et les faisceaux $\ell$-adiques par des $D$-modules et il semble plus aisé dans ce cadre d'obtenir de nouveaux cas de fonctorialités (autres que la correspondance theta).

D'abord Beilinson et Drinfeld conjecturent pour tout groupe réductif $G$ sur $\mathbb{C}$ une équivalence de catégories $\alpha_G$ entre les catégories dérivées de $D$-modules on $\mathrm{Bun}_G$ et de $\mathcal{O}$-modules sur $\mathrm{Sysloc}_{\hat{G}}$ (champ classifiant les $\hat{G}$-systèmes locaux sur $X$) et ils conjecturent que $\mathrm{Whit}_G$ est le composé $D(D\text{-mod}(\mathrm{Bun}_G)) \xrightarrow{\alpha_G} D(\mathrm{Sysloc}_{\hat{G}}, \mathcal{O}) \xrightarrow{R\Gamma} D(\mathrm{Spec}\mathbb{C}, \mathcal{O})$.

Soit $H$ un autre groupe réductif et $\iota : \hat{H} \to \hat{G}$ un morphisme. L'image directe par le morphisme d'extension des scalaires $\bar{\iota} : \mathrm{Sysloc}_{\hat{H}} \to \mathrm{Sysloc}_{\hat{G}}$ est un foncteur $\bar{\iota}_* : D(\mathrm{Sysloc}_{\hat{H}}, \mathcal{O}) \to D(\mathrm{Sysloc}_{\hat{G}}, \mathcal{O})$. Alors

$$\alpha_G^{-1} \circ \bar{\iota}_* \circ \alpha_H : D(D\text{-mod}(\mathrm{Bun}_H)) \to D(D\text{-mod}(\mathrm{Bun}_G))$$

est le foncteur $F$ que l'on cherche. En fait les conjectures générales de Beilinson et Drinfeld impliquent même l'existence de l'objet $\mathcal{F} \in D(D\text{-mod}(\mathrm{Bun}_H \times \mathrm{Bun}_G))$ que nous voudrions construire.

On espère réaliser $\mathcal{F} \in D(D\text{-mod}(\mathrm{Bun}_H \times \mathrm{Bun}_G))$ comme l'homologie chirale d'une algèbre vertex conforme $V$ munie d'un morphisme $V_{\kappa_1}(\mathfrak{h}) \otimes V_{\kappa_2}(\mathfrak{g}) \to V$ (où $V_{\kappa_1}(\mathfrak{h})$ et $V_{\kappa_2}(\mathfrak{g})$ sont les algèbres vertex de Kac-Moody de $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}$ en certains niveaux entiers $\kappa_1$ et $\kappa_2$) qui s'intègre en une action de $H(O) \times G(O)$, et est compatible avec la structure conforme de $V$ (voir [**FBZ01, BD04**] pour la théorie des algèbres vertex et l'homologie chirale, qui est un foncteur dérivé des coinvariants, eux mêmes duaux des blocs conformes).

Cet espoir est réalisé dans les deux cas du paragraphe précédent, en prenant pour $V$ l'algèbre vertex de Weyl $V_{\mathrm{Weyl}}$ associée à l'espace symplectique $M_0 \otimes V_0$. En particulier la catégorie des $V_{\mathrm{Weyl}}$-modules s'identifie à la catégorie des modules sur l'algèbre de Weyl associée à l'espace de Tate symplectique $M_0 \otimes V_0(F_x)$ et remplace donc la catégorie $\mathcal{C}^x_{\mathrm{Weil}}$ du paragraphe précédent. La raison est que pour tout sous-espace lagrangien $L_0$ de $M_0 \otimes V_0$, l'algèbre de Weyl de $M_0 \otimes V_0(F_x)$ s'identifie à l'algèbre des opérateurs différentiels sur $L_0(F_x)$. On voit que la quantification par déformation d'un espace symplectique (réalisée par son algèbre de Weyl) est canonique alors que sa quantification géométrique dépend du choix d'un lagrangien et que l'on doit utiliser les opérateurs d'entrelacements canoniques pour montrer qu'elle est indépendante de ce choix.

Quand $H$ et $G$ sont arbitraires on s'attend à ce que $V$ déforme l'espace des jets d'une variété symplectique munie d'une action hamiltonienne de $H \times G$, que l'on peut expliciter (dans le cas de la correspondance theta, cette variété symplectique est $M_0 \otimes V_0$). Comme la quantification par déformation est plus facile que la quantification géométrique, on espère arriver plus facilement à de nouveaux cas de fonctorialité dans le cadre des $D$-modules.

