

Un analogue non archimédien d'un résultat de Haagerup et lien avec la propriété (T) renforcée

Vincent Lafforgue*

16 mars 2015

Pour tout groupe localement compact G on note $A(G)$ l'algèbre de Fourier de G , c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de la forme

$$\phi_{h,h'} : g \mapsto \langle \lambda(g)h, h' \rangle, h, h' \in L^2(G)$$

où λ est la représentation régulière gauche. On munit $A(G)$ du produit point par point et de la norme

$$\|f\|_{A(G)} = \inf\{\|h\|_{L^2(G)}\|h'\|_{L^2(G)}, f = \phi_{h,h'}\}.$$

On note $MA(G) \subset C(G)$ l'espace des multiplicateurs de $A(G)$, muni de la norme

$$\begin{aligned} \|f\|_{MA(G)} &= \sup\{\|fh\|_{A(G)}, \|h\|_{A(G)} \leq 1\} \\ &= \sup\{\|\text{Schur}_f(h)\|_{C_{\text{red}}^*(G)}, \|h\|_{C_{\text{red}}^*(G)} \leq 1\} \end{aligned}$$

où $\text{Schur}_f(h)$ est $g \mapsto f(g)h(g)$ (dans $C_{\text{red}}^*(G)$ le produit est la convolution, c'est pourquoi on note le produit point par point $\text{Schur}_f(h)$ au lieu de fh).

Enfin on note $M_0A(G) \subset C(G)$ l'espace des multiplicateurs complètement bornés de $A(G)$, muni de la norme

$$\|f\|_{M_0A(G)} = \sup_{B \text{ une } G\text{-}C^*\text{-algèbre}} \{\|\text{Schur}_f(h)\|_{C_{\text{red}}^*(G,B)}, \|h\|_{C_{\text{red}}^*(G,B)} \leq 1\}.$$

*CNRS et MAPMO, UMR 7349, Université d'Orléans, Rue de Chartres, B.P. 6759 - 45067 Orléans cedex 2, France ; avec le soutien du projet ANR JC08-318197 QuantiT

Dans la suite on se trouvera toujours dans le cadre suivant : F sera un corps local (qui sera \mathbb{R} ou bien un corps local non archimédien, c'est-à-dire une extension finie de \mathbb{Q}_p ou de $\mathbb{F}_p((\pi))$), G sera égal à $SL_3(F)$ ou $Sp_4(F)$, K sera un sous-groupe compact maximal de G , B sera un sous-groupe de Borel de G et N le radical unipotent de B (par exemple pour SL_3 , B sera le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures et N le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes). Dans toute la suite on fera l'hypothèse

(H) : si F est non archimédien et $G = Sp_4(F)$, la caractéristique résiduelle p de F est impaire.

Comme B est moyennable les normes $\|\cdot\|_{M_0A(B)}$, $\|\cdot\|_{MA(B)}$ et $\|\cdot\|_{A(B)}$ sur $C_c(B)$ sont égales, et il en va de même pour N . Pour toute fonction K -biinvariante $f \in C_c(G)$, on a

$$\|f\|_{M_0A(G)} = \|f\|_{MA(G)} = \|f|_B\|_{A(B)} \geq \|f|_N\|_{A(N)}. \quad (1)$$

En effet comme $G = KB$, les deux égalités résultent de la proposition 1.6 de [CH89], et la dernière inégalité est évidente (on verra plus loin qu'elle peut être stricte).

Proposition 0.1. *On ne peut pas approcher 1 (pour la topologie de la convergence sur les compacts) par une suite de fonctions de $C_c(G)$ bornées uniformément pour $\|\cdot\|_{M_0A(G)}$.*

Pour $F = \mathbb{R}$ la proposition 0.1 est montrée dans [Haa86]. On renvoie aussi à [Dor93] où des résultats de [Haa86] sont généralisés et aux articles [CH85, CDSW05, CH89] qui sont reliés à ce problème.

Pour F non archimédien, on montre la proposition 0.1 dans cet article. On note que dans le cas où $G = SL_3(F)$ la proposition 0.1 résulte aussi de la propriété (T) renforcée [Laf08].

La méthode de la preuve de la proposition 0.1 pour $F = \mathbb{R}$ dans [Haa86], qui est aussi notre méthode dans cet article pour F non archimédien, consiste à se ramener à la proposition suivante.

Proposition 0.2. *On ne peut pas approcher 1 (pour la topologie de la convergence sur les compacts) par une suite f_n de fonctions K -biinvariantes de $C_c(G)$ telles que $\|f_n|_N\|_{A(N)}$ soit borné indépendamment de n .*

Cette proposition est montrée dans [Haa86] pour $F = \mathbb{R}$ et dans cet article pour F non archimédien.

Démonstration de la proposition 0.1 en admettant la proposition 0.2.
En moyennant à gauche et à droite par K on voit qu'il suffit de montrer qu'on

ne peut pas approcher 1 par une suite de fonctions K -biinvariantes de $C_c(G)$ bornées uniformément pour $\|\cdot\|_{M_0A(G)}$. On applique alors (1). \square

Remarque. La preuve de la propriété (T) renforcée [Laf08, Laf09] ne permet pas de montrer la proposition 0.2. Ce qu'elle montre de façon naturelle est la proposition analogue à 0.2 obtenue en remplaçant N par B , comme on le verra à la fin de l'introduction du paragraphe 1.

Pour $F = \mathbb{R}$, la preuve de la proposition 0.2 donnée dans [Haa86] repose sur les deux lemmes suivants.

Lemme 0.3. (*Haagerup*) Soit $f \in C_c(SL_3(\mathbb{R}))$ une fonction biinvariante par $K = SO_3(\mathbb{R})$. Alors

$$\left| \int_{x \in \mathbb{R}} f \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{-1/2} dx \right| \leq 4\pi \|f|_N\|_{A(N)}.$$

Démonstration. Ce lemme est une conséquence du lemme E de [Haa86], qui est plus général car il concerne toutes les fonctions $SO_2(\mathbb{R})$ -biinvariantes sur $SL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$. \square

Lemme 0.4. (*Haagerup*) Soit $f \in C_c(Sp_4(\mathbb{R}))$ une fonction biinvariante par le sous-groupe compact maximal $K = Sp_4(\mathbb{R}) \cap SO_4(\mathbb{R})$. Alors

$$\left| \int_{x \in \mathbb{R}} f \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{-1/2} dx \right| \leq 4\pi \|f|_N\|_{A(N)}.$$

Démonstration. Ce lemme est une conséquence du résultat analogue au lemme E pour Sp_4 , qui apparaît dans [Haa86] à l'intérieur d'une démonstration et qui est plus général car il concerne toutes les fonctions $SO_2(\mathbb{R})$ -biinvariantes sur $SL_2(\mathbb{R}) \times \text{Sym}^2(\mathbb{R}^2)$. \square

Pour les deux lemmes précédents on renvoie aussi à [Dor93].

On va réécrire les lemmes 0.3 et 0.4 sous une forme équivalente qui est plus adaptée à la comparaison avec le cas non archimédien. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in]1, \infty[$ on a $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R}) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} SO_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $x = a - a^{-1}$ et alors $(1 + \frac{x^2}{4})^{1/2} = \frac{a+a^{-1}}{2}$, d'où $(1 + \frac{x^2}{4})^{-1/2} dx = 2 \frac{(1+a^{-2})da}{a+a^{-1}} = 2 \frac{da}{a}$. Les lemmes 0.3 et 0.4 sont donc équivalents aux deux lemmes suivants.

Lemme 0.5. (Haagerup) Soit $f \in C_c(SL_3(\mathbb{R}))$ une fonction biinvariante par $K = SO_3(\mathbb{R})$. Alors

$$\left| \int_{a \in]1, \infty[} f \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \frac{da}{a} \right| \leq \pi \|f|_N\|_{A(N)}.$$

Lemme 0.6. (Haagerup) Soit $f \in C_c(Sp_4(\mathbb{R}))$ une fonction biinvariante par le sous-groupe compact maximal $K = Sp_4(\mathbb{R}) \cap SO_4(\mathbb{R})$. Alors

$$\left| \int_{a \in]1, \infty[} f \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \frac{da}{a} \right| \leq \pi \|f|_N\|_{A(N)}.$$

Le but de cet article est de montrer des résultats analogues aux lemmes 0.5 et 0.6 dans le cas où F est non archimédien. On renvoie aux introductions des paragraphes 1 et 2 pour l'énoncé de ces résultats, en donnant seulement ici quelques commentaires.

