Problèmes ouverts dans le programme de Langlands sur les corps de fonctions

Vincent Lafforgue

CNRS et Institut Fourier, Université Grenoble-Alpes

Grenoble, avril 2019

Préliminaires.

Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini.

Pour tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ on note $\mathrm{Frob}_S : S \to S$ le morphisme de Frobenius, agissant sur les fonctions par $\mathrm{Frob}_S^*(f) = f^q$. Par exemple, si $S = \mathrm{Spec}(A)$ pour une $\mathbb{F}_q$-algèbre A, Frob_S est le morphisme de schémas associé au morphisme de Frobenius de A, $a \mapsto a^q$.

Soit X une courbe projective lisse géométriquement irréductible sur $\mathbb{F}_q$. On note F le corps des fonctions rationnelles sur X. On appelle corps de fonctions les corps ainsi obtenus.

L'exemple le plus simple est $X = \mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$. En notant t la coordonnée sur $\mathbb{A}^1$, l'anneau des fonctions sur $\mathbb{A}^1$ est $\mathbb{F}_q[t]$ et son corps de fractions $F = \mathbb{F}_q(t)$ est le corps des fonctions rationnelles sur X.

Il y a une analogie entre corps de fonctions et corps de nombres. Par exemple on peut considérer $\mathbb{F}_q(t)$ comme un analogue de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{F}_q[t]$ comme un analogue de $\mathbb{Z}$. Les polynôme unitaires irreducibles dans $\mathbb{F}_q[t]$ jouent le même rôle que les nombres premiers dans $\mathbb{Z}$.

De même ∞ joue le rôle de la place archimédienne de $\mathbb{Q}$, mais ici ∞ est juste un point de $\mathbb{P}^1$ comme les autres et le choix d'un point particulier comme ∞ n'interviendra jamais dans la suite.

On définit les points fermés de X comme les sous-schémas irréductibles de X de dimension 0. Pour tout point fermé v l'anneau des fonctions sur v est une extension finie de $\mathbb{F}_q$ notée $k(v)$ et appelée le corps résiduel en v. On note $\deg(v)$ son degré sur $\mathbb{F}_q$.
Par exemple, quand $X = \mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$, les points fermés sont

- ∞ (où le corps résiduel $k(\infty)$ est $\mathbb{F}_q$),
- pour tout polynôme unitaire irreducible P dans $\mathbb{F}_q[t]$, on a un point fermé $v \subset \mathbb{A}^1$ tel que $k(v) = \mathbb{F}_q[t]/P$ est une extension finie de $\mathbb{F}_q$ de degré $\deg(P)$ et le morphisme quotient $\mathbb{F}_q[t] \to \mathbb{F}_q[t]/P$ est la restriction des functions sur $\mathbb{A}^1$ vers les fonctions sur v.

Pour tout point fermé v, on note F_v la complétion de F pour la norme $|.|_v$ telle que pout tout $f \in F^*$, $|f|_v = (\sharp k(v))^{-\operatorname{ord}_v(f)}$ où $\operatorname{ord}_v(f)$ est l'ordre d'annulation de f en v.
Son anneau des entiers $\mathcal{O}_{F_v} = \{a \in F_v, |a|_v \leq 1\}$ est l'anneau des fonctions sur le voisinage formel de v dans X.
L'anneau des adèles entiers est $\mathbb{O} = \prod_v \mathcal{O}_{F_v}$.
L'anneau des adèles est $\mathbb{A} = \prod'_v F_v$ formé des éléments de $\prod_v F_v$ appartenant à $\mathcal{O}_{F_v}$ pour tous les v sauf un nombre fini.

Soit G un groupe réductif, supposé déployé pour simplifier, sur $\mathbb{F}_q$.

Alors $G(\mathbb{A})$ est un groupe localement compact et contient le sous-groupe discret $G(F)$. Le but du programme de Langlands est de décomposer $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}), \mathbb{C})$, en tant que représentation par translations à droite de $G(\mathbb{A})$, en somme directe (ou intégrale) de sous-représentations $\mathfrak{H}_\sigma$ indexées par des paramètres de Langlands σ, et de comprendre les représentations de $G(\mathbb{A})$ apparaissant dans chaque $\mathfrak{H}_\sigma$, et leurs multiplicités.
Soit N un niveau, c'est-à-dire un sous-schéma fini de X (ce qui est équivalent à un ensemble fini de points fermés de X avec multiplicités).

Soit $\mathcal{O}_N$ l'anneau des fonctions sur N. Alors $G(\mathcal{O}_N)$ est un groupe fini. On définit $K_N = \mathrm{Ker}(G(\mathbb{O}) \to G(\mathcal{O}_N))$, qui est un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A})$.

Le programme de Langlands a donc pour but de décomposer, pour tout niveau N, $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N, \mathbb{C})$ en tant que représentation de l'algèbre de Hecke $C_c(K_N\backslash G(\mathbb{A})/K_N, \mathbb{C})$ par convolution à droite. En particulier pour tout $v \in X \smallsetminus N$ on a l'action de $C_c(G(\mathcal{O}_{F_v})\backslash G(F_v)/G(\mathcal{O}_{F_v}), \mathbb{C})$, algèbre des opérateurs de Hecke non ramifiés en v.

Dans le cas des corps de fonctions on a une interprétation géométrique

$$G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N = \mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q) \tag{0.1}$$

où $\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme de G-torseurs sur X avec une trivialisation de leur restriction à N. On rappelle qu'un G-torseur (aussi appelé G-fibré principal) est la donnée de $Y \to X$ avec une action simplement transitive de G sur les fibres.

Definition. Une forme automorphe de niveau N est une fonction sur $\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)$.

On va justifier (0.1) à la limite où N est le niveau infini en tous les points fermés de X, donc on veut montrer $G(F)\backslash G(\mathbb{A}) = \mathrm{Bun}_{G,\infty}(\mathbb{F}_q)$, où $\mathrm{Bun}_{G,\infty}(\mathbb{F}_q)$ classifie les G-torseurs sur X trivialisés sur le voisinage formel de v pour tout point fermé v. Si on choisit une trivialisation d'un tel G-torseur sur $\mathrm{Spec}(F)$, le recollement avec les trivialiations sur les voisinages formels de tous les points fermés se fait par un élément de $G(\mathbb{A})$. Deux trivialisations sur $\mathrm{Spec}(F)$ diffèrent par un élément de $G(F)$.

