Chtoucas et programme de Langlands pour les corps de fonctions

Vincent Lafforgue

CNRS et MAPMO, Université d'Orléans

26 février 2015

Article : “Introduction aux chtoucas pour les groupes réductifs et à la paramétrisation de Langlands globale”
http://arxiv.org/abs/1404.3998

On montre le sens "automorphe vers Galois" de la correspondance de Langlands globale pour tout groupe réductif G sur un corps de fonctions (et même pour les groupes métaplectiques).
La correspondance de Langlands relie

- les formes automorphes pour G
- les réprésentations galoisiennes à valeurs dans le groupe dual de Langlands (plus précisément les paramètres de Langlands globaux)

On construit une décomposition *canonique* de l'espace vectoriel des formes automorphes cuspidales, indexée par des paramètres de Langlands globaux. Dans le cas où $G = GL_r$ cela était déjà connu par Drinfeld pour $r = 2$ et Laurent Lafforgue pour r arbitraire.

On n'utilise pas la formule des traces d'Arthur-Selberg, mais seulement les deux ingrédients suivants :

- les champs classifiants de chtoucas, introduits par Drinfeld pour GL_r et généralisés à tous les groupes réductifs par Varshavsky
- l'équivalence de Satake géométrique de Lusztig, Drinfeld, Ginzburg, et Mirkovic–Vilonen.

Remerciements. Ce travail est issu d'un projet avec Jean-Benoît Bost. Il n'existerait pas non plus sans de très nombreuses discussions avec Alain Genestier. Je n'aurais jamais pu travailler sur ce sujet éloigné de ma spécialité d'origine sans la précieuse liberté de chercher permise par le CNRS. Je remercie mes collègues du MAPMO pour leur soutien constant.

Le programme de Langlands concerne les deux types de corps “globaux” : corps de nombres et corps de fonctions.
Un corps de nombres est une extension finie de $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire un corps obtenu en ajoutant à $\mathbb{Q}$ des racines d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$.
Un corps de fonctions F est le corps des fonctions rationnelles sur une courbe projective X sur un corps fini $\mathbb{F}_q$.
Si q est un nombre premier, $\mathbb{F}_q = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. En général q est une puissance d'un nombre premier et tous les corps finis de cardinal q sont isomorphes entre eux, bien que non canoniquement, d'où la notation $\mathbb{F}_q$.
L'exemple le plus simple est $F = \mathbb{F}_q(t)$ qui est le corps des fonctions rationnelles sur la droite projective $X = \mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \infty$ (où $\mathbb{A}^1$ est la droite affine).
Les courbes projectives sur $\mathbb{C}$ correspondent aux surfaces de Riemann complètes. Ces courbes (ou plus généralement les courbes projectives sur des corps algébriquement clos) servent de cadre au programme de Langlands géométrique.

On appelle place d'un corps global une norme (à équivalence près) c'est-à-dire une façon de le compléter en un corps dit “local”. Par exemple les places de $\mathbb{Q}$ sont

- la place archimédienne, en laquelle le complété est $\mathbb{R}$ (avec la norme usuelle)
- pour tout nombre premier p, la place p en laquelle le complété est $\mathbb{Q}_p$ (la norme dans $\mathbb{Q}_p$ d'un nombre $r \in \mathbb{Q}$ est d'autant plus petite que r est divisible par une grande puissance de p : elle est égale à p^{-n_p}, où $n_p \in \mathbb{Z}$ est l'exposant de p dans la décomposition de r en un produit de facteurs premiers).

Soit F le corps des fonctions sur une courbe X sur un corps fini $\mathbb{F}_q$. Alors les places de F correspondent aux points fermés de X (définis comme les idéaux maximaux).
Dans le cas où $X = \mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \infty$, les places sont

- la place ∞ (en laquelle le complété est $F_q((t^{-1}))$)
- les places associées aux polynômes unitaires irréductibles dans $\mathbb{F}_q[t]$ (qui est l'anneau des fonctions sur $\mathbb{A}^1$) : ils jouent donc un rôle analogue à celui des nombres premiers dans $\mathbb{Z}$.

Pour l'instant on prend $G = GL_r$. Lorsque le corps est $\mathbb{Q}$, une forme automorphe est une fonction sur $GL_r(\mathbb{Z})\backslash GL_r(\mathbb{R})$. Ce quotient classifie les $\mathbb{Z}$-modules libres M de rang r munis d'une trivialisation $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^r$.