Grâce au fait que les calculs sont plus simples dans le cas non archimédien, on obtient en fait des estimées plus complètes. Il apparaît une différence surprenante entre le cas de SL_3 et celui de Sp_4 :

- pour SL_3 , le lemme analogue au lemme 0.5 pour F non archimédien est essentiellement optimal car il existe une suite de fonctions K -biinvariantes $f_n \in C_c(G)$ telle que f_n soit égale à 1 sur la boule de rayon n (pour une longueur naturelle sur G) et que $\|f_n|_N\|_{A(N)}$ croisse linéairement en n (donc à la même vitesse que le membre de gauche de l'inégalité du lemme 0.5) et les normes $\|f_n|_N\|_{A(N)}$ et $\|f_n|_B\|_{A(B)}$ se comportent de façon très différentes car la propriété (T) renforcée implique que pour une telle suite f_n , $\|f_n|_B\|_{A(B)}$ croît au moins exponentiellement en n ,
- pour Sp_4 , on a un énoncé beaucoup plus fort que le résultat analogue au lemme 0.6 pour F non archimédien et en particulier pour toute suite de fonctions K -biinvariantes $f_n \in C_c(G)$ telle que f_n soit égale à 1 sur la boule de rayon n , la suite $\|f_n|_N\|_{A(N)}$ croît au moins exponentiellement (donc a le même comportement qualitatif que $\|f_n|_B\|_{A(B)}$).

On ne sait pas si des résultats analogues aux résultats complémentaires qu'on a obtenus pour F non archimédien sont vrais pour $F = \mathbb{R}$.

Les résultats de [Haa86] sont plus généraux que les lemmes 0.3 et 0.4 car ils concernent toutes les fonctions $SO_2(\mathbb{R})$ -biinvariantes sur $SL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ et $SL_2(\mathbb{R}) \times \text{Sym}^2(\mathbb{R}^2)$ et Dorofaeff [Dor93] a étendu ces résultats à $SL_2(\mathbb{R}) \times$

$\text{Sym}^n(\mathbb{R}^2)$ pour tout n . On ne sait pas si l'analogie non-archimédien de ces résultats est vrai.

Les résultats de cet article figuraient dans le texte non publié [Laf10b], datant de 2010. Depuis, Benben Liao a obtenu des améliorations importantes des démonstrations du second paragraphe consacré à Sp_4 , avec de meilleures estimées (de plus il les a considérées dans une situation discrétisée qui est bien plus intéressante du point de vue de la conjecture de Baum-Connes). Ces arguments constituent la preuve de la proposition 3.2 de [Lia14], à laquelle nous nous référerons donc pour les démonstrations dans le cas de Sp_4 .

Je remercie Claire Anantharaman pour m'avoir fourni le preprint non publié de Haagerup. Je remercie Jean-Philippe Anker, Maria Gomez, Benben Liao, Mikael de la Salle et Georges Skandalis pour de nombreuses discussions.

1 Le cas de SL_3

Soit F un corps local non archimédien, \mathcal{O} son anneau d'entiers et π une uniformisante de \mathcal{O} . Soit \mathbb{F} le corps résiduel de F . On note q le cardinal de \mathbb{F} . Soit $G = SL_3(F)$ et $K = SL_3(\mathcal{O})$.

Soit $\Lambda = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2, i - j = 0 \text{ modulo } 3\}$. Pour $(i, j) \in \Lambda$ on note

$$D(i, j) = \pi^{\frac{i+2j}{3}} \begin{pmatrix} \pi^{-(i+j)} & 0 & 0 \\ 0 & \pi^{-j} & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in G$$

L'application qui à $(i, j) \in \Lambda$ associe $KD(i, j)K$ induit une bijection entre Λ et $K \backslash G / K$. On note B le sous-groupe de Borel de G (formé des matrices triangulaires supérieures). On introduit deux sous-groupes fermés de B :

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y, z \in F \right\}$$

et

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \pi^i & x & z \\ 0 & \pi^j & y \\ 0 & 0 & \pi^k \end{pmatrix}, x, y, z \in F, i, j, k \in \mathbb{Z}, i + j + k = 0 \right\}.$$

Pour une matrice $A = (a_{kl})$ on note $\|A\| = \max(|a_{kl}|)$. Alors pour $A \in G$,

$$A \in KD(i, j)K \text{ si et seulement si } \|A\| = q^{\frac{2i+j}{3}} \text{ et } \|A^{-1}\| = q^{\frac{i+2j}{3}}. \quad (2)$$

L'analogie non archimédien du lemme 0.5 est l'énoncé suivant.

Lemme 1.1. *Pour toute fonction K -biinvariante $f \in C_c(G)$,*

$$\left| \sum_{i \in \mathbb{N}} f(D(i, i)) \right| \leq 13 \|f|_N\|_{A(N)}. \quad (3)$$

D'après les arguments qui figurent à la fin de la preuve du théorème 1 pour $SL_3(\mathbb{R})$ dans [Haa86] (ou dans le paragraphe 12 de [Dor93]), le lemme 1.1 implique que l'on ne peut pas approcher 1 par des fonctions K -biinvariantes $f \in C_c(G)$ telles que $\|f|_N\|_{A(N)}$ reste bornée (l'argument consiste à mettre f au carré et à appliquer le lemme de Fatou au membre de gauche de (3), mais en fait il est encore plus simple d'appliquer le lemme 1.2 ci-dessous).

La démonstration du lemme 1.1 sera donnée dans le paragraphe 1.3. Elle fournira en fait l'estimée un peu plus forte du lemme suivant.

Lemme 1.2. *Pour toute fonction K -biinvariante $f \in C_c(G)$,*

$$\sum_{i \in \mathbb{N}^*} i |f(D(i, i)) - f(D(i+1, i+1))| \leq 12 \|f|_N\|_{A(N)}.$$

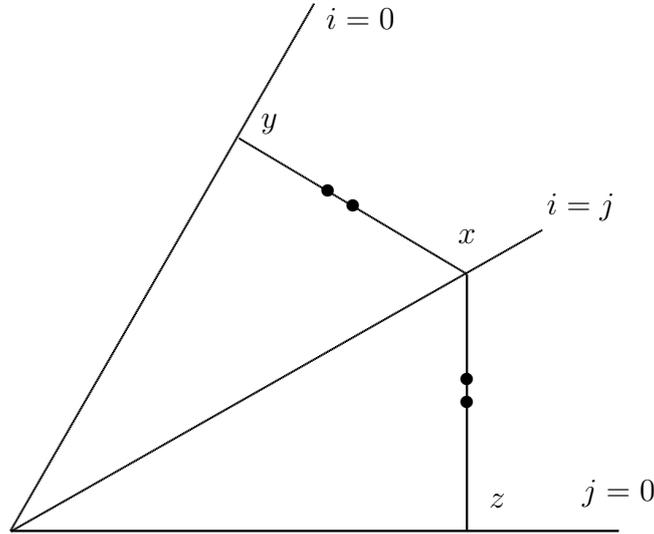
Le lemme suivant, dont la démonstration sera donnée dans le paragraphe 1.4, fournit, pour toute fonction K -biinvariante $f \in C_c(G)$, des estimées sur la variation de $(i, j) \mapsto f(D(i, j))$ en fonction de $\|f|_N\|_{A(N)}$, qui sont différentes de celles des lemmes 1.1 et 1.2.

Lemme 1.3. *Il existe une constante C telle que pour toute fonction K -biinvariante $f \in C_c(G)$,*

$$|f(D(i, j)) - f(D(i+2, j-1))| \leq Cq^{\frac{i-j}{6}} \|f|_N\|_{A(N)} \quad \text{pour } i < j \quad (4)$$

$$\text{et } |f(D(i, j)) - f(D(i-1, j+2))| \leq Cq^{\frac{j-i}{6}} \|f|_N\|_{A(N)} \quad \text{pour } i > j. \quad (5)$$

Le dessin ci-dessous illustre les estimées du lemme. On a dessiné la chambre de Weyl, paramétrée par $(i, j) \in \mathbb{R}_+^2$ et Λ est l'intersection du réseau entier $\{(i, j) \in \mathbb{Z}^2, i = j \bmod 3\}$ avec la chambre de Weyl. La droite $i = j$ est la bissectrice de l'angle à l'origine. Le lemme permet de comparer les valeurs de f en deux points voisins sur un segment comme xy ou xz mais ces estimées deviennent banales quand on se rapproche de x . Géométriquement y et z sont les pieds des perpendiculaires abaissées depuis x sur les droites $i = 0$ et $j = 0$.