En fait comme les G-torseurs sur X peuvent avoir des automorphismes, $\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)$ est un groupoïde dont les éléments ont des groupes d'automorphismes finis.

Il est égal au groupoïde des points sur $\mathbb{F}_q$ du champ $\mathrm{Bun}_{G,N}$ sur $\mathbb{F}_q$ dont les "points" sur un schéma S sur $\mathbb{F}_q$ (c'est-à-dire les morphismes $S \to \mathrm{Bun}_{G,N}$) classifient les G-torseurs sur $X \times S$ munis d'une restriction de leur restriction à $N \times S$.

Les produits $X \times S$ et $N \times S$ sont des produits de schémas sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$. Par exemple si A et B sont des $\mathbb{F}_q$-algèbres, le produit de $\mathrm{spec(A)}$ et $\mathrm{spec(B)}$ sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ est $\mathrm{Spec}(A \otimes_{\mathbb{F}_q} B)$

Un champ est comme une variété algébrique dont les points ont des groupes d'automorphismes qui sont des groupes algébriques.
D'après Grothendieck $\mathrm{Bun}_{G,N}$ est recouvert par des ouverts qui sont des quotients de variétés algébriques par des groupes algébriques.

On prend N vide pour simplifier.

Pour tout schéma S, le groupoïde des S-points de Bun_G classifie les G-torseurs $\mathcal{E}$ sur $X \times S$.

On a $\mathrm{Frob}_{\mathrm{Bun}_G}(\mathcal{E}) = (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*(\mathcal{E})$ parce qu'un S-point de Bun_G est un morphisme $u : S \to \mathrm{Bun}_G$ et que $\mathrm{Frob}_{\mathrm{Bun}_G} \circ u = u \circ \mathrm{Frob}_S$.

On note ${}^\tau\mathcal{E} = (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*(\mathcal{E})$.

On va introduire les champs de chtoucas, dont la cohomologie joue un rôle très important dans le programme de Langlands sur les corps de fonctions. On peut voir les chtoucas comme analogues aux variétés abéliennes (mais avec un nombre arbitraire de pattes au lieu de une) et les champs de chtoucas comme analogues aux variétés de Shimura.

On commence par les chtoucas sans pattes, puis les chtoucas à deux pattes (dans le cas plus simple de GL_r), puis les chtoucas les plus généraux.

Le champ des chtoucas sans pattes est défini comme le champ dont les S-points classifient les G-torseurs $\mathcal{E}$ sur $X \times S$ munis d'un isomorphisme avec ${}^\tau\mathcal{E}$. Autrement dit c'est le champ des points fixes de $\mathrm{Frob}_{\mathrm{Bun}_G}$, et donc c'est le champ discret $\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)$. Donc sa cohomologie à support compact est l'espace des fonctions à support compact sur $\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)$, c'est-à-dire l'espace des formes automorphes.

On se prépare maintenant aux chtoucas de Drinfeld pour GL_r.

Les GL_r-torseurs sont équivalents aux fibrés vectoriels de rang r. En effet à un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur un schéma Y on associe le GL_r-torseur sur Y dont la fibre en un point $y \in Y$ est formée des bases de l'espace vectoriel $\mathcal{E}_y$ (et GL_r agit par changement de base).

Donc, pour tout schéma S, le groupoïde des S-points de Bun_{GL_r} classifie les fibrés vectoriels $\mathcal{E}$ de rang r sur $X \times S$.

On a $\mathrm{Frob}_{\mathrm{Bun}_{GL_r}}(\mathcal{E}) = (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*(\mathcal{E})$ (image inverse en tant que fibré vectoriel), que l'on note ${}^\tau\mathcal{E}$.

Chtoucas de Drinfeld (à deux pattes, pour GL_r).

Un chtouca à droite (resp. à gauche) de rang $r \geq 1$ sur un schéma S (sur $\mathbb{F}_q$) est un diagramme de fibrés vectoriels de rang r sur $X \times S$

$$\mathcal{E} \overset{j_1}{\hookrightarrow} \mathcal{E}' \overset{j_2}{\hookleftarrow} {}^\tau\mathcal{E} \quad \text{resp.} \quad \mathcal{E} \overset{j_2}{\hookleftarrow} \mathcal{E}' \overset{j_1}{\hookrightarrow} {}^\tau\mathcal{E}, \quad \text{où :}$$

- j_1 et j_2 sont injectifs,
- les conoyaux de j_1 et j_2 sont supportés par les graphes $\Gamma_{x_1} \subset S \times X$ et $\Gamma_{x_2} \subset S \times X$ de deux morphismes $x_1 : S \to X$ et $x_2 : S \to X$, et sont localement libres de rang 1 sur leurs supports.

Le champ Cht^d des chtoucas à droite de rang r est muni d'un morphisme $\pi = (x_1, x_2) : \mathrm{Cht}^d \to X \times X$. De même, le champ Cht^g des chtoucas à gauche de rang r est muni d'un morphisme $\pi = (x_1, x_2) : \mathrm{Cht}^g \to X \times X$.

Les morphismes x_1 et x_2 sont appelés les pattes du chtouca.

Les champs Cht^d et Cht^g sont de Deligne-Mumford (les groupes d'automorphismes de leurs points sont finis). Les morphismes π vers $X \times X$ sont lisses de dimension relative $2r - 2$.

On a les morphismes de Frobenius partiels introduits par Drinfeld

$$\mathrm{Frob}_1 : \mathrm{Cht}^d \to \mathrm{Cht}^g, \quad (\mathcal{E} \overset{j_1}{\hookrightarrow} \mathcal{E}' \overset{j_2}{\hookleftarrow} {}^\tau\mathcal{E}) \to (\mathcal{E}' \overset{j_2}{\hookleftarrow} {}^\tau\mathcal{E} \overset{{}^\tau j_1}{\hookrightarrow} {}^\tau\mathcal{E}')$$

au-dessus du morphisme de Frobenius partiel de X^2 :

$$(x_1, x_2) \mapsto (\mathrm{Frob}_X(x_1), x_2),$$

et, de façon analogue,

$$\mathrm{Frob}_2 : \mathrm{Cht}^g \to \mathrm{Cht}^d, \quad (\mathcal{E} \overset{j_2}{\hookleftarrow} \mathcal{E}' \overset{j_1}{\hookrightarrow} {}^\tau\mathcal{E}) \mapsto (\mathcal{E}' \overset{j_1}{\hookrightarrow} {}^\tau\mathcal{E} \overset{{}^\tau j_2}{\hookleftarrow} {}^\tau\mathcal{E}')$$

au-dessus de $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, \mathrm{Frob}_X(x_2))$.
Les composées $\mathrm{Frob}_2 \circ \mathrm{Frob}_1$ et $\mathrm{Frob}_1 \circ \mathrm{Frob}_2$ sont les morphismes de Frobenius (totaux) de Cht^d et Cht^g.