Soit maintenant $\mathbb{F}_q$ un corps fini et X une courbe projective sur $\mathbb{F}_q$. On fixe une place v de X pour remplacer la place archimédienne de $\mathbb{Q}$.
L'analogue du quotient ci-dessus classifie les
fibrés vectoriels de rang r sur X munis d'une trivialisation sur le disque formel autour de v
On omet la trivialisation sur le disque formel autour de v (car dans cet exposé on ne considère que le cas sans niveau) et on oublie v.
Une forme automorphe sera donc pour nous une fonction sur le groupoïde discret $\mathrm{Bun}_{GL_r}(\mathbb{F}_q)$ qui classifie les fibrés vectoriels de rang r sur X. Il s'agit des points sur $\mathbb{F}_q$ du champ Bun_{GL_r} sur $\mathbb{F}_q$ dont les S-points (avec S un schéma sur $\mathbb{F}_q$) classifient les fibrés vectoriels de rang r sur $X \times S$.
Un champ est comme une variété dont les points ont des groupes d'automorphismes (par exemple le quotient d'une variété algébrique par un groupe algébrique est un champ).

Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini. Soit X une courbe projective lisse sur $\mathbb{F}_q$ et F son corps de fonctions.
Soit G un groupe réductif connexe sur F supposé déployé pour simplifier.
Alors $\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)$ classifie les G-torseurs (i.e. G-fibrés principaux) sur X . C'est un groupoïde discret c'est-à-dire un ensemble dont les objets ont des groupes d'automorphismes finis. On note Z le centre de G et Ξ un réseau dans le groupe formé par l'ensemble des objets de $\mathrm{Bun}_Z(\mathbb{F}_q)$ (si G a un centre fini on peut donc prendre Ξ trivial).
Soit ℓ un nombre premier ne divisant pas q.
On note $C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ le $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-espace vectoriel de dimension finie formé des fonctions cuspidales sur $\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi$.
On va construire une décomposition *canonique* de cet espace indexée par des paramètres de Langlands.

On note $\widehat{G}$ le groupe dual de Langlands de G (groupe déployé sur $\mathbb{Q}_\ell$). Il est caractérisé par le fait que ses racines et ses poids sont les coracines et les copoids de G, et vice-versa. Exemples :

G	$\widehat{G}$
GL_n	GL_n
SL_n	PGL_n
SO_{2n+1}	Sp_{2n}
Sp_{2n}	SO_{2n+1}
SO_{2n}	SO_{2n}

Soit $\overline{F}$ une clôture séparable du corps de fonctions F.
On note $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ le groupe de ses automorphismes.
DEFINITION Un paramètre de Langlands global est une classe de conjugaison de morphisme $\sigma : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ continu et semi-simple.

On va définir les opérateurs de Hecke. Ils ressemblent aux laplaciens sur les graphes. Soit v comme ci-dessus.

Si $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}'$ sont deux G-torseurs sur X on dit que $\mathcal{G}'$ est une modification de $\mathcal{G}$ en v si on se donne un isomorphisme entre leurs restrictions à $X \setminus v$. Alors leur position relative $[\mathcal{G}' : \mathcal{G}]$ est un copoids dominant λ de G (lorsque $G = GL_r$ il s'agit du r-uplet des diviseurs élémentaires). On introduit ainsi un opérateur de Hecke

$$T_{\lambda,v} : C_c^{\text{cusp}}(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \to C_c^{\text{cusp}}(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$
$$f \mapsto [\mathcal{G} \mapsto \sum_{\mathcal{G}', [\mathcal{G}':\mathcal{G}]=\lambda} f(\mathcal{G}')]$$

où la somme (finie) porte sur les modifications $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$ en v avec position relative λ.

Ces opérateurs commutent entre eux et forment une algèbre commutative abstraite $\mathcal{H}_v$, dite algèbre de Hecke non ramifiée en v, qui agit donc sur $C_c^{\text{cusp}}(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$.