Les estimées du lemme 1.3 montrent que si l'on cherche une suite de fonctions K -biinvariantes $f_n \in C_c(G)$ telle que $f_n(D(i, j)) = 1$ pour $i \leq n$ et $j \leq n$ et que $\|f_n|_N\|_{A(N)}$ soit majoré par un polynôme en n , pour tout n la fonction $(i, j) \mapsto f_n(D(i, j))$ doit être à peu près constante le long des segments notés xy et xz sur la figure précédente. Le candidat le plus naturel pour une telle suite de fonctions est χ_{B_n} , où B_n est défini comme ci-dessous, et caractérisé par le fait que $\chi_{B_n}(D(i, j))$ vaut 1 exactement quand (i, j) appartient au quadrilatère délimité par l'origine et xyz dans la figure ci-dessus en prenant l'échelle telle que $x = (n, n)$. Le lemme suivant montre que ce candidat convient et qu'il existe donc une telle suite de fonctions f_n .

Soit ℓ la longueur sur G définie par

$$\ell(kD(i, j)k') = \max\left(\frac{i + 2j}{3}, \frac{2i + j}{3}\right)$$

pour $k, k' \in K$ et $(i, j) \in \Lambda$. Autrement dit pour $A \in G$, on a $q^{\ell(A)} = \max(\|A\|, \|A^{-1}\|)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $B_n = \{g \in G, \ell(g) \leq n\}$.

Lemme 1.4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\chi_{B_n}|_N\|_{A(N)} \leq 2n + 1$.*

Ce lemme montre que le lemme 1.1 est optimal (à la constante près). En effet pour $f = \chi_{B_n}$, le membre de gauche de (3) vaut $n + 1$ alors que le membre de droite est $\leq 13(2n + 1)$.

Remarque. On a déjà dit que le choix de B_n est dicté par les estimées du lemme 1.3. Par exemple le lemme 1.3 montre que si dans la définition de B_n

on remplaçait la longueur ℓ par la longueur $kD(i, j)k' \mapsto i + j$, l'énoncé du lemme 1.4 ne serait plus vrai.

La propriété renforcée implique que $\|\chi_{B_n}|_B\|_{A(B)}$ croît exponentiellement en n . En fait la propriété renforcée implique le lemme suivant, qui résulte de [Laf08, Laf10a], mais dont nous rappellerons la démonstration sous une forme qui rend plus facile la comparaison avec le résultat de Haagerup.

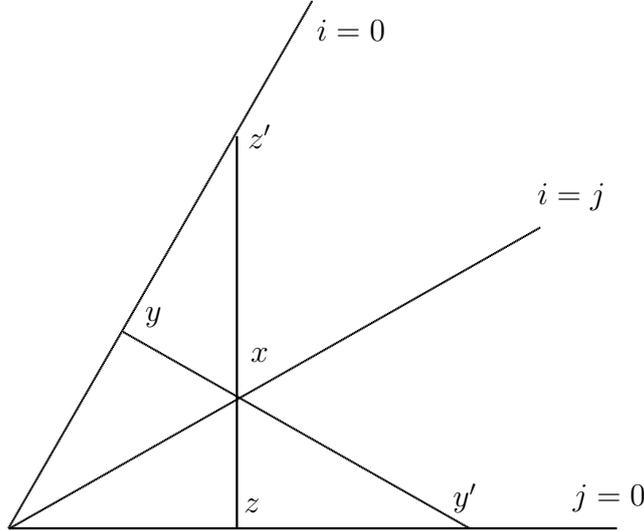
Lemme 1.5. *Il existe une constante C telle que pour toute fonction K -biinvariante $f \in C_c(G)$,*

$$|f(D(i, j)) - f(D(i + 2, j - 1))| \leq Cq^{-\frac{j}{2}} \|f|_H\|_{A(H)} \text{ pour } j \geq 1 \quad (6)$$

$$\text{et } |f(D(i, j)) - f(D(i - 1, j + 2))| \leq Cq^{-\frac{i}{2}} \|f|_H\|_{A(H)} \text{ pour } i \geq 1. \quad (7)$$

Comme H est un sous-groupe fermé de B on a bien sûr $\|f|_H\|_{A(H)} \leq \|f|_B\|_{A(B)}$. En fait on a égalité, et $\|f|_H\|_{A(H)} = \|f|_B\|_{A(B)} = \|f\|_{MA(G)} = \|f\|_{M_0A(G)}$ car H et B sont moyennables, $G = KH = KB$ et d'après la proposition 1.6 de [CH89].

Le lemme permet de comparer les valeurs de $f(D(i, j))$ en deux points voisins sur les segments yy' et zz' de la figure ci-dessous (et pas seulement sur les segments xy et xz comme dans le lemme 1.3), les estimées devenant banales quand on se rapproche de y' ou de z' . On voit que l'estimée du lemme 1.5 reste non triviale pour $i = j$ alors que celle du lemme 1.3 devient banale quand on s'approche de la bissectrice $i = j$.



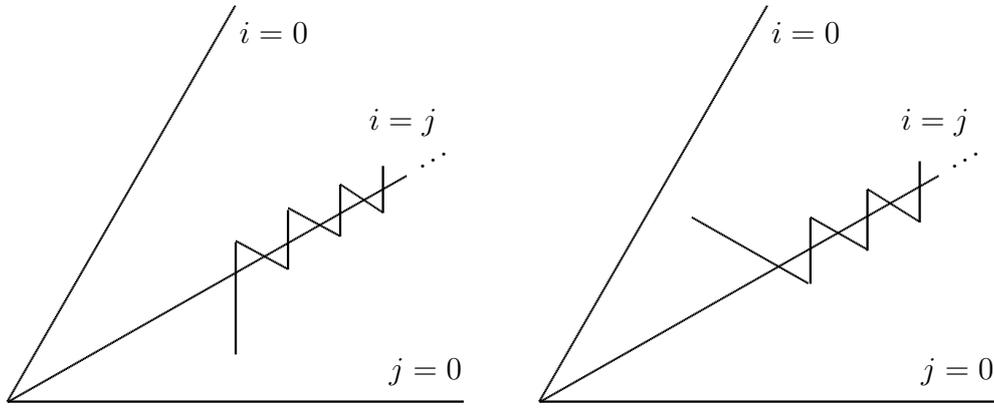
Comme dans [Laf08, Laf10a] on montre en zigzaguant le corollaire suivant.

Corollaire 1.6. *Il existe une constante C telle que pour toute fonction K -biinvariante $f \in C_c(G)$,*

$$|f(D(i, j))| \leq Cq^{-\max(\frac{2i+j}{6}, \frac{i+2j}{6})} \|f|_H\|_{A(H)}.$$

□

La figure ci-dessous illustre l'argument de zigzag en partant d'un point arbitraire.



En appliquant le corollaire 1.6 à la fonction χ_{B_n} du lemme 1.4 on voit que $\|\chi_{B_n}|_H\|_{A(H)}$ et $\|\chi_{B_n}|_N\|_{A(N)}$ se comportent très différemment quand n tend vers l'infini puisque le premier croît exponentiellement et le second polynomialement. En particulier χ_{B_n} ne vérifierait pas les estimées du lemme 1.5 si on remplaçait $\|\chi_{B_n}|_H\|_{A(H)}$ par $\|\chi_{B_n}|_N\|_{A(N)}$. Donc il n'y a pas d'implication logique entre les estimées des lemmes 1.5 et 1.3. De même il n'y pas d'implication logique entre l'estimée du corollaire 1.6 et celle des lemmes 1.1 et 1.2, et l'estimée du corollaire 1.6 ne serait plus vraie si on le remplaçait $\|f|_H\|_{A(H)}$ par $\|f|_N\|_{A(N)}$.

1.1 Rappels sur la transformation de Fourier

Pour $x \in F$ on note $|x| = q^n$ si $x \in \pi^{-n}\mathcal{O}^*$ et $|x| = 0$ si $x = 0$. On munit F de la mesure de Haar telle que $\int_{\mathcal{O}} da = 1$. Pour $\lambda \in F$ on a $\int_{\lambda\mathcal{O}} da = |\lambda|$, ce qui justifie la normalisation de $|\cdot|$ par $|\pi| = q^{-1}$.

On fixe un caractère $\psi : F/\mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}^*$ non trivial sur $\pi^{-1}\mathcal{O}/\mathcal{O}$.

La transformation de Fourier est l'isométrie

$$\mathcal{F} : L^2(F) \rightarrow L^2(F), f \mapsto \left(\xi \mapsto \int_{x \in F} \psi(\xi x) f(x) dx \right).$$

On note que $\mathcal{F}(\chi_{\mathcal{O}}) = \chi_{\mathcal{O}}$, de sorte que $\chi_{\mathcal{O}}$ joue le même rôle qu'une gaussienne pour la transformation de Fourier réelle.