Pour $E \in \mathrm{Bun}_{GL_r}(\mathbb{F}_q)$ on note $\mathcal{Y}^d(0,E)$ le sous-champ fermé de Cht^d formé des

$$(\mathcal{E} \overset{j_1}{\hookrightarrow} \mathcal{E}' \overset{j_2}{\hookleftarrow} {}^{\tau}\mathcal{E})$$

tels qu'il existe un isomorphisme $\mathcal{E} \simeq E$ pour lequel $j_1 = j_2$ (cette condition a un sens car si $\mathcal{E} = E$ on a ${}^{\tau}\mathcal{E} = E$, et elle implique $x_1 = x_2$). On voit que $\mathcal{Y}^d(0,E)$ est le quotient par le groupe d'automorphismes de E de l'espace total de $\mathbb{P}(E)$, considéré comme un fibré en $\mathbb{P}^{r-1}$ au-dessus de la diagonale de $X \times X$.

Autrement dit on a

$$\cup_{E \in \mathrm{Bun}_{GL_r}(\mathbb{F}_q)} \mathcal{Y}^d(0,E) \subset \mathrm{Cht}^d \Big|_{\Delta(X)}$$

où $\Delta : X \to X \times X$ est la diagonale.

On a donc des cycles algébriques $\mathcal{Y}^d(0,E)$, de dimension $r = 1 + (r-1)$, indexés par $E \in \mathrm{Bun}_{GL_r}(\mathbb{F}_q)$, dans l'espace total de Cht^d, de dimension $2r = 2 + (2r-2)$.

On a des cycles algébriques analogues dans Cht^g.

On définit Cht comme Cht^d et Cht^g mais en oubliant la donnée de $\mathcal{E}'$ (en donnant seulement $\mathcal{E}$, les pattes x_1, x_2, et un morphisme rationnel de $\mathcal{E}$ vers ${}^\tau\mathcal{E}$ pouvant se factoriser sous la forme $j_2^{-1} \circ j_1$ ou $j_1 \circ j_2^{-1}$ pour un certain $\mathcal{E}'$).

On a alors des morphismes d'oubli $\mathrm{Cht}^d \xrightarrow{\beta^d} \mathrm{Cht} \xleftarrow{\beta^g} \mathrm{Cht}^g$.
Le morphisme β^d a pour effet de contracter les cycles $\mathcal{Y}^d(0, E)$: en effet la donnée de $\mathcal{E} \xrightarrow{j_2^{-1}\circ j_1} {}^\tau\mathcal{E}$ détermine de manière unique $\mathcal{E} \overset{j_1}{\hookrightarrow} \mathcal{E}' \overset{j_2}{\hookleftarrow} {}^\tau\mathcal{E}$ sauf si $\mathcal{E} = {}^\tau\mathcal{E} \in \mathrm{Bun}_{GL_r}(\mathbb{F}_q)$, auquel cas $x_1 = x_2$, $j_1 = j_2$ et $\mathcal{E}'$ varie dans un $\mathbb{P}^{r-1}$. De même pour β^g.

Les morphismes β^d et β^g sont propres et petits et on a $R\beta^d_*(\mathbb{Q}_\ell) = R\beta^g_*(\mathbb{Q}_\ell) = IC_{\mathrm{Cht}}$.

Donc Cht^d et Cht^g ont la même cohomologie (totale ou relative à $X \times X$) et les mêmes groupes de Chow et ceux-ci sont munis de l'action des morphismes de Frobenius partiels Frob_2 et Frob_1.

Pour tout entier $i \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{Y}^d(i, E)$ l'image de $\mathcal{Y}^d(0, E)$ par $(\mathrm{Frob}_1)^i$.

Cette page et la suivante décrivent un travail en commun avec Jean-Benoît Bost, bientôt disponible sur arXiv.

Dans l'espace des formes automorphes $C_c(\mathrm{Bun}_{GL_r}(\mathbb{F}_q), \mathbb{Q})$, on a le sous-espace des formes automorphes génériques.
Alors pour f dans ce sous-espace (plus une condition si $r = 1$), et pour tout i, $\sum f(E)[\mathcal{Y}^d(i, E)]$ est primitif (tué par le cup produit par un diviseur ample). Si on connaissait la conjecture standard de l'indice de Hodge de Grothendieck les auto-intersections des cycles primitifs auraient pour signe $(-1)^n$. Un calcul d'intersection de ces cycles et les formules explicites de Weil montrent que ceci impliquerait la pureté des fonctions L de toutes les formes automorphes cuspidales pour GL_r. La pureté dit que les zéros de ces fonctions L ont le module attendu.

Cette pureté est déjà connue comme conséquence de la correspondance de Langlands et de Weil II. Mais on aimerait en avoir une preuve automorphe. En effet l'hypothèse de Riemann généralisée sur les corps de nombres (qui affirme que les fonctions L des formes automorphes cuspidales pour GL_r ont des zéros non triviaux de partie réelle attendue) fait intervenir des formes automorphes non nécessairement algébriques et une preuve de celle-ci serait donc automorphe et aurait certainement un analogue sur les corps de fonctions, d'où l'idée de commencer par chercher une preuve automorphe sur les corps de fonctions.