Nous allons construire une décomposition canonique

$$C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) = \bigoplus_\sigma \mathfrak{H}_\sigma \tag{0.1}$$

où la somme porte sur les paramètres de Langlands σ non ramifiés. Cette décomposition sera respectée par l'action des opérateurs de Hecke. En fait on va construire une algèbre commutative $\mathcal{B}$ contenant les $\mathcal{H}_v$ telle que

- $\mathcal{B}$ agit naturellement sur $C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$
- chaque caractère ν de $\mathcal{B}$ correspond de manière unique à un paramètre de Langlands σ.

Comme $\mathcal{B}$ est commutative on a une décomposition spectrale canonique

$$C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) = \bigoplus_\nu \mathfrak{H}_\nu$$

où ν parcourt les caractères de $\mathcal{B}$ (trigonalisation simultanée d'une famille d'opérateurs qui commutent). En associant à tout ν un paramètre de Langlands σ on en déduit la décomposition (0.1) attendue.

La décomposition ci-dessus

$$C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) = \bigoplus_\sigma \mathfrak{H}_\sigma$$

sera compatible avec l'isomorphisme de Satake en toute place v de X, au sens suivant.

L'isomorphisme de Satake est un isomorphisme canonique entre l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}_v$ et l'anneau des représentations de $\widehat{G}$. D'où une bijection entre les caractères de $\mathcal{H}_v$ et les classes de conjugaison semi-simples dans $\widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$.

La compatibilité consiste en le fait que

- $\mathcal{H}_v$ agit sur $\mathfrak{H}_\sigma$ par multiplication par un caractère (qui est la restriction de ν à $\mathcal{H}_v \subset \mathcal{B}$, si ν est comme dans la page précédente)
- ce caractère correspond par l'isomorphisme de Satake à la classe de conjugaison de $\sigma(\mathrm{Frob}_v)$, où $\mathrm{Frob}_v \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ est un élément de Frobenius en v c'est à-dire l'image d'un élément de $\mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v)$ de degré $1 \in \widehat{\mathbb{Z}}$.

Pour construire cette décomposition on a besoin de la cohomologie ℓ-adique des champs de chtoucas.
La cohomologie ℓ-adique des variétés (sur des corps de caractéristique $\neq \ell$) est très proche de la cohomologie de Betti des variétés complexes, mais elle est à coefficients dans $\mathbb{Q}_\ell$ ou $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$. Elle a nécessité l'introduction par Grothendieck de la notion de topos, qui est une généralisation extraordinaire de la notion d'espace topologique.
Dans un espace topologique X on a la catégorie dont

- les objets sont les ouverts $U \subset X$
- les flèches $U \to V$ sont les inclusions $U \subset V$

et on a la notion de recouvrement d'un ouvert par une famille d'ouverts.
En considérant une catégorie abstraite avec une notion de recouvrement vérifiant certains axiomes on obtient la notion de site.
Un topos est la catégorie des faisceaux d'ensemble sur un site.

Pour définir la cohomologie étale d'une variété algébrique X (lisse pour simplifier) on considère le site étale dont les objets sont les morphismes étales

$$\begin{tikzcd} U \arrow[d] \\ X \end{tikzcd}$$

(un morphisme est étale si sa différentielle est partout inversible), dont les flèches sont données par les triangles commutatifs

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr] \arrow[dr] & & V \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

avec toutes les flèches étales et où la notion de recouvrement est évidente. La cohomologie étale est définie à coefficients dans $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$, d'où $\mathbb{Z}_\ell$ en passant à la limite, et $\mathbb{Q}_\ell$ en inversant ℓ.

Soit I un ensemble fini et $W = \boxtimes_{i\in I} W_i$ une représentation irréductible de $\widehat{G}^I$ (autrement dit chaque W_i est une représentation irréductible de $\widehat{G}$).
Pour tout schéma S sur $\mathbb{F}_q$ on note $\mathrm{Frob}_S : S \to S$ le morphisme qui agit par $f \mapsto f^q$ au niveau des fonctions : $\mathrm{Frob}_S^*(f) = f^q$.
On définit $\mathrm{Cht}_{I,W}$ comme le champ de Deligne-Mumford (=orbifold) sur X^I dont les points sur un schéma S sur $\mathbb{F}_q$ classifient les chtoucas, c'est-à-dire

- des points $(x_i)_{i\in I} : S \to X^I$, appelés les pattes du chtouca,
- un G-torseur $\mathcal{G}$ sur $X \times S$,
- un isomorphisme

$$\phi : \mathcal{G}\big|_{(X\times S)\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*(\mathcal{G})\big|_{(X\times S)\smallsetminus(\bigcup_{i\in I}\Gamma_{x_i})}$$

où Γ_{x_i} désigne le graphe de x_i, tel que la position relative en x_i soit bornée par le copoids dominant de G correspondant au poids dominant de W_i.