Plus généralement pour tout $\lambda \in F^*$ on a $\mathcal{F}(\chi_{\lambda\mathcal{O}}) = |\lambda|\chi_{\lambda^{-1}\mathcal{O}}$, ce que l'on peut exprimer aussi en disant que \mathcal{F} envoie $|\lambda|^{-\frac{1}{2}}\chi_{\lambda\mathcal{O}}$, qui est de norme 1 dans $L^2(F)$, sur $|\lambda|^{\frac{1}{2}}\chi_{\lambda^{-1}\mathcal{O}}$ (qui est également de norme 1 dans $L^2(F)$).

Enfin \mathcal{F} est essentiellement involutive, au sens où $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}$ envoie f sur $x \mapsto f(-x)$.

1.2 Rappels sur la formule de Plancherel pour N

Dans tout ce texte on note $\mathcal{H} = L^2(F)$. Pour tout $\lambda \in F^*$ on définit la représentation irréductible $\rho_{\lambda} : N \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ telle que pour $a, b, c \in F$, $f \in \mathcal{H}$

$$\rho_{\lambda} \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (f)$$

soit la fonction

$$x \mapsto f(x+a)\psi(b\lambda x)\psi(\lambda c).$$

On note $C_c^{\infty}(N)$ l'espace des fonctions localement constantes à support compact sur N et à valeurs complexes (une telle fonction ne prend donc qu'un nombre fini de valeurs). Pour $h \in C_c^{\infty}(N)$ on a donc

$$((\rho_{\lambda}(h))(f))(x) = \int_{a,b,c \in F} h(a,b,c)f(x+a)\psi(b\lambda x)\psi(\lambda c)dadbbdc$$

(l'abus de notation $h(a,b,c)$ sera systématique). On vérifie facilement que $\rho_{\lambda}(h)$ est un opérateur de rang fini.

On sait que les représentations unitaires du groupe moyennable N sont les ρ_{λ} , ainsi que des caractères dans l'adhérence de ρ_{λ} quand λ tend vers 0. Pour $h \in C_c^{\infty}(N)$ on a donc

$$\|h\|_{C_{\text{red}}^*(N)} = \sup_{\lambda \in F^*} \|\rho_{\lambda}(h)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}. \quad (8)$$

La formule de Plancherel pour N est donnée par le lemme suivant (qui est bien connu).

Lemme 1.7. *Pour $h \in C_c^{\infty}(N)$, on a*

$$\|h\|_{L^2(N)}^2 = \int_{\lambda \in F^*} |\lambda| \|\rho_{\lambda}(h)\|_{HS}^2 d\lambda \quad (9)$$

où $\|\cdot\|_{HS}$ est la norme de Hilbert-Schmidt, c'est-à-dire la norme dans $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*$ et $d\lambda$ est comme précédemment la mesure de Haar sur F telle que $\int_{\mathcal{O}} d\lambda = 1$.

Démonstration. Soit $h \in C_c^\infty(N)$ et $\lambda \in F^*$. Alors $\rho_\lambda(h)$ est un opérateur de rang fini donné par le noyau

$$K(x, y) = \int_{b, c \in F} h(a, b, c) \psi(b\lambda x) \psi(\lambda c) dbdc \quad \text{où } a = y - x.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \|\rho_\lambda(h)\|_{HS}^2 &= \int_{x, y \in F} |K(x, y)|^2 dx dy \\ &= \int_{x, a \in F} \left| \int_{b, c \in F} h(a, b, c) \psi(b\lambda x) \psi(\lambda c) dbdc \right|^2 dx da \end{aligned}$$

grâce au changement de variable $y = x + a$. Donc

$$\begin{aligned} &\int_{\lambda \in F^*} |\lambda| \|\rho_\lambda(h)\|_{HS}^2 d\lambda \\ &= \int_{x, a \in F, \lambda \in F^*} |\lambda| \left| \int_{b, c \in F} h(a, b, c) \psi(b\lambda x) \psi(\lambda c) dbdc \right|^2 dx da d\lambda. \end{aligned}$$

On applique maintenant le changement de variables $\tilde{x} = \lambda x$. Comme $d\tilde{x} = |\lambda| dx$ et comme $\{0\} \subset F$ est de mesure nulle, on obtient

$$\int_{\lambda \in F^*} |\lambda| \|\rho_\lambda(h)\|_{HS}^2 d\lambda = \int_{\tilde{x}, a, \lambda \in F} \left| \int_{b, c \in F} h(a, b, c) \psi(b\tilde{x}) \psi(\lambda c) dbdc \right|^2 d\tilde{x} da d\lambda.$$

Or pour tout $a \in F$ on a

$$\int_{\tilde{x}, \lambda \in F} \left| \int_{b, c \in F} h(a, b, c) \psi(b\tilde{x}) \psi(\lambda c) dbdc \right|^2 d\tilde{x} d\lambda = \int_{b, c \in F} |h(a, b, c)|^2 dbdc$$

car la transformation de Fourier est une isométrie. \square

Il résulte de la formule de Plancherel pour N que pour $h \in C_c^\infty(N)$ on a

$$\|h\|_{M_0 A(N)} = \|h\|_{MA(N)} = \|h\|_{A(N)} = \int_{\lambda \in F^*} |\lambda| \|\rho_\lambda(h)\|_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*} d\lambda.$$

En effet les trois premières normes sont égales parce que N est moyennable et la dernière égalité a lieu car la troisième norme est la norme duale de (8) par rapport à (9).

1.3 Preuve des lemmes 1.1 et 1.2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$h'_n = \left(q^{-n} \sum_{j=0}^n \chi_{\pi^{-j}\mathcal{O}}(a) \chi_{\pi^{-n+j}\mathcal{O}}(b) \right) \left(q^{-n} \chi_{\pi^{-n-1}+\pi^{-n}\mathcal{O}}(c) \right) \in C_c^\infty(N)$$

$$h''_n = \left(q^{-n} \sum_{j=0}^n \chi_{\pi^{-j}\mathcal{O}}(a) \chi_{\pi^{-n+j}\mathcal{O}}(b) \right) \left(q^{-n} \chi_{\pi^{-n-2}+\pi^{-n}\mathcal{O}}(c) \right) \in C_c^\infty(N)$$

et on pose $h_n = h'_n - h''_n$.

Le lemme suivant nous servira à plusieurs reprises.

Lemme 1.8. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$\|A\| = \max(|a|, |b|, |c|) \quad \text{et} \quad \|A^{-1}\| = \max(|a|, |b|, |c - ab|).$$

De plus

$$A \in KD(i, j)K \quad \text{si et seulement si} \\ \max(|a|, |b|, |c|) = q^{\frac{2i+j}{3}} \quad \text{et} \quad \max(|a|, |b|, |c - ab|) = q^{\frac{i+2j}{3}}.$$

Démonstration. La première assertion vient du fait que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ab - c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

et la deuxième assertion résulte alors de (2). \square

Sous-lemme 1.9. Pour tout n , h'_n est supportée par $N \cap KD(n+1, n+1)K$ et h''_n est supportée par $N \cap KD(n+2, n+2)K$.

Démonstration. Cela résulte du lemme 1.8. En effet pour $a, b \in \pi^{-n}\mathcal{O}$ tels que $ab \in \pi^{-n}\mathcal{O}$ et pour c dans $\pi^{-n-1}\mathcal{O}^*$ ou $\pi^{-n-2}\mathcal{O}^*$, on a $\|A\| = |c|$ et $\|A^{-1}\| = |c|$ car $|c - ab| = |c|$. \square

Les deux sous-lemmes suivants serviront à estimer la norme d'opérateur de combinaisons des h_n .