Soit v un point fermé de X. Alors pour $E \in \mathrm{Bun}_{GL_r}(\mathbb{F}_q)$, et pour tout i multiple de $\deg(v)$, $\mathcal{Y}^d(i,E)\big|_v$ est un cycle algébrique de dimension $r-1$ dans $\mathrm{Cht}^d\Big|_{\Delta(v)}$, champ de Deligne-Mumford de dimension $2r-2$ sur le corps résiduel en v. Les combinaisons $\sum f(E)[\mathcal{Y}^d(i,E)\big|_v]$, pour f dans $C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_{GL_r}(\mathbb{F}_q),\mathbb{Q})$, sont primitives.
Si on connaissait la conjecture standard de l'indice de Hodge de Grothendieck pour $\mathrm{Cht}^d\Big|_{\Delta(v)}$, les auto-intersections des cycles primitifs auraient pour signe $(-1)^{r-1}$. Un calcul d'intersection de ces cycles montre que ceci impliquerait la conjecture de Ramanujan-Petersson (c'est-a-dire le caractère tempéré du facteur local en v) pour toutes les formes automorphes cuspidales dans $C_c(\mathrm{Bun}_{GL_r}(\mathbb{F}_q),\mathbb{Q})$.

Cette conjecture est connue pour GL_r (montrée par mon frère), mais ce qui précède s'étend à tous les groupes réductifs G (avec des champs de chtoucas plus généraux introduits ci-dessous) et dans ce cas la conjecture de Ramanujan-Petersson n'est pas connue (Jean-Benoît Bost et moi-même montrons donc qu'elle est impliquée par la conjecture de l'indice de Hodge de Grothendieck, à des problèmes près de compactifications de champs de chtoucas).

Avant de passer à d'autres problèmes ouverts, je rappelle mon travail et celui de Cong Xue.

Soit ℓ un nombre premier ne divisant pas q.

On rappelle que $\pi = (x_1, x_2) : \mathrm{Cht}^d \to X^2$ est le morphisme (lisse de dimension $2r-2$) indiquant les pattes. Alors les inclusions de cycles

$$\cup_{E \in \mathrm{Bun}_{GL_r}(\mathbb{F}_q)} \mathcal{Y}^d(0, E) \subset \mathrm{Cht}^d \Big|_{\Delta(X)}$$

donnent deux morphismes de faisceaux sur X : le morphisme de création

$$C_c(\mathrm{Bun}_{GL_r}(\mathbb{F}_q), \mathbb{Q}_\ell) \otimes \mathbb{Q}_\ell\big|_X \to R^{2r-2}\pi_! \mathbb{Q}_\ell\big|_{\Delta(X)}$$

et le morphisme d'annihilation

$$R^{2r-2}\pi_! \mathbb{Q}_\ell\big|_{\Delta(X)} \to C_c(\mathrm{Bun}_{GL_r}(\mathbb{F}_q), \mathbb{Q}_\ell) \otimes \mathbb{Q}_\ell\big|_X.$$

On note $\eta = \mathrm{Spec}(F)$ le point générique de X et $\overline{\eta} = \mathrm{Spec}(\overline{F})$ un point géométrique associé.
L'action des Frobenius partiels, un lemme de Drinfeld, mon travail dans le cas cuspidal et le travail de Cong Xue en général montrent que $R^{2r-2}\pi_!\mathbb{Q}_\ell\big|_{\Delta(\overline{\eta})}$ est muni d'une action de $\mathrm{Weil}(\overline{F}/F)^2$.
Pour $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathrm{Weil}(\overline{F}/F)^2$ on définit alors l'opérateur d'excursion

$$S_{(\gamma_1,\gamma_2)} : \qquad \begin{array}{ccc} C_c(\mathrm{Bun}_{GL_r}(\mathbb{F}_q), \mathbb{Q}_\ell) & \longrightarrow & R^{2r-2}\pi_!\mathbb{Q}_\ell\big|_{\Delta(\overline{\eta})} \\ & & \Big\downarrow {\scriptstyle (\gamma_1,\gamma_2)} \\ C_c(\mathrm{Bun}_{GL_r}(\mathbb{F}_q), \mathbb{Q}_\ell) & \longleftarrow & R^{2r-2}\pi_!\mathbb{Q}_\ell\big|_{\Delta(\overline{\eta})} \end{array}$$

Il ne dépend que de $\gamma_1^{-1}\gamma_2$ à conjugaison près et un calcul géométrique d'intersection de cycles (utilisé aussi dans mon travail avec Jean-Benoît Bost) montre qu'il est égal à un opérateur de Hecke en v lorsque $\gamma_1^{-1}\gamma_2$ est un élément de Frobenius en v.

On considère maintenant les champs de chtoucas les plus généraux. Soit G un groupe réductif, supposé déployé pour simplifier, sur $\mathbb{F}_q$. Soit I un ensemble fini. On définit Cht_I comme l'ind-champ de Deligne-Mumford sur X^I dont les points sur un schéma S sur $\mathbb{F}_q$ classifient

- des points $(x_i)_{i\in I} : S \to X^I$, appelés les pattes du chtouca,
- un G-torseur $\mathcal{G}$ sur $X \times S$,
- un isomorphisme

$$\phi : \mathcal{G}\big|_{(X\times S)\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*(\mathcal{G})\big|_{(X\times S)\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})}$$

  où $\Gamma_{x_i} \subset X \times S$ désigne le graphe de x_i.

Le champ des chtoucas sans pattes $\mathrm{Cht}_\emptyset$ est égal au groupoïde discret $\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)$.

Remarque. Les chtoucas n'ont pas d'analogue en général sur les corps de nombres car personne ne sait donner un sens à $(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}))^I$ quand $\sharp I > 1$. De façon étonnante, Scholze a défini un analogue des champs de chtoucas locaux sur $\mathbb{Q}_p$.

Le groupe dual de Langlands

On note $\widehat{G}$ le groupe dual de Langlands de G. C'est le groupe réductif déployé sur $\overline{\mathbb{Q}}$ (ici sur $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$) dont les poids et racines sont des copoids et coracines de G, et vice-versa.

Exemples :

G	$\widehat{G}$
GL_n	GL_n
SL_n	PGL_n
SO_{2n+1}	Sp_{2n}
Sp_{2n}	SO_{2n+1}
SO_{2n}	SO_{2n}

et si G est un des cinq groupes exceptionnels, $\widehat{G}$ est du même type.

L'équivalence de Satake géométrique.

On définit $\mathcal{M}_I$ comme le préchamp sur X^I dont les points sur un schéma S sur $\mathbb{F}_q$ classifient

- des points $(x_i)_{i\in I} : S \to X^I$,
- des G-torseurs $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sur la complétion formelle $\widehat{X \times S}$ de $X \times S$ le long de l'union des Γ_{x_i},
- un isomorphisme

$$\phi : \mathcal{G}\big|_{\widehat{X\times S} \smallsetminus (\bigcup_{i\in I} \Gamma_{x_i})} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}'\big|_{\widehat{X\times S} \smallsetminus (\bigcup_{i\in I} \Gamma_{x_i})}$$

  où Γ_{x_i} désigne le graphe de x_i.