Les compatibilités du foncteur $F$ aux foncteurs de Hecke et à la normalisation de Whittaker s'expriment par des conditions locales sur $V$.

Dans le cas où $H = SO_{2n}$ et $G = Sp_{2n}$, on peut calculer que les niveaux $\kappa_1$ et $\kappa_2$ sont critiques. On s'attend à ce que cela se produise lorsque l'image d'un $SL_2$ principal de $\hat{H}$ est un $SL_2$ principal de $\hat{G}$ (car dans ce cas la fonctorialité doit être compatible aux opers et à la quantification de Hitchin [**BD97**]).

En arithmétique, d'autres cas de fonctorialité sont obtenus en restreignant à des paires duales dans $SO_{2n}$ ou des groupes exceptionnels les représentation minimales de ces groupes. On espère pour ces paires duales construire $V$ comme un quotient de l'algèbre vertex de Kac-Moody du groupe (qui contient la paire duale) en un certain niveau (cela marche pour $SO_8$). Ce serait un analogue dans le cadre des groupes de lacets des quotients des algèbres enveloppantes par les idéaux de Joseph (qui quantifient les orbites coadjointes nilpotentes minimales).

Pour les séries d'Eisentein (avec $H$ un tore maximal de $G$), le faisceau $\mathcal{F}$ que l'on cherche n'est connu que pour $SL_2$ (par la section 7 de [**BG02**] ou comme cas particulier de la correspondance theta de $SO_2$ vers $SL_2$). En général $\mathcal{F}$ serait un tout petit peu différent de la construction de [**BG02**]. La construction d'une algèbre vertex $V$ dans ce cas donnerait en même temps l'induction automorphe (dans le cadre des $D$-modules bien sûr).

En effet l'homologie chirale donne de façon automatique, pour tout $x \in X$, un foncteur Glob de la catégorie dérivée des $V$-modules vers la catégorie dérivée des $D$-modules sur $\mathrm{Bun}_H^x \times \mathrm{Bun}_G^x$ (champs classifiant les $H$-torseurs et les $G$-torseurs sur $X$ avec structures de niveau complètes en $x$), même si $H$ et $G$ sont des schémas en groupes réductifs sur $X$ formes extérieures de groupes déployés. Cela est totalement différent de la situation en arithmétique, où il est très difficile de montrer que des représentations sont automorphes (par exemple on sait que la représentation minimale de $PSO_8$ est automorphe quand on la construit comme résidu de séries d'Eisentein [**Kaz90**] mais la construction par quantification géométrique utilisée dans [**KP02**] ne semble pas permettre actuellement de le montrer).

# Bibliographie


[And86] G. Anderson. $t$-motives. *Duke Math. J.* 53 :457–502, 1986.

[And00] G. Anderson. An elementary approach to $L$-functions mod $p$. *J. Number Theory*, 80(2) :291–303, 2000.

[AT90] G. Anderson and D. Thakur. Tensor powers of the Carlitz module and zeta values. *Ann. of Math. (2)*, 132(1) :159–191, 1990.

[AD08] G. Arzhantseva et T. Delzant. Examples of random groups. Preprint 2008.

[AS77] M. Atiyah and W. Schmid, *A geometric construction of the discrete series for semisimple Lie groups*, Invent. Math. 42 (1977), 1–62.

[BM83] D. Barbasch and H. Moscovici, *$L^2$-index and the Selberg trace formula*, J. Funct. Anal. 53 (1983), no. 2, 151–201.

[BCH94] P. Baum and A. Connes and N. Higson, *Classifying space for proper actions and $K$-theory of group $C^*$-algebras,* $C^*$-algebras : 1943–1993 (San Antonio, TX, 1993), Contemp. Math., **167**, Amer. Math. Soc. (1994), 240–291.

[BD97] A. Beilinson and V. Drinfeld Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves. Preprint 1997

[BD04] A. Beilinson et V. Drinfeld. Chiral algebras. AMS Society Colloquium Publications, 2004.

[BK90] S. Bloch and K. Kato. $L$-functions and Tamagawa numbers of motives. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. I*, volume 86 of *Progr. Math.*, pages 333–400. 1990.

[BP04] G. Böckle and R. Pink. Cohomological Theory of Crystals over Function Fields. *Preprint*, 2004.

[Bos90] J.-B. Bost. Principe d'Oka, K-théorie et systèmes dynamiques non commutatifs. *Inventiones Math.,101*, pages 261–333, 1990.