Sous-lemme 1.10. Pour $m \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in \pi^m\mathcal{O}^*$, on a

$$\int_F \psi(\lambda c) \left(q^{-n} \chi_{\pi^{-n-1}+\pi^{-n}\mathcal{O}}(c) - q^{-n} \chi_{\pi^{-n-2}+\pi^{-n}\mathcal{O}}(c) \right) dc = 0 \quad (11)$$

si $m \notin \{n, n+1\}$ et

$$\left| \int_F \psi(\lambda c) \left(q^{-n} \chi_{\pi^{-n-1} + \pi^{-n} \mathcal{O}}(c) - q^{-n} \chi_{\pi^{-n-2} + \pi^{-n} \mathcal{O}}(c) \right) dc \right| \leq 2 \quad (12)$$

si $m \in \{n, n+1\}$. \square

Sous-lemme 1.11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \in \{n, n+1\}$ et $\lambda \in \pi^m \mathcal{O}^*$,

$$\left\| f \mapsto \left(x \mapsto \left(\int_{a,b \in F} \left(q^{-n} \sum_{j=0}^n \chi_{\pi^{-j} \mathcal{O}}(a) \chi_{\pi^{-n+j} \mathcal{O}}(b) \right) f(x+a) \psi(b\lambda x) dadb \right) \right) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 3.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $m = n + \varepsilon$ et $\lambda \in \pi^m \mathcal{O}^*$. Pour $j \in \{0, \dots, n\}$ on note

$$T_{\varepsilon, j} : f \mapsto \left(x \mapsto \left(\int_{a,b \in F} q^{-n} \chi_{\pi^{-j} \mathcal{O}}(a) \chi_{\pi^{-n+j} \mathcal{O}}(b) f(x+a) \psi(b\lambda x) dadb \right) \right)$$

de sorte que l'inégalité du sous-lemme est

$$\left\| \sum_{j=0}^n T_{\varepsilon, j} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 3. \quad (13)$$

On a

$$\int_{b \in F} \chi_{\pi^{-n+j} \mathcal{O}}(b) \psi(b\lambda x) db = q^{n-j} \chi_{\pi^{n-j} \mathcal{O}}(\lambda x) = q^{n-j} \chi_{\pi^{-j-\varepsilon} \mathcal{O}}(x).$$

Donc

$$T_{\varepsilon, j} : f \mapsto \left(x \mapsto \left(\int_{a \in \pi^{-j} \mathcal{O}} q^{-j} \chi_{\pi^{-j-\varepsilon} \mathcal{O}}(x) f(x+a) da \right) \right).$$

L'idée de (13) est que les $T_{\varepsilon, j}$ pour $j = 0, \dots, n$ sont les projections orthogonales sur les espaces de fonctions sur $\pi^{-j-\varepsilon} \mathcal{O} / \pi^{-j} \mathcal{O}$, et que ces espaces sont à peu près orthogonaux entre eux.

Soit $\sigma : F/\mathcal{O} \rightarrow F$ une section de la projection $F \rightarrow F/\mathcal{O}$, telle que $\sigma(0) = 0$ (le choix de σ n'a aucune importance). Pour $i \in \mathbb{Z}$, $b \in F/\mathcal{O}$ et pour ξ un caractère non trivial de $\mathcal{O}/\pi\mathcal{O} = \mathbb{F}$ (vu comme fonction sur \mathcal{O} prolongée par 0 à F) on introduit

$$f_{i, \xi, b} : x \mapsto q^{-\frac{i}{2}} \xi(\pi^i x - \sigma(b))$$

de sorte que cette fonction est à support dans $\pi^{-i}(b + \mathcal{O})$. Alors

$$(f_{i, \xi, b})_{i \in \mathbb{Z}, \xi \in \hat{\mathbb{F}} \setminus \{0\}, b \in F/\mathcal{O}}$$

est une base orthonormale de $\mathcal{H} = L^2(F)$. On a par exemple, pour $j \in \mathbb{Z}$,

$$q^{-\frac{j}{2}} \chi_{\pi^{-j}\mathcal{O}} = q^{-\frac{j}{2}} \sum_{\ell=1}^{\infty} q^{-\ell} (q \chi_{\pi^{-j-\ell+1}\mathcal{O}} - \chi_{\pi^{-j-\ell}\mathcal{O}}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} q^{-\frac{\ell}{2}} \sum_{\xi \in \hat{\mathbb{F}} \setminus \{0\}} f_{j+\ell, \xi, 0}$$

car $\sum_{\xi \in \hat{\mathbb{F}} \setminus \{0\}} f_{j+\ell, \xi, 0} = q^{-\frac{j+\ell}{2}} (q \chi_{\pi^{-j-\ell+1}\mathcal{O}} - \chi_{\pi^{-j-\ell}\mathcal{O}})$.

On a $T_{\varepsilon, j}(f_{i, \xi, b}) = 0$ sauf si $i > j$ et $b = 0$, et

$$\text{pour } i > j, T_{0, j}(f_{i, \xi, 0}) = q^{-\frac{i}{2}} \chi_{\pi^{-j}\mathcal{O}} = \sum_{\ell=1}^{\infty} q^{-\frac{i-j+\ell}{2}} \sum_{\xi' \in \hat{\mathbb{F}} \setminus \{0\}} f_{j+\ell, \xi', 0},$$

$$\text{pour } i = j + 1, T_{1, j}(f_{i, \xi, 0}) = f_{i, \xi, 0},$$

$$\text{pour } i > j + 1, T_{1, j}(f_{i, \xi, 0}) = q^{-\frac{i}{2}} \chi_{\pi^{-j-1}\mathcal{O}} = \sum_{\ell=1}^{\infty} q^{-\frac{i-j-1+\ell}{2}} \sum_{\xi' \in \hat{\mathbb{F}} \setminus \{0\}} f_{j+1+\ell, \xi', 0}.$$

On en déduit

$$\left\| \sum_{j=0}^n T_{\varepsilon, j} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 1 + (q-1)(q^{-1} + q^{-\frac{3}{2}} + \dots) = 1 + \frac{1 - q^{-1}}{1 - q^{-\frac{1}{2}}} = 2 + q^{-\frac{1}{2}} \leq 3.$$

□

Sous-lemme 1.12. *Pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à support fini on a*

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n h_n \right\|_{C_{\text{red}}^*(N)} \leq 12 \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|.$$

Démonstration. Par (8) on a

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n h_n \right\|_{C_{\text{red}}^*(N)} = \sup_{\lambda \in F^*} \left\| \rho_{\lambda} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n h_n \right) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}.$$

Soit $m \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in \pi^m \mathcal{O}^*$. D'après l'égalité (11) du sous-lemme 1.10 on a

$$\rho_{\lambda} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n h_n \right) = \rho_{\lambda} (a_{m-1} h_{m-1} + a_m h_m).$$

Enfin d'après l'inégalité (12) du sous-lemme 1.10 et le sous-lemme 1.11, $\|\rho_{\lambda}(h_{m-1})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 6$ et $\|\rho_{\lambda}(h_m)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq 6$. □

Pour $f, h \in C_c^{\infty}(N)$ on a

$$\left| \int_N fh \right| \leq \|f\|_{A(N)} \|h\|_{C_{\text{red}}^*(N)}. \quad (14)$$

Soit $f \in C_c(G)$ une fonction K -biinvariante. D'après le sous-lemme 1.9, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_N f|_N h_n = (n+1)(f(D(n+1, n+1)) - f(D(n+2, n+2))). \quad (15)$$

Il résulte du sous-lemme 1.12 et de (14) et (15) que pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à support fini, et pour f comme ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (n+1)(f(D(n+1, n+1)) - f(D(n+2, n+2))) \right| \\ & \leq 12(\max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|) \|f|_N\|_{A(N)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Démonstration du lemme 1.1. Soit $f \in C_c(G)$ une fonction K -biinvariante. Soit m assez grand pour que $f(D(i, i)) = 0$ pour $i > m$. On applique (16) à la suite (a_n) donnée par $a_n = 1$ pour $n \leq m$ et $a_n = 0$ pour $n > m$. Par ailleurs on a évidemment $|f(D(0, 0))| \leq \|f|_N\|_{A(N)}$. \square

Démonstration du lemme 1.2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on applique (16) à la suite (a_i) donnée par

$$a_i = \frac{\overline{f(D(i+1, i+1)) - f(D(i+2, i+2))}}{|f(D(i+1, i+1)) - f(D(i+2, i+2))|}$$

pour $i \leq n$ et $f(D(i+1, i+1)) \neq f(D(i+2, i+2))$, et $a_i = 0$ sinon, puis on fait tendre n vers l'infini. \square

Remarque 1.13. On aurait pu déduire le lemme 1.1 du lemme 1.2. En fait le lemme 1.2 est la meilleure estimée que l'on peut déduire de (16).