Alors $\mathcal{M}_I(S)$ ne dépend que de $\bigcup_{i\in I} \Gamma_{x_i}$. La fusion des pattes est ce qui se produit lorsque certains des x_i deviennent égaux.
L'équivalence de Satake géométrique associe à tout ensemble fini I et à toute représentation $\mathbb{Q}_\ell$-linéaire W de $\widehat{G}^I$ un faisceau pervers $\mathcal{S}_{I,W}$ sur $\mathcal{M}_I$, qui est fonctoriel en W et compatible avec la fusion des pattes.

Le morphisme d'oubli évident $\alpha : \mathrm{Cht}_I \to \mathcal{M}_I$ est formellement lisse.
On définit un faisceau pervers $\mathcal{F}_{I,W}$ sur Cht_I comme l'image inverse $\alpha^*(\mathcal{S}_{I,W})$.
On définit

$$H_{I,W} = H_c^*(\mathrm{Cht}_I \big|_{\Delta(\overline{\eta})}, \mathcal{F}_{I,W}).$$

Lorsque W est irréductible, égal à $\boxtimes_{i \in I} V^{\lambda_i}$ où λ_i est un copoids dominant de $\widehat{G}$, donc un poids dominant de G, $\mathcal{F}_{I,W}$ est isomorphe au faisceau de cohomologie d'intersection du sous-champ fermé de Cht_I où la modification en x_i est bornée par λ_i.

En général $H_{I,W}$ est un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension infinie contenant un sous-espace "cuspidal" qui est de dimension finie (Cong Xue).

Un lemme de Drinfeld affirme que tout $\mathbb{Q}_\ell$-système local $\mathcal{F}$ de dimension finie sur U^I (où U est un ouvert de X), muni d'actions des morphismes de Frobenius partiels, fournit une représentation de $\mathrm{Weil}(\overline{F}/F)^I$ sur sa fibre $\mathcal{F}\big|_{\Delta(\overline{\eta})}$ (cas typique : $\mathcal{F} = \boxtimes_{i \in I} \mathcal{F}_i$ où $\mathcal{F}_i$ est un $\mathbb{Q}_\ell$-système local sur U).

J'ai utilisé ce lemme pour munir la partie cuspidale $H_{I,W}^{\mathrm{cusp}}$ de $H_{I,W}$ d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)^I$ et Cong Xue a étendu cette action en une action continue de $\mathrm{Weil}(\overline{F}/F)^I$ sur $H_{I,W}$ tout entier.

Propriétés des $H_{I,W}$

a) fonctorialité de $H_{I,W}$ en W : pour tout morphisme $u : W \to W'$ de représentations de $\widehat{G}^I$, on a $\mathcal{H}(u) : H_{I,W} \to H_{I,W'}$,

b) fusion (associée à toute application $I \to J$, mais on se limite à J singleton, noté $\{0\}$) : on a un isomorphisme, fonctoriel en W représentation de $\widehat{G}^I$,

$$H_{I,W} \xrightarrow{\sim} H_{\{0\},W_{\mathrm{diag}}}$$

où W_{diag} désigne la représentation de $\widehat{G}$ sur W obtenue en composant avec le morphisme diagonal $\widehat{G} \to \widehat{G}^I$.

Exemples de fusion :

- (avec $I = \{1,2\}$) si W_1 et W_2 sont deux représentations de $\widehat{G}$,

$$H_{\{1,2\},W_1 \boxtimes W_2} \xrightarrow{\sim} H_{\{0\},W_1 \otimes W_2}$$

- (avec $I = \emptyset$) : $H_{\emptyset,\mathbf{1}} \xrightarrow{\sim} H_{\{0\},\mathbf{1}}$ où $\mathbf{1}$ est la représentation triviale.
  Cela est important car $H_{\emptyset,\mathbf{1}} = C_c(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q), \mathbb{Q}_\ell)$
  (puisque $\mathrm{Cht}_\emptyset = \mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)$ et $\mathcal{F}_{\emptyset,\mathbf{1}}$ est le faisceau constant $\mathbb{Q}_\ell$).

Pour toute fonction algébrique f sur $\widehat{G}\backslash\widehat{G}^I/\widehat{G}$ on peut trouver une représentation W de $\widehat{G}^I$ et $x \in W$ et $\xi \in W^*$ invariants par l'action diagonale de $\widehat{G}$, tels que

$$f((g_i)_{i\in I}) = \langle \xi, (g_i)_{i\in I} \cdot x \rangle. \tag{0.2}$$

Soit $(\gamma_i)_{i\in I} \in (\mathrm{Weil}(\overline{F}/F))^I$. L'opérateur d'excursion $S_{I,f,(\gamma_i)_{i\in I}}$ de $H_{\{0\},\mathbf{1}} = H_{\emptyset,\mathbf{1}} = C_c(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q), \mathbb{Q}_\ell)$ dans lui-même est défini comme la composée

$$\begin{tikzcd}
H_{\{0\},\mathbf{1}} \arrow[r, "\mathcal{H}(x)"] & H_{\{0\},W_{\mathrm{diag}}} \arrow[r, "\text{fusion}", "\sim"'] & H_{I,W} \arrow[d, "(\gamma_i)_{i\in I}"] \\
H_{\{0\},\mathbf{1}} & H_{\{0\},W_{\mathrm{diag}}} \arrow[l, "\mathcal{H}(\xi)"'] & H_{I,W} \arrow[l, "\text{fusion}"', "\sim"]
\end{tikzcd}$$

où W_{diag} est la représentation diagonale de $\widehat{G}$ sur W, et $x : \mathbf{1} \to W_{\mathrm{diag}}$ et $\xi : W_{\mathrm{diag}} \to \mathbf{1}$ sont considérés comme des morphismes de représentations de $\widehat{G}$.