On note $H_{I,W}$ le $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-espace vectoriel égal à la partie Hecke-finie de la cohomologie ℓ-adique d'intersection (en degré moitié) de la fibre de $\mathrm{Cht}_{I,W}/\Xi$ au-dessus du point générique de X^I (ou, de façon en fait équivalente, du point générique de la diagonale $X \subset X^I$).

On remarque que ce qui compte n'est pas l'espace $\mathrm{Cht}_{I,W}/\Xi$ mais le morphisme

$$\begin{array}{c} \mathrm{Cht}_{I,W}/\Xi \\ \downarrow \\ X^I \end{array}$$

(qui à un chtouca associe le I-uplet de ses pattes). Depuis Grothendieck les morphismes sont plus importants que les espaces.

Le $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-espace vectoriel $H_{I,W}$ est muni d'une action de $(\mathrm{Gal}(\overline{F}/F))^I$.

Pour $I = \emptyset$ et $W = \mathbf{1}$ (la représentation triviale), on a un isomorphisme

$$H_{\emptyset,\mathbf{1}} = C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell}).$$

En effet les S-points de $\mathrm{Cht}_{\emptyset,\mathbf{1}}$ classifient les G-torseurs $\mathcal{G}$ sur $X \times S$, munis d'un isomorphisme

$$\phi : \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*(\mathcal{G}).$$

Or si on voit $\mathcal{G}$ comme un S-point de Bun_G, $(\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*(\mathcal{G})$ est son image par $\mathrm{Frob}_{\mathrm{Bun}_G}$. Donc $\mathrm{Cht}_{\emptyset,\mathbf{1}}$ classifie les points fixes de $\mathrm{Frob}_{\mathrm{Bun}_G}$, Donc il est égal à $\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)$. De plus la propriété d'être Hecke-finie équivaut à la cuspidalité.

On veut donc construire une décomposition $H_{\emptyset,\mathbf{1}} = \bigoplus_\sigma \mathfrak{H}_\sigma$.

L'équivalence de Satake géométrique (due à Lusztig, Drinfeld, Ginzburg, et Mirkovic–Vilonen dans la lignée directe des travaux de Grothendieck et de ses élèves) fournit une équivalence canonique de catégories tensorielles entre

- la catégorie des faisceaux pervers sur le “champ”

$$\{\mathcal{G}, \mathcal{G}' \text{ deux } G-\text{torseurs sur un disque formel } D_x$$
$$\text{et } \phi \text{ isomorphisme entre leurs restrictions à } D_x \setminus x\}$$

- la catégorie tensorielle des représentations de $\widehat{G}$.

La structure tensorielle sur la première catégorie est obtenue en considérant des modifications en deux points x, y de X et en les “fusionnant”.
En fait cela *définit* $\widehat{G}$ à partir de G (grâce à un foncteur fibre).
L'équivalence de Satake géométrique permet alors

a) de définir $H_{I,W}$ de façon fonctorielle en W,

b) de comprendre ce qui se passe lorsque certaines des pattes fusionnent.

Enoncé de la propriété a)

Pour tout ensemble fini I,

$$W \mapsto H_{I,W}, \quad u \mapsto \mathcal{H}(u)$$

est un foncteur $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-linéaire de la catégorie des représentations de $(\widehat{G})^I$ vers la catégorie des représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)^I$.
Cela signifie que pour tout morphisme

$$u : W \to W'$$

de représentations de $(\widehat{G})^I$, on a un morphisme

$$\mathcal{H}(u) : H_{I,W} \to H_{I,W'}$$

de représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)^I$.