1.4 Démonstration du lemme 1.3.

L'estimée (5) se déduit de l'estimée (4) par l'automorphisme

$$\theta : A \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^t A^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

de G qui préserve K et N . En effet $\theta(D(i, j)) = D(j, i)$. Il suffit donc de montrer (4). Comme $|f(D(i, j))| \leq \|f|_N\|_{A(N)}$ il suffit de montrer (4) pour $i \leq j - 6$, ce que l'on fait maintenant. Soit donc $(i, j) \in \Lambda$ vérifiant $i \leq j - 6$. On pose $\gamma = \frac{2i+j}{3} - 1 \in \mathbb{N}$, et on note $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ tels que $\alpha - \beta \in \{0, 1\}$ et $\alpha + \beta = \frac{i+2j}{3} - 2$. On a donc

$$\beta + 1 \leq \alpha + 1 \leq \gamma + 1 < \gamma + 2 < \alpha + \beta + 2. \quad (18)$$

On vérifie que pour $a \in \pi^{-\alpha-1}\mathcal{O}^*$, $b \in \pi^{-\beta-1}\mathcal{O}^*$

— pour $c \in \pi^{-\gamma-1}\mathcal{O}^*$ on a

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in KD(i, j)K$$

— pour $c \in \pi^{-\gamma-2}\mathcal{O}^*$ on a

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in KD(i+2, j-1)K$$

Cela résulte du lemme 1.8 car

$$\begin{aligned} \max(|a|, |b|, |c|) &= q^{\gamma+1} = q^{\frac{2i+j}{3}} \\ \text{et } \max(|a|, |b|, |c-ab|) &= q^{\alpha+\beta+2} = q^{\frac{i+2j}{3}} \end{aligned}$$

dans le cas où $c \in \pi^{-\gamma-1}\mathcal{O}^*$ et

$$\begin{aligned} \max(|a|, |b|, |c|) &= q^{\gamma+2} = q^{\frac{2(i+2)+(j-1)}{3}} \\ \text{et } \max(|a|, |b|, |c-ab|) &= q^{\alpha+\beta+2} = q^{\frac{(i+2)+2(j-1)}{3}} \end{aligned}$$

dans le cas où $c \in \pi^{-\gamma-2}\mathcal{O}^*$.

Soit maintenant

$$\begin{aligned} h' &= q^{-\alpha-\beta-\gamma} \chi_{\pi^{-\alpha-1}+\pi^{-\alpha}\mathcal{O}}(a) \chi_{\pi^{-\beta-1}+\pi^{-\beta}\mathcal{O}}(b) \chi_{\pi^{-\gamma-1}+\pi^{-\gamma}\mathcal{O}}(c), \\ h'' &= q^{-\alpha-\beta-\gamma} \chi_{\pi^{-\alpha-1}+\pi^{-\alpha}\mathcal{O}}(a) \chi_{\pi^{-\beta-1}+\pi^{-\beta}\mathcal{O}}(b) \chi_{\pi^{-\gamma-2}+\pi^{-\gamma}\mathcal{O}}(c) \end{aligned}$$

et $h = h' - h''$. D'après ce qui précède, h' est supporté par $KD(i, j)K$ et h'' est supporté par $KD(i+2, j-1)K$. Donc pour toute fonction K -biinvariante $f \in C_c(G)$, on a

$$\int_N f|_N h = f(D(i, j)) - f(D(i-1, j+2)).$$

D'après (14), et comme $\frac{i-j}{3} = \gamma - \alpha - \beta - 1$, le lemme 1.3 est donc impliqué par le lemme suivant.

Lemme 1.14. *Il existe C tel que pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ vérifiant $\max(\alpha, \beta) \leq \gamma < \alpha + \beta$, on a*

$$\|h\|_{C_{\text{red}}^*(N)} \leq Cq^{\frac{\gamma-\alpha-\beta}{2}}.$$

Le sous-lemme suivant reprend le sous-lemme 1.10 avec des notations différentes.

Sous-lemme 1.15. Pour $m \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in \pi^m \mathcal{O}^*$, on a

$$\int_F \psi(\lambda c) \left(q^{-\gamma} \chi_{\pi^{-\gamma-1} + \pi^{-\gamma} \mathcal{O}}(c) - q^{-\gamma} \chi_{\pi^{-\gamma-2} + \pi^{-\gamma} \mathcal{O}}(c) \right) dc = 0$$

si $m \notin \{\gamma, \gamma + 1\}$ et

$$\left| \int_F \psi(\lambda c) \left(q^{-\gamma} \chi_{\pi^{-\gamma-1} + \pi^{-\gamma} \mathcal{O}}(c) - q^{-\gamma} \chi_{\pi^{-\gamma-2} + \pi^{-\gamma} \mathcal{O}}(c) \right) dc \right| \leq 2$$

si $m \in \{\gamma, \gamma + 1\}$. □

On note

$$T_\lambda : f \mapsto \left(x \mapsto \left(q^{-\alpha-\beta} \int_{a \in \pi^{-\alpha-1} + \pi^{-\alpha} \mathcal{O}, b \in \pi^{-\beta-1} + \pi^{-\beta} \mathcal{O}} f(x+a) \psi(b\lambda x) da db \right) \right)$$

Sous-lemme 1.16. Il existe C tel que pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ vérifiant $\max(\alpha, \beta) \leq \gamma < \alpha + \beta$, pour $m \in \{\gamma, \gamma + 1\}$ et $\lambda \in \pi^m \mathcal{O}^*$, on a $\|T_\lambda\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{H})} \leq C q^{\frac{\gamma-\alpha-\beta}{2}}$.

Démonstration. On vérifie facilement que T_λ a la même norme que l'opérateur

$$T'_\lambda : f \mapsto \left(x \mapsto \left(q^{-\alpha-\beta} \int_{a \in \pi^{-\alpha} \mathcal{O}, b \in \pi^{-\beta} \mathcal{O}} f(x+a) \psi(b\lambda x) da db \right) \right)$$

qui est aussi égal à

$$T'_\lambda : f \mapsto \left(x \mapsto \left(q^{-\alpha} \int_{a \in \pi^{-\alpha} \mathcal{O}} f(x+a) \chi_{\pi^{\beta-m} \mathcal{O}}(x) da \right) \right).$$

Comme $\beta - m \geq \beta - (\gamma + 1) \geq -\alpha$, on voit que cet opérateur est de rang 1, égal à

$$q^{\frac{-\alpha-\beta+m}{2}} |q^{\frac{\beta-m}{2}} \chi_{\pi^{\beta-m} \mathcal{O}} \rangle \langle q^{-\frac{\alpha}{2}} \chi_{\pi^{-\alpha} \mathcal{O}}|$$

et sa norme est donc égale à $q^{\frac{-\alpha-\beta+m}{2}} \leq q^{\frac{-\alpha-\beta+\gamma+1}{2}}$. □

Démonstration du lemme 1.14. Le lemme résulte de (8) et des sous-lemmes 1.15 et 1.16. □

1.5 Démonstration du lemme 1.4

Le lemme 1.8 montre que

$$\begin{aligned} B_n \cap N &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \pi^{-n} \mathcal{O}, b \in \pi^{-n} \mathcal{O}, c \in \pi^{-n} \mathcal{O}, (c - ab) \in \pi^{-n} \mathcal{O} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \pi^{-n} \mathcal{O}, b \in \pi^{-n} \mathcal{O}, ab \in \pi^{-n} \mathcal{O}, c \in \pi^{-n} \mathcal{O} \right\}. \end{aligned}$$

On a

$$\|\chi_{B_n}|_N\|_{A(N)} = \int_{\lambda \in F^*} |\lambda| \|\rho_\lambda(\chi_{B_n}|_N)\|_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*} d\lambda.$$

Soit $\lambda \in F^*$. Alors, pour $f \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} \rho_\lambda(\chi_{B_n}|_N)(f) &= \left(\int_{c \in \pi^{-n}\mathcal{O}} \psi(\lambda c) dc \right) \\ &\left(x \mapsto \int_{a \in \pi^{-n}\mathcal{O}, b \in \pi^{-n}\mathcal{O}, ab \in \pi^{-n}\mathcal{O}} f(x+a) \psi(b\lambda x) dadb \right). \end{aligned}$$

On a $\int_{c \in \pi^{-n}\mathcal{O}} \psi(\lambda c) dc = q^n \chi_{\pi^n \mathcal{O}}(\lambda)$. D'où

$$\begin{aligned} \|\chi_{B_n}|_N\|_{A(N)} &= q^n \int_{\lambda \in \pi^n \mathcal{O} \setminus \{0\}} |\lambda| \\ \left\| f \mapsto \left(x \mapsto \int_{a \in \pi^{-n}\mathcal{O}, b \in \pi^{-n}\mathcal{O}, ab \in \pi^{-n}\mathcal{O}} f(x+a) \psi(b\lambda x) dadb \right) \right\|_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*} & d\lambda. \end{aligned} \quad (19)$$

On va montrer que $m \geq n$ et $\lambda \in \pi^m \mathcal{O}^*$ on a

$$\left\| f \mapsto \left(x \mapsto \int_{a \in \pi^{-n}\mathcal{O}, b \in \pi^{-n}\mathcal{O}, ab \in \pi^{-n}\mathcal{O}} f(x+a) \psi(b\lambda x) dadb \right) \right\|_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^*} \leq q^m (2n+1). \quad (20)$$

On voit déjà que (20) implique le lemme 1.4. En effet, grâce à (19) et à (20), et comme le volume de $\pi^m \mathcal{O}^*$ est $(1 - q^{-1})q^{-m}$, on a

$$\begin{aligned} \|\chi_{B_n}|_N\|_{A(N)} &\leq q^n \sum_{m \geq n} \int_{\lambda \in \pi^m \mathcal{O}^*} |\lambda| q^m (2n+1) d\lambda \\ &= \sum_{m \geq n} (1 - q^{-1}) q^{n-m} (2n+1) = 2n+1. \end{aligned}$$