Les opérateurs d'excursion commutent entre eux, vérifient des relations naturelles et contiennent comme cas particuliers tous les opérateurs de Hecke sphériques. En les diagonalisant simultanément sur $C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q), \mathbb{Q}_\ell)$, j'ai montré le théorème suivant (qui était déjà connu pour GL_r par Drinfeld et mon frère). Pour simplifier on suppose G semi-simple. Alors $C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q), \mathbb{Q}_\ell)$ est de dimension finie.

Théorème. On a une décomposition canonique

$$C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q), \overline{\mathbb{Q}_\ell}) = \bigoplus_\sigma \mathfrak{H}_\sigma$$

indexée par des paramètres de Langlands globaux (c'est-à dire des morphismes $\sigma : \pi_1(X \setminus N) \to \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ continus semisimples, à conjugaison près par $\widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$), telle que $\mathfrak{H}_\sigma$ soit l'espace propre généralisé pour les $S_{I,f,(\gamma_i)_{i\in I}}$ avec les valeurs propres $f((\sigma(\gamma_i))_{i\in I})$. Les opérateurs de Hecke en tous les points fermés de $X \setminus N$ agissent sur $\mathfrak{H}_\sigma$ par des scalaires déterminés par σ.

Extension par Cong Xue au cas non cuspidal (avec compatibilité à l'induction parabolique).

Problème ouvert très difficile

Cong Xue a montré que $H_{I,W} = H_c^*(\mathrm{Cht}_I\big|_{\Delta(\overline{\eta})}, \mathcal{F}_{I,W})$ est muni d'une action de $(\mathrm{Weil}(\overline{F}/F))^I$. Cela devrait impliquer que les éléments de $H_c^*(\mathrm{Cht}_I\big|_{\Delta(\overline{\eta})}, \mathcal{F}_{I,W})$ proviennent (par restriction par le morphisme diagonal $\Delta(\overline{\eta}) \to (\overline{\eta})^I$) de $H_c^*(\mathrm{Cht}_I\big|_{(\overline{\eta})^I}, \mathcal{F}_{I,W})$, où le produit $(\overline{\eta})^I$ est pris sur $\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}_q})$ et est donc le spectre de l'anneau intègre $(\overline{F})^{\otimes I}$.
L'avantage est que l'action de $(\mathrm{Weil}(\overline{F}/F))^I$ sur $H_c^*(\mathrm{Cht}_I\big|_{(\overline{\eta})^I}, \mathcal{F}_{I,W})$ est évidente. En effet on rappelle la suite exacte du haut

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(\overline{F}/(F \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q})) & \longrightarrow & \mathrm{Weil}(\overline{F}/F) & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \pi_1^{\mathrm{geom}}(\eta, \overline{\eta}) & \longrightarrow & \pi_1^{\mathrm{arith}}(\eta, \overline{\eta}) & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

L'action évidente de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/(F \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}_q}))^I$ sur $H_c^*(\mathrm{Cht}_I\big|_{(\overline{\eta})^I}, \mathcal{F}_{I,W})$ s'étend en une action de $(\mathrm{Weil}(\overline{F}/F))^I$ grâce aux morphismes de Frobenius partiels. On aimerait utiliser cela pour calculer les opérateurs d'excursion de façon plus explicite, voire algorithmique.

La question précédente est motivée aussi par la situation sur les corps de nombres.
Soit G réductif sur $\mathbb{Q}$ et $X = G(\mathbb{R})/K$ l'espace symétrique associé. Soit Γ un sous-groupe d'indice fini dans $G(\mathbb{Z})$. Alors $H^*(X/\Gamma, \mathbb{Q}_\ell)$ est un analogue de $C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q), \mathbb{Q}_\ell)$. Suivant les conjectures de Ash-Stevens et les travaux de Scholze et Venkatesh on espère qu'il existe des opérateurs d'excursion $S_{I,f,(\gamma_i)_{i\in I}}$ sur $H^*(X/\Gamma, \mathbb{Q}_\ell)$ avec maintenant $\gamma_i \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ (et même sur $H^*(X/\Gamma, \mathbb{Z}_\ell)$ si la fonction f sur $\widehat{G}\backslash\widehat{G}^I/\widehat{G}$ est définie sur $\mathbb{Z}_\ell$). Cela donnerait les paramètres de Langlands associés à toutes les formes automorphes cohomologiques sur les corps de nombres ! On en est donc très loin !

Si une construction de tels opérateurs d'excursion existait, elle aurait certainement un analogue sur les corps de fonctions, et donnerait sans doute une façon de comprendre des classes de cohomologie dans $H_c^*(\mathrm{Cht}_I\big|_{(\overline{\eta})^I}, \mathcal{F}_{I,W})$ (qui devrait avoir un analogue sur les corps de nombres, car on peut le reconstruire artificiellement par les conjectures de multiplicités d'Arthur-Kottwitz) sans passer par le champ $\mathrm{Cht}_I\big|_{(\overline{\eta})^I}$ ni son site étale (qui, eux, n'ont sans doute pas d'analogues).

Autres problèmes ouverts.

1) Montrer que la décomposition du théorème principal est indépendante de ℓ et du plongement $\overline{\mathbb{Q}} \subset \overline{\mathbb{Q}_\ell}$. Autrement dit on aurait

$$C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q), \overline{\mathbb{Q}}) = \bigoplus_{\sigma} \mathfrak{H}_\sigma,$$

où la décomposition serait indexée par des paramètres de Langlands motiviques (un article subtil de Drinfeld “On the pro-semisimple completion ... ” définit de tels paramètres de Langlands motiviques sans admettre les conjectures standard).

On saurait montrer ce résultat si on savait construire les opérateurs d'excursion de façon motivique. Le gros problème est de comprendre $H_c^*(\mathrm{Cht}_I\big|_{(\overline{\eta})^I}, \mathcal{F}_{I,W})$ comme somme directe de produits tensoriels de motifs sur $\overline{\eta}$. Une telle somme directe de produits tensoriels de motifs sur $\overline{\eta}$ pourrait avoir un analogue sur les corps de nombres, comme objet de la catégorie abstraite engendrée par les produits tensoriels de motifs sur $\overline{\mathbb{Q}}$, ce qui serait encore mieux que d'avoir un analogue de $H_c^*(\mathrm{Cht}_I\big|_{(\overline{\eta})^I}, \mathcal{F}_{I,W})$ comme groupe de cohomologie seulement (comme espéré au bas de la page précédente).