Enoncé de la propriété b)

Pour toute application $\zeta : I \to J$, on possède un isomorphisme

$$\chi_\zeta : H_{I,W} \xrightarrow{\sim} H_{J,W^\zeta}$$

qui est

- fonctoriel en W, où W est une représentation de $(\widehat{G})^I$ et W^ζ désigne la représentation de $(\widehat{G})^J$ sur W obtenue en composant avec le morphisme diagonal

$$(\widehat{G})^J \to (\widehat{G})^I, (g_j)_{j\in J} \mapsto (g_{\zeta(i)})_{i\in I}$$

- $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)^J$-équivariant, où $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)^J$ agit sur le membre de gauche par le morphisme diagonal

$$\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)^J \to \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)^I,\ (\gamma_j)_{j\in J} \mapsto (\gamma_{\zeta(i)})_{i\in I},$$

- et compatible avec la composition, c'est-à-dire $\chi_{\zeta\circ\zeta'} = \chi_\zeta \circ \chi_{\zeta'}$,

Exemples d'utilisation des propriétés a) et b).
Pour tout ensemble fini I on note $\zeta_I : I \to \{0\}$ l'application tautologique (où $\{0\}$ est un choix de notation arbitraire pour désigner un singleton).
Si W_1 et W_2 sont deux représentations de $\widehat{G}$, on a par b) un isomorphisme canonique

$$\chi_{\zeta_{\{1,2\}}} : H_{\{1,2\},W_1 \boxtimes W_2} \xrightarrow{\sim} H_{\{0\},W_1 \otimes W_2}$$

associé à $\zeta_{\{1,2\}} : \{1,2\} \to \{0\}$. On note la différence entre $W_1 \boxtimes W_2$ qui est une représentation de $(\widehat{G})^2$ et $W_1 \otimes W_2$ qui est une représentation de $\widehat{G}$.
Un autre exemple d'application de b) est l'isomorphisme

$$H_{\{0\},\mathbf{1}} \xrightarrow[\sim]{\chi_{\zeta_\emptyset}^{-1}} H_{\emptyset,\mathbf{1}} = C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

associé à $\zeta_\emptyset : \emptyset \to \{0\}$ (l'idée de l'isomorphisme $\chi_{\zeta_\emptyset}$ est que $H_{\emptyset,\mathbf{1}}$ *resp.* $H_{\{0\},\mathbf{1}}$ est la cohomologie du champ de chtoucas sans pattes *resp.* avec une patte fictive et qu'elles sont identiques). Grâce à cet isomorphisme nous sommes ramenés à construire une décomposition

$$H_{\{0\},\mathbf{1}} = \bigoplus_\sigma \mathfrak{H}_\sigma .$$

Pour toute fonction $f \in \mathcal{O}(\widehat{G}\backslash(\widehat{G})^I/\widehat{G})$ on peut trouver une représentation W de $(\widehat{G})^I$ et $x \in W$ et $\xi \in W^*$ invariants par l'action diagonale de $\widehat{G}$ tels que

$$f((g_i)_{i\in I}) = \langle \xi, (g_i)_{i\in I} \cdot x\rangle. \tag{0.2}$$

Soit $(\gamma_i)_{i\in I} \in (\mathrm{Gal}(\overline{F}/F))^I$. L'endomorphisme $S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i\in I}}$ de

$$H_{\{0\},\mathbf{1}} \xrightarrow[\sim]{\chi_{\zeta_\emptyset}^{-1}} H_{\emptyset,\mathbf{1}} = C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

est défini comme la composée

$$H_{\{0\},\mathbf{1}} \xrightarrow{\mathcal{H}(x)} H_{\{0\},W^{\zeta_I}} \xrightarrow[\sim]{\chi_{\zeta_I}^{-1}} H_{I,W} \xrightarrow{(\gamma_i)_{i\in I}} H_{I,W} \xrightarrow[\sim]{\chi_{\zeta_I}} H_{\{0\},W^{\zeta_I}} \xrightarrow{\mathcal{H}(\xi)} H_{\{0\},\mathbf{1}}$$

où $x : \mathbf{1} \to W^{\zeta_I}$ et $\xi : W^{\zeta_I} \to \mathbf{1}$ sont considérés ici comme des morphismes de représentations de $\widehat{G}$ (W^{ζ_I} est simplement W muni de la représentation diagonale de $\widehat{G}$). On montre qu'il ne dépend pas du choix de W, x, ξ vérifiant (0.2), et on le note aussi $S_{I,f,(\gamma_i)_{i\in I}}$.