Il reste donc à montrer (20). Soit $m \geq n$ et $\lambda \in \pi^m \mathcal{O}^*$. Grâce à la décomposition en réunion disjointe

$$\{(a, b) \in (\pi^{-n}\mathcal{O})^2, ab \in \pi^{-n}\mathcal{O}\} = (\mathcal{O} \times \pi^{-n}\mathcal{O}) \cup \bigcup_{j=1}^n (\pi^{-j}\mathcal{O}^* \times \pi^{-n+j}\mathcal{O})$$

et comme $\pi^{-j}\mathcal{O}^* = \pi^{-j}\mathcal{O} \setminus \pi^{-j+1}\mathcal{O}$, on a

$$\begin{aligned} & \left(f \mapsto \left(x \mapsto \int_{a \in \pi^{-n}\mathcal{O}, b \in \pi^{-n}\mathcal{O}, ab \in \pi^{-n}\mathcal{O}} f(x+a)\psi(b\lambda x)dad b \right) \right) \\ & \quad = T_{0,\lambda} + \sum_{j=1}^n (T'_{j,\lambda} - T''_{j,\lambda}) \\ \text{où } & T_{0,\lambda} : f \mapsto \left(x \mapsto \int_{a \in \mathcal{O}, b \in \pi^{-n}\mathcal{O}} f(x+a)\psi(b\lambda x)dad b \right) \\ & T'_{j,\lambda} : f \mapsto \left(x \mapsto \int_{a \in \pi^{-j}\mathcal{O}, b \in \pi^{-n+j}\mathcal{O}} f(x+a)\psi(b\lambda x)dad b \right) \\ \text{et } & T''_{j,\lambda} : f \mapsto \left(x \mapsto \int_{a \in \pi^{-j+1}\mathcal{O}, b \in \pi^{-n+j}\mathcal{O}} f(x+a)\psi(b\lambda x)dad b \right). \end{aligned}$$

Comme $\int_{b \in \pi^{-n+j}\mathcal{O}} \psi(b\lambda x)db = q^{n-j}\chi_{\pi^{n-m-j}\mathcal{O}}(x)$ on a

$$\begin{aligned} T_{0,\lambda}(f) &= q^n \left(x \mapsto \int_{a \in \mathcal{O}} f(x+a)\chi_{\pi^{n-m}\mathcal{O}}(x)da \right) \\ T'_{j,\lambda}(f) &= q^{n-j} \left(x \mapsto \int_{a \in \pi^{-j}\mathcal{O}} f(x+a)\chi_{\pi^{n-m-j}\mathcal{O}}(x)da \right) \\ \text{et } T''_{j,\lambda}(f) &= q^{n-j} \left(x \mapsto \int_{a \in \pi^{-j+1}\mathcal{O}} f(x+a)\chi_{\pi^{n-m-j}\mathcal{O}}(x)da \right). \end{aligned}$$

L'opérateur $T_{0,\lambda}$ est de rang q^{m-n} , et on peut le considérer comme égal à $q^n \text{Id}_{\ell^2(\pi^{n-m}\mathcal{O}/\mathcal{O})}$, donc $\|T_{0,\lambda}\|_{\mathcal{H}^\pi \otimes \mathcal{H}^*} = q^m$.

L'opérateur $T'_{j,\lambda}$ est de rang q^{m-n} , et on peut le considérer comme égal à $q^n \text{Id}_{\ell^2(\pi^{n-m-j}\mathcal{O}/\pi^{-j}\mathcal{O})}$, donc $\|T'_{j,\lambda}\|_{\mathcal{H}^\pi \otimes \mathcal{H}^*} = q^m$.

L'opérateur $T''_{j,\lambda}$ est de rang q^{m-n+1} , et on peut le considérer comme égal à $q^{n-1} \text{Id}_{\ell^2(\pi^{n-m-j}\mathcal{O}/\pi^{-j+1}\mathcal{O})}$, donc $\|T''_{j,\lambda}\|_{\mathcal{H}^\pi \otimes \mathcal{H}^*} = q^m$.

On a donc

$$\left\| T_{0,\lambda} + \sum_{j=1}^n (T'_{j,\lambda} - T''_{j,\lambda}) \right\|_{\mathcal{H}^\pi \otimes \mathcal{H}^*} \leq (2n+1)q^m,$$

et l'inégalité (20) en résulte. Ceci termine la preuve du lemme 1.4.

1.6 Démonstration du lemme 1.5

Pour montrer le lemme 1.5, on commence par un calcul dans N . Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit

$$h_n = q^{-n}\chi_{\pi^{-n}\mathcal{O}}(a)\chi_{\mathcal{O}}(b)\chi_{\pi^{-1}\mathcal{O}}(c)\psi(-c) \in C_c^\infty(N).$$

Lemme 1.17. On a $\|h_n\|_{C_{\text{red}}^*(N)} \leq q^{1-\frac{n}{2}}$.

Démonstration. On a $\int_{c \in \pi^{-1}\mathcal{O}} \psi(-c)\psi(\lambda c)dc = q$ pour $\lambda \in 1 + \pi\mathcal{O}$ et cette intégrale vaut 0 sinon. Donc $\rho_\lambda(h_n) = 0$ pour $\lambda \notin 1 + \pi\mathcal{O}$, et pour $\lambda \in 1 + \pi\mathcal{O}$ on a

$$\begin{aligned} (\rho_\lambda(h_n)(f))(x) &= q^{1-n} \int_{a \in \pi^{-n}\mathcal{O}, b \in \mathcal{O}} f(x+a)\psi(\lambda bx)dad b \\ &= q^{1-n} \int_{a \in \pi^{-n}\mathcal{O}} f(x+a)\chi_{\mathcal{O}}(x)da \end{aligned}$$

donc $\rho_\lambda(h_n)$ est l'opérateur $q^{1-\frac{n}{2}}|\chi_{\mathcal{O}}\langle q^{-\frac{n}{2}}\chi_{\pi^{-n}\mathcal{O}}\rangle|$, qui est de norme $q^{1-\frac{n}{2}}$. \square

Démonstration du lemme 1.5. L'estimée (7) résulte de l'estimée (6) par l'automorphisme (17), comme dans la preuve du lemme 1.3. On montre (6).

Soit $(i, j) \in \Lambda$ avec $j \geq 1$. On pose

$$D'(i, j) = \pi^{\frac{i+2j}{3}} \begin{pmatrix} \pi^{-j} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & & \pi^{-(i+j)} \end{pmatrix} \in G.$$

On a bien sûr $KD'(i, j)K = KD(i, j)K$. On considère

$$h_{i,j} = h_j e_{D'(i,j)} \in C_c^\infty(H).$$

Autrement dit en notant

$$A_{a,b,c}^{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} D'(i, j) = \pi^{\frac{i+2j}{3}} \begin{pmatrix} \pi^{-j} & a & \pi^{-(i+j)}c \\ 0 & 1 & \pi^{-(i+j)}b \\ 0 & 0 & \pi^{-(i+j)} \end{pmatrix} \in H \quad (21)$$

on a

$$h_{i,j} = q^{-j} \int_{a \in \pi^{-j}\mathcal{O}, b \in \mathcal{O}, c \in \pi^{-1}\mathcal{O}} e_{A_{a,b,c}^{i,j}} \psi(-c)dad bdc \in C_c^\infty(H).$$

Il résulte du lemme 1.17 que

$$\|h_{i,j}\|_{C_{\text{red}}^*(H)} \leq q^{1-\frac{j}{2}}. \quad (22)$$

On calcule

$$\begin{aligned} (A_{a,b,c}^{i,j})^{-1} &= D'(i, j)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -a & ab-c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \pi^{-\frac{i+2j}{3}} \begin{pmatrix} \pi^j & -\pi^j a & \pi^j(ab-c) \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & \pi^{i+j} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (23)$$

Pour $a \in \pi^{-j}\mathcal{O}, b \in \mathcal{O}, c \in \pi^{-1}\mathcal{O}$ on a $\|A_{a,b,c}^{i,j}\| = q^{\frac{2i+j}{3}} \max(1, |c|)$ et comme $j \geq 1$ on a $\|(A_{a,b,c}^{i,j})^{-1}\| = q^{\frac{i+2j}{3}}$. Donc d'après (2),

- si $c \in \mathcal{O}$ on a $A_{a,b,c}^{i,j} \in KD(i, j)K$,
- si $c \in \pi^{-1}\mathcal{O}^*$ on a $A_{a,b,c}^{i,j} \in KD(i+2, j-1)K$.