[BG02] A. Braverman and D. Gaitsgory. Geometric Eisenstein series. *Invent. Math.* 150 :287–384, 2002.

[Bre02] C. Breuil. Integral $p$-adic Hodge theory. Volume 36 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 51–80. 2002.

[Cl94] L. Clozel. Cours à l'institut Tata, 1994.

[CF00] P. Colmez et M. Fontaine. Construction des représentations $p$-adiques semi-stables. *Invent. Math.*, 140 :1–43, 2000

[CM82] A. Connes and H. Moscovici. $L^2$-index theory on homogeneous spaces and discrete series representations. *Operator algebras and applications*, Kingston, PSPM 38(1), 419–433, 1982.

[Co94] A. Connes, *Non commutative geometry,* Academic Press, (1994).

[Del80] P. Deligne La conjecture de Weil : II *Publ. IHES* 52 :137-252, 1980

[Del82] P. Deligne Métaplectique, Une lettre à Kazhdan, 1982.

[Dri76] V. Drinfeld. Coverings of $p$-adic symmetric domains. *Funct. Anal. and its Applic.* 10 : 107–115, 1976.

[Dri77] V. Drinfeld. A proof of Langlands' global conjecture for $GL(2)$ over a function field. *Funct. Anal. and its Applic.* 11(3) : 223–225, 1977.

[Dri87] V. Drinfeld. Moduli varieties of $F$-sheaves. *Funct. Anal. and its Applic.* 21(2) : 107–122, 1987.

[Fal99] G. Faltings. Integral crystalline cohomology over very ramified valuation rings. *J. Amer. Math. Soc.*, 12(1) :117–144, 1999.

[Fal02] G. Faltings. A relation between two moduli spaces studied by V. G. Drinfeld. *Algebraic number theory and algebraic geometry*, volume 300 de *Contemp. Math.*, pages 115–129. 2002.

[Far08] L. Fargues. L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld. *L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld*, Progress in Math. 262, 2008.

[Fon92] J.-M. Fontaine. Valeurs spéciales des fonctions $L$ des motifs. *Astérisque*, (206) :Exp. No. 751, 1992. Séminaire Bourbaki, Vol. 1991/92.

[FPR94] J.-M. Fontaine and B. Perrin-Riou. Autour des conjectures de Bloch et Kato : cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions $L$. In *Motives*, volume 55 of *PSPM*, pages 599–706. 1994.

[FGV01] E. Frenkel, D. Gaitsgory and K. Vilonen. Whittaker patterns in the geometry of moduli spaces of bundles on curves. Ann. Math. 153 (2001), 699–748

[FBZ01] E. Frenkel and D. Ben-Zvi. Vertex algebras and algebraic curves. Math. Surveys and Monographs 88, AMS, 2001, Second edition, 2004.

[Gal99] P.Y. Le Gall. Théorie de Kasparov équivariante et groupoïdes. I. *$K$-Theory*, 16(4) :361–390, 1999.

[Gen96] A. Genestier. Espaces symétriques de Drinfeld. *Astérisque* 234, 1996.

[Gro00] M. Gromov. Spaces and questions. *Geom. Funct. Anal.*, Special Volume, Part I, 118–161, 2000.

[Gro03] M. Gromov. Random Walk in Random Groups. *Geom. Funct. Anal.*, 13(1), 73–146, 2003

[Gro98] B. Gross. On the satake isomorphism. *Galois Representations in Arithmetic Algebraic Geometry*, Cambridge University Press, 223–237, 1998 également disponible à l'adresse http ://www.math.harvard.edu/∼gross/preprints/sat.pdf

[Gro70] A. Grothendieck. Groupes de Barsotti-Tate et cristaux. *Congrès Internat. Math., Nice*, pages 431–436, 1970.

[HG07] S. Gurevich and R.Hadani. Canonical quantization of symplectic vector spaces over finite fields. arXiv :0705.4556.

[HC65] Harish-Chandra, *Discrete series for semisimple Lie groups, I and II*, Acta Math. 113 (1965) 241–318 and 116 (1966), 1–111.

[HP04] U. Hartl and R. Pink. Vector bundles with a Frobenius structure on the punctured unit disc. *Compos. Math.*, 140(3) :689–716, 2004.

[Har05] U. Hartl. Period spaces in equal characteristic. arXiv :math/0511686

[HK01] N. Higson and G. Kasparov, *$E$-theory and $KK$-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space.*, Invent. Math. 144, **1**, (2001), 23–74.

[Kas88] G.G. Kasparov. Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture. *Invent. Math.*, 91 :147–201, 1988.