2) Montrer que tout σ apparaissant dans la décomposition du théorème principal provient d'un paramètre d'Arthur elliptique σ', c'est-à-dire est la composée

$$\mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \times SL_2(\overline{\mathbb{Q}_\ell}) \xrightarrow{\sigma'} \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}),$$

où l'ellipticité de σ' signifie que le centralisateur de son image dans $\widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ est fini. Le premier morphisme est

$$\gamma \mapsto \left(\gamma, \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix}^{\deg(\gamma)}\right).$$

On peut montrer (en un certain sens) que si $\mathfrak{H}_\sigma$ est générique (au sens où la forme linéaire de Whittaker ne s'annule pas sur $\mathfrak{H}_\sigma$) alors σ' est trivial sur $SL_2(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$. Alors σ serait lui-même elliptique, donc pur (par Weil II) et cela impliquerait Ramanujan-Petersson (encore !).

La conjecture de multiplicités d'Arthur-Kottwitz (énoncée ici avec la cohomologie cuspidale, à défaut de savoir définir une cohomologie "discrète") dit, sous une forme faible (précisée dans la vraie conjecture à l'aide des L-paquets locaux), qu'il existe pour tout σ une représentation $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-linéaire $\mathfrak{A}_\sigma$ de son centralisateur $S_\sigma \subset \widehat{G}$, telle que

$$H_{I,W}^{cusp} \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \overline{\mathbb{Q}_\ell} \stackrel{?}{=} \bigoplus_{\sigma} \left(\mathfrak{A}_\sigma \otimes W_{\sigma^I}\right)^{S_\sigma}$$

où S_σ agit diagonalement et W_{σ^I} est la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)^I$ obtenue par composition de la représentation W de $\widehat{G}^I$ avec le morphisme $\sigma^I : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)^I \to \widehat{G}^I$.
On ne sait pas montrer la conjecture précédente, mais on obtient un énoncé un peu plus faible grâce à une construction proposée par Drinfeld, exposée dans la page suivante.

Soit Reg la représentation régulière gauche de $\widehat{G}$ (l'action par translations à gauche de $\widehat{G}$ sur l'espace des fonctions algébriques sur $\widehat{G}$).
On peut munir $H_{\{0\},\mathrm{Reg}}$

a) d'une structure of $\mathcal{O}$-module sur "l'espace" $\mathcal{S}$ des morphismes $\sigma : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \widehat{G}$,

b) d'une action de $\widehat{G}$ compatible avec la conjugaison par $\widehat{G}$ sur $\mathcal{S}$.

On a tautologiquement $H_{I,W} = (H_{\{0\},\mathrm{Reg}} \otimes W)^{\widehat{G}}$ (où $\widehat{G}$ agit diagonalement). Si le $\mathcal{O}$-module $\widehat{G}$-équivariant ci-dessus était supporté sur des $\widehat{G}$-orbites isolées (de la forme $\widehat{G}/S_\sigma$, en choisissant un point σ dans chaque orbite), on en déduirait, en notant $\mathfrak{A}_\sigma$ la fibre de ce $\mathcal{O}$-module en σ, la conjecture de la page précédente (car les invariants par $\widehat{G}$ de l'espace des sections d'un fibré sur $\widehat{G}/S_\sigma$ induit d'une représentation de S_σ sont les invariants par S_σ).
Xinwen Zhu et moi avons montré que cela marche bien quand on se limite à la cohomologie cuspidale et aux σ elliptiques (car ils ne peuvent pas se déformer et correspondent donc à des $\widehat{G}$-orbites isolées dans $\mathcal{S}$).

Un travail en commun avec Alain Genestier.

Dans mon théorème principal la décomposition

$$C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q),\overline{\mathbb{Q}_\ell})=\bigoplus_{\sigma}\mathfrak{H}_\sigma, \tag{0.3}$$

est préservée par tous les opérateurs de Hecke, incluant les opérateurs de Hecke ramifiés en les points fermés v dans N.
Le théorème donne la compatibilité avec l'isomorphisme de Satake en les points fermés dans $X\setminus N$ mais ne dit pas comment l'action sur $\mathfrak{H}_\sigma$ des opérateurs de Hecke ramifiés en les points fermés v dans N est reliée à σ.

Dans un travail en commun avec Alain Genestier, nous associons à toute représentation irréductible π_v de $G(F_v)$ un paramètre de Langlands local $\sigma(\pi_v)$ à semisimplification près (qui ne dépend en fait que du caractère par lequel le centre de Bernstein en v agit sur π_v).
Nous montrons de plus que si $\pi=\otimes_v\pi_v$ et π^{K_N} apparaît dans $\mathfrak{H}_\sigma$ alors le semisimplifié de $\sigma\big|_{\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)}$ est égal à $\sigma(\pi_v)$ pour tout v.

Catégories sur un champ. Une catégorie sur un schéma affine $\mathrm{Spec}(A)$ est simplement une catégorie A-linéaire. Si H est un groupe algébrique agissant sur l'algèbre A, on a équivalence entre les deux notions suivantes :

- une catégorie A-linéaire $\mathcal{C}$ munie d'une action de H compatible avec l'action de H sur A,
- une catégorie $\mathcal{C}'$ avec action tensorielle de $\mathrm{Rep}(H)$ (notée $W \star X$ pour W représentation de H et $X \in \mathcal{C}'$) et, pour tout $X \in \mathcal{C}'$ un morphisme $A \star X \to X$ (où A est vu comme un objet de $\mathrm{Rep}(H)$) et des compatibilités.

Le lien est que $\mathcal{C}'$ est formée des objets H-équivariants de $\mathcal{C}$. On appelle catégorie au-dessus du champ $\mathrm{Spec}(A)/H$ une catégorie comme $\mathcal{C}'$ ci-dessus (cf article de Gaitsgory sur arXiv, 2005).
Pour un projet avec Alain Genestier, on cherche à construire des DG-catégories sur les “champs” suivants

- le champ $\mathcal{L} = \mathcal{S}/\widehat{G}$ des paramètres de Langlands globaux
- pour tout point fermé v dans X, le champ $\mathcal{L}_v = \mathcal{S}_v/\widehat{G}$ des paramètres de Langlands locaux en v, où $\mathcal{S}_v$ est “l'espace” des morphismes $\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v) \to \widehat{G}$.

Projet avec Alain Genestier.