Donc pour toute fonction K -biinvariante $f \in C_c(G)$, on a

$$\int_H f|_H h_{i,j} = f(D(i, j)) - f(D(i+2, j-1)) \quad (24)$$

puisque $\int_{c \in \pi^{-1}\mathcal{O}^*} \psi(c)dc = -1$. Enfin

$$\left| \int_H f|_H h_{i,j} \right| \leq \|f|_H\|_{A(H)} \|h_{i,j}\|_{C_{\text{red}}^*(H)}. \quad (25)$$

Le lemme 1.5 résulte de (22), (24) et (25). \square

2 Le cas de Sp_4

Dans [Lia14], Benben Liao a beaucoup amélioré les démonstrations et certaines estimées qui figuraient dans le second paragraphe de l'ancienne version de ce texte [Laf10b]. Nous nous contentons donc ici d'énoncer les résultats et renvoyons à [Lia14] pour les démonstrations.

Soit F un corps local non archimédien, \mathcal{O} son anneau d'entiers et π une uniformisante de \mathcal{O} . Soit \mathbb{F} le corps résiduel de F . On note q le cardinal de \mathbb{F} . On suppose que q est impair.

Soit $G = Sp_4(F)$ et $K = Sp_4(\mathcal{O})$. Plus précisément on note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de F^4 et on munit F^4 de la forme symplectique w telle que $w(e_1, e_4) = 1$, $w(e_2, e_3) = 1$ et $w(e_i, e_j) = 0$ pour $i+j \neq 5$.

Soit $\Lambda = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2, i \geq j\}$. Pour $(i, j) \in \Lambda$ on note

$$D(i, j) = \begin{pmatrix} \pi^{-i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi^{-j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi^i \end{pmatrix} \in G$$

L'application qui à $(i, j) \in \Lambda$ associe $KD(i, j)K$ induit une bijection entre Λ et $K \backslash G / K$.

On rappelle que pour une matrice $A = (a_{kl})$ on note $\|A\| = \max(|a_{kl}|)$. Alors pour $A \in G$,

$$A \in KD(i, j)K \text{ si et seulement si } \|A\| = q^i \text{ et } \|\Lambda^2 A\| = q^{i+j}. \quad (26)$$

On note B le sous-groupe de Borel de G (formé des matrices triangulaires supérieures) et

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z & w \\ 0 & 1 & y & z - xy \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y, z, w \in F \right\} \quad (27)$$

son radical unipotent.

On a les deux lemmes suivants.

Lemme 2.1. *Pour toute fonction K -biinvariante $f \in C_c(G)$,*

$$|f(D(i, j)) - f(D(i + 1, j - 1))| \leq 2q^3 q^{-j} \|f|_N\|_{A(N)}$$

pour $(i, j) \in \Lambda$ vérifiant $j \geq 3$.

Lemme 2.2. *Pour toute fonction K -biinvariante $f \in C_c(G)$,*

$$|f(D(i, j)) - f(D(i, j + 1))| \leq 2q^{-\frac{i-j}{2}} \|f|_N\|_{A(N)}$$

pour $(i, j) \in \Lambda$ vérifiant $i \geq j + 1$.

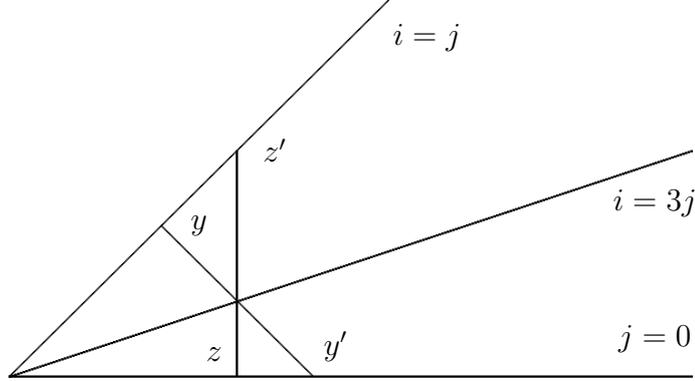
Ces lemmes se démontrent de la même façon que les inégalités (6) et (5) de la proposition 3.2 de [Lia14]. Plus précisément on reprend exactement la preuve la proposition 3.2 de [Lia14]

- en supprimant partout la partie entière $[\cdot]$,
- en enlevant l'hypothèse que F est d'égales caractéristiques (mais en supposant toujours que sa caractéristique résiduelle est impaire).

Les preuves montrent que

- dans l'énoncé du lemme 2.1 on pourrait remplacer N par le sous-groupe formé des matrices (27) telles que $y = 0$ si $i + j$ est pair et $y \in \pi^{-1}\mathbb{F}_q$ si $i + j$ est impair,
- dans l'énoncé du lemme 2.2 on pourrait remplacer N par le sous-groupe formé des matrices (27) telles que $x = 0$.

Les lemmes 2.1 et 2.2 permettent de comparer les valeurs de $f(D(i, j))$ en deux points voisins sur les segments yy' et zz' respectivement. Les estimées deviennent banales quand on se rapproche de y' ou de z' .



La situation est donc comparable à celle du lemme 1.5 (et non à celle du lemme 1.3, ce qui est étonnant puisqu'on utilise ici $\|f|_N\|_{A(N)}$ au lieu de $\|f|_B\|_{A(B)}$). En zigzaguant on déduit des lemmes 2.1 et 2.2 le corollaire suivant (qui est très proche du théorème 3.1 de [Lia14]).

Corollaire 2.3. *Il existe une constante C telle que pour toute fonction K -biinvariante $f \in C_c(G)$,*

$$|f(D(i, j))| \leq Cq^{-\max(\frac{i+j}{4}, \frac{j}{3})} \|f|_N\|_{A(N)}.$$

Démonstration. La preuve est par zigzag, comme dans le corollaire 1.6 (avec $i = 3j$ comme “bissectrice”). \square

Remarque 2.4. Jean-Philippe Anker m'a fait remarquer que les mouvements se font suivant les coracines simples, aussi bien pour SL_3 que pour Sp_4 . On peut remarquer aussi que la bissectrice est, dans les deux cas, colinéaire à la somme des coracines positives. Je n'ai pas d'explication pour cela.

Il est évident que le corollaire 2.3 implique l'existence d'une constante C telle que pour toute fonction K -biinvariante $f \in C_c(G)$ on ait

$$\left| \sum_{i \in \mathbb{N}} f(D(i, 0)) \right| \leq C \|f|_N\|_{A(N)},$$

ce qui est l'analogie non archimédien du lemme 0.6. Cependant le corollaire 2.3 est beaucoup plus fort.

Références

- [CH85] J. De Cannière et U. Haagerup. Multipliers of the Fourier algebras of some simple Lie groups and their discrete subgroups. *Amer. J. Math.* 107(2) :455–500, 1985.
- [CDSW05] M. Cowling, B. Dorofaeff, A. Seeger et J. Wright. A family of singular oscillatory integral operators and failure of weak amenability. *Duke Math. J.* 127(3) : 429–486, 2005.
- [CH89] M. Cowling et U. Haagerup. Completely bounded multipliers of the Fourier algebra of a simple Lie group of real rank one. *Invent. Math.* 96(3) :507–549, 1989.
- [Dor93] B. Dorofaeff. The Fourier algebra of $SL(2, \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, has no multiplier bounded approximate unit. *Math. Ann.* 297(4) : 707–724, 1993.
- [Haa86] U. Haagerup. Group C^* -algebras without the completely bounded approximation property, Preprint, 1986.
- [Laf08] V. Lafforgue. Un renforcement de la propriété (T). *Duke Math. J.*, 143(3) :559–602, 2008.
- [Laf09] V. Lafforgue. Propriété (T) renforcée banachique et transformation de Fourier rapide. *Journal of Topology and Analysis* 1 (3), 191–206 (2009)
- [Laf10a] V. Lafforgue. Propriété (T) renforcée et conjecture de Baum-Connes. *Quanta of maths*, 323–345, Clay Math. Proc., 11, Amer. Math. Soc. (2010)
- [Laf10b] V. Lafforgue. Un analogue non archimédien d’un résultat de Haagerup et lien avec la propriété (T) renforcée (version de 2010) <http://vlafforg.perso.math.cnrs.fr/haagerup-rem.pdf>
- [Lia14] B. Liao. Strong Banach property (T) for simple algebraic groups of higher rank. *Journal of Topology and Analysis* 6 (1), 75–105 (2014)
- [Lia14] B. Liao. About the difficulty to prove the Baum-Connes conjecture without coefficient for a non-cocompact lattice in Sp_4 in a local field. Preprint, arXiv :1411.6151 [math.OA] (2014)