[KS94] G. Kasparov and G. Skandalis. Groupes boliques et conjecture de Novikov. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 319(4) :815–820, 1994.

[KS03] G. Kasparov and G. Skandalis. Groups acting properly on "bolic" spaces and the Novikov conjecture. *Ann. of Math. (2)*, 158(1) :165–206, 2003.

[Kat93] K. Kato. Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil $L$-functions via $B_{\mathrm{dR}}$. I. In *Arithmetic algebraic geometry (Trento, 1991)*, volume 1553 of *Lecture Notes in Math.*, pages 50–163. 1993.

[Kaz90] D. Kazhdan. The minimal representation of $D_4$. *Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory*, Progr. Math., 92 : 125–158, Birkhäuser, 1990.

[KP02] D. Kazhdan and A. Polishchuk. Minimal representations : spherical vectors and automorphic functionals. *Algebraic groups and arithmetic*, 127–198, Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2004.

[Ked05] K. Kedlaya. Slope filtrations revisited. *Doc. Math.*, 10 :447–525, 2005.

[Laf99] V. Lafforgue, *$K$-Théorie bivariante pour les algèbres de Banach et conjecture de Baum-Connes*, Thèse, Université Paris Sud, 1999.

[Laf00] V. Lafforgue. *A proof of property (RD) for cocompact lattices of* $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ *and* $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$. *J. Lie Theory* 10(2) :255–267, 2000.

[Laf01] V. Lafforgue. Banach $KK$-theory and the Baum-Connes conjecture. European Congress of Mathematics, Vol. II, (Barcelone,2000), Progr. Math. 202 :31–46, Birkhäuser, 2001.

[Laf02] V. Lafforgue. $K$-théorie bivariante pour les algèbres de Banach et conjecture de Baum-Connes. *Invent. Math.*, 149(1) :1–95, 2002.

[LL08] V. Lafforgue et S. Lysenko. Compatibility of the theta correspondence with the Whittaker functors. En préparation.

[LLaf02] L. Lafforgue. Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands. *Inventiones Math.* 147 :1–241, 2002.

[Lys02] S. Lysenko. On automorphic sheaves on $Bun_G$. arXiv :math/0211067.

[Lys06] S. Lysenko. Moduli of metaplectic bundles on curves and Theta-sheaves *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* 39 :415–466, 2006.

[Lys08] S. Lysenko. Geometric theta-lifting for the dual pair $SO_{2m}, Sp_{2n}$. math.RT/0701170.

[Ma72] B. Mazur. Frobenius and the Hodge filtration. *Bull. Amer. Math.Soc*, 78(5) :653–667, 1972.

[Maz73] B. Mazur. Frobenius and the Hodge filtration, estimates. *Ann. of Math.* 98 :58–95, 1973.

[MV08] I. Mirkovic and K. Vilonen. Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings. To appear in Annals of Math.

[Oll04] Y. Ollivier. Cayley graphs containing expanders, after Gromov. 2004.

[Oll05] Y. Ollivier. A January 2005 invitation to random groups. *Ensaios Matemáticos, 10. Sociedade Brasileira de Matemática*, Rio de Janeiro, 2005.

[Oll06] Y. Ollivier. On a small cancellation theorem of Gromov. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* 13(1) :75–89, 2006).

[Par72] R. Parthasarathy, *Dirac operator and the discrete series*, Ann. of Math. (2) 96 (1972), 1–30.

[Pin97] R. Pink. Hodge structures over function fields. Preprint 1997, disponible à l'adresse http ://www.math.ethz.ch/~pink

[RZ] M. Rapoport et Th. Zink. *Period spaces for p-divisible groups*, volume 141 de *Annals of Mathematics Studies*. 1996.

[Sha00] Y. Shalom. Rigidity of commensurators and irreducible lattices. *Invent. Math.*, 141(1) :1–54, 2000.

[Ska91] G. Skandalis *Kasporov's bivariant K-theory and applications,* Expositiones Math., **9** (1991), 193–250.

[Ska99] G. Skandalis *Progrès récents sur la conjecture de Baum-Connes, contribution de Vincent Lafforgue,* Séminaire Bourbaki, No. 869 (novembre 1999).

[Tu99] J.-L. Tu. La conjecture de Novikov pour les feuilletages hyperboliques. *K-Theory*, 16(2) :129–184, 1999.

[Tu99a] J.L. Tu. La conjecture de Novikov pour les feuilletages moyennables. *K-Theory* 17(3) : 215–264, 1999.