Nous espérons étudier la structure interne des L-paquets locaux et la structure des formules de multiplicités d'Arthur-Kottwitz.

Pour tout point fermé v on appelle "champ des isocristaux" Iso_v le "champ" des chtoucas locaux (i.e. dans la définition d'un chtouca on remplace X par le disque formel autour de v) avec une patte en v, à isogénie près. On peut considérer un chtouca local comme analogue à un groupe de Barsotti-Tate (dans la mesure où on considère un chtouca comme analogue à une variété abélienne). En fait pour des raisons techniques nous utilisons plutôt des chtoucas "restreints" qui sont des analogues de groupes de Barsotti-Tate tronqués.
On espère définir une DG-catégorie $\mathcal{C}_v$ constituée des faisceaux ℓ-adiques sur Iso_v. On espère montrer que $\mathcal{C}_v$ est au-dessus du champ $\mathcal{L}_v$ des paramètres de Langlands locaux, c'est-à-dire que pour toute représentation algébrique W de $\widehat{G}$ et tout $X \in \mathcal{C}_v$, on possède $W \star X \in \mathcal{C}_v$ muni d'une action de $\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)$.
Pour construire $W \star X$ on considère le "champ" des chtoucas locaux avec une patte en v et une patte en y près de v. Sur l'ouvert où $y \neq v$, on a le faisceau $\mathcal{S}_W \boxtimes X$ (où $\mathcal{S}_W$ vient de Satake géométrique et est lié à la patte en y). Alors $W \star X$ serait le faisceau cycle proche quand y tend vers v.

On a un foncteur de $\mathcal{C}_v$ vers la DG-catégorie des représentations lisses admissibles de $G(F_v)$, par restriction à l'isocristal trivial dont le groupe des isogénies (qui est le groupe des automorphismes dans Iso_v) est $G(F_v)$.
On espère que ce foncteur est une équivalence de catégories quand on se limite aux fibres de ces catégories au-dessus d'un paramètre de Langlands local elliptique σ_v.
Cela donnerait canoniquement l'action de $\mathrm{Rep}(S_{\sigma_v})$ sur la catégorie des représentations engendrée par le L-paquet associé à σ_v.
Conjecturalement ce L-paquet est formé de représentations irréductibles supercuspidales, en bijection avec les représentations irréductibles de S_{σ_v} (après un choix de normalisation de Whittaker, qui singularise l'élément générique du paquet pour cette normalisation, l'action de $\mathrm{Rep}(S_{\sigma_v})$ devant alors permettre de construire le reste de la bijection).

Soit S un ensemble fini de points fermés de la courbe. On considère $\otimes_{v\in S} \mathcal{C}_v$ (objet conjectural pour le moment, "DG-catégorie des faisceaux sur $\prod_{v\in S} \mathrm{Iso}_v$", devant être au-dessus de $\prod_{v\in S} \mathcal{L}_v$).
Pour I ensemble fini et W représentation de $(\widehat{G})^I$, on considère le champ $\mathrm{Cht}_{I,S}$ des chtoucas avec pattes en $(x_i)_{i\in I} \in (X \smallsetminus S)^I$ et en S. Sur $\mathrm{Cht}_{I,S}$ on a $\mathcal{F}_{I,W}$ (faisceau de Satake lié aux pattes x_i), et son image directe à support propre par le morphisme de $\mathrm{Cht}_{I,S}$ vers le produit des champs de chtoucas locaux en v (par restriction d'un chtouca global en chtoucas locaux) doit être invariant par isogénies, donc doit définir un objet de $\otimes_{v\in S} \mathcal{C}_v$.
Une généralisation de la construction proposée par Drinfeld (qui correspond au cas où $S=\emptyset$) doit alors fournir un objet du tiré en arrière de $\otimes_{v\in S} \mathcal{C}_v$ par le morphisme $\mathcal{L} \to \prod \mathcal{L}_v$ (dans le cas où $S=\emptyset$, $\otimes_{v\in S} \mathcal{C}_v$ est la catégorie des espaces vectoriels et son tiré en arrière par $\mathcal{L} \to$ point est la catégorie des $\mathcal{O}$-modules sur $\mathcal{L}$, c'est-à-dire des $\mathcal{O}$-modules $\widehat{G}$-équivariants sur $\mathcal{S}$).
Concrètement cela impliquerait que l'action de S_σ sur $\mathcal{A}_\sigma$ dans la construction de Drinfeld provient d'une action de $\prod_{v\in S} S_{\sigma_v}$ comme dans les formules de multiplicités d'Arthur-Kottwitz.

Un autre problème ouvert, indépendant des précédents, est de trouver un noyau pour la fonctorialité de Langlands. On suppose le niveau trivial pour simplifier. Soient G et H réductifs (déployés pour simplifier) munis d'un morphisme $\alpha : \widehat{G} \to \widehat{H}$. On espère construire une fonction explicite sur $\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{Bun}_H(\mathbb{F}_q)$ donnant un opérateur

$$T : C_c(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q), \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \to C(\mathrm{Bun}_H(\mathbb{F}_q), \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

compatible aux opérateurs de Hecke, et plus généralement aux opérateurs d'excursion : pour tout ensemble fini I et toute fonction f sur $\widehat{H}\backslash\widehat{H}^I/\widehat{H}$, dont on note f_G la restriction à $\widehat{G}\backslash\widehat{G}^I/\widehat{G}$, et pour $(\gamma_i)_{i\in I} \in (\mathrm{Weil}(\overline{F}/F))^I$, $S_{I,f,(\gamma_i)_{i\in I}} \circ T = T \circ S_{I,f_G,(\gamma_i)_{i\in I}}$. Cela est connu dans le cas de la correspondance theta (par exemple $G = SO_{2n}, H = Sp_{2n}$, de sorte que $\widehat{G} = SO_{2n} \to SO_{2n+1} = \widehat{H}$). Mais cela est inconnu en général et de difficulté à priori similaire au problème de la fonctorialité sur les corps de nombres.

Conclusion. Les problèmes ouverts sur les corps de fonctions sont très difficiles et éclairants pour les corps de nombres. En revanche l'analogue de Bloch-Kato sur les corps de fonctions est trop simple et il n'y a pas d'analogue des formes automorphes p-adiques. Et la cryptographie est triviale (Scanlon) car tout est $\mathbb{F}_q$-linéaire et les calculs matriciels se font en temps polynômial.