Heuristiquement on a

$$H_{I,W} \overset{?}{=} \bigoplus_{\sigma} \mathfrak{H}_\sigma \otimes W_{\sigma^I},$$

où W_{σ^I} est la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)^I$ obtenue en composant la représentation W de $\widehat{G}^I$ avec le morphisme $\sigma^I : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)^I \to \widehat{G}^I$.
Dans cette heuristique l'endomorphisme $S_{I,f,(\gamma_i)_{i\in I}} = S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i)_{i\in I}}$ de

$$H_{\{0\},\mathbf{1}} \xrightarrow[\sim]{\chi_{\zeta_\emptyset}^{-1}} H_{\emptyset,\mathbf{1}} \overset{?}{=} \bigoplus_{\sigma} \mathfrak{H}_\sigma$$

agit sur $\mathfrak{H}_\sigma$ par la composée

$$\mathfrak{H}_\sigma \xrightarrow[\sim]{\chi_{\zeta_\emptyset}} \mathfrak{H}_\sigma \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathfrak{H}_\sigma} \otimes x} \mathfrak{H}_\sigma \otimes W \xrightarrow{(\sigma(\gamma_i))_{i\in I}} \mathfrak{H}_\sigma \otimes W \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathfrak{H}_\sigma} \otimes \xi} \mathfrak{H}_\sigma \otimes \mathbf{1} \xrightarrow[\sim]{\chi_{\zeta_\emptyset}^{-1}} \mathfrak{H}_\sigma$$

c'est-à-dire par le scalaire

$$\langle \xi, (\sigma(\gamma_i))_{i\in I} \cdot x \rangle = f((\sigma(\gamma_i))_{i\in I}).$$

Opérateurs de Hecke non ramifiés. Soit V une représentation irréductible de $\widehat{G}$. On prend

$$I = \{1,2\}, \quad W = V \boxtimes V^*$$
$$x = \delta_V : \mathbf{1} \to V \boxtimes V^* \text{ et } \xi = \mathrm{ev}_V : V \boxtimes V^* \to \mathbf{1}.$$

Alors la fonction $f \in \mathcal{O}(\widehat{G} \backslash (\widehat{G})^I / \widehat{G})$ associée est $(g_1, g_2) \mapsto \mathrm{Tr}_V(g_1 g_2^{-1})$.
Par un argument géométrique (une sorte de calcul d'intersection de cycles dans le champ de chtoucas) on montre que pour toute place v, en notant $\mathrm{Frob}_v \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ un relèvement de Frobenius, $S_{\{1,2\},f,(\mathrm{Frob}_v,1)}$ agit comme l'opérateur de Hecke non ramifié en v associé à la classe de V dans l'anneau des représentations de $\widehat{G}$.
Cette égalité joue un rôle très important dans des arguments techniques, et elle permet de justifier le fait que la décomposition que nous allons construire est compatible avec l'isomorphisme de Satake en toutes les places v de X.

A l'aide des propriétés a) et b) mais *sans utiliser l'heuristique précédente* on montre que

1) l'algèbre $\mathcal{B}$ d'endomorphismes de $H_{\{0\},\mathbf{1}} \simeq H_{\emptyset,\mathbf{1}}$ engendrée par les $S_{I,f,(\gamma_i)_{i\in I}}$ quand I, f et $(\gamma_i)_{i\in I}$ varient est commutative et que les $S_{I,f,(\gamma_i)_{i\in I}}$ vérifient entre eux un certain nombre de relations (attendues par l'heuristique),

2) pour chaque caractère ν de $\mathcal{B}$ il existe un unique paramètre de Langlands σ tel que pour tous I, f et $(\gamma_i)_{i\in I}$,

$$\nu(S_{I,f,(\gamma_i)_{i\in I}}) = f((\sigma(\gamma_i))_{i\in I}).$$

Comme $\mathcal{B}$ est commutative on a une décomposition spectrale canonique $H_{\emptyset,\mathbf{1}} \simeq H_{\{0\},\mathbf{1}} = \bigoplus_\nu \mathfrak{H}_\nu$ où ν parcourt les caractères de $\mathcal{B}$ (trigonalisation simultanée d'une famille d'opérateurs qui commutent). En associant à tout ν un unique paramètre de Langlands σ comme dans 2) on en déduit la décomposition $H_{\emptyset,\mathbf{1}} = \bigoplus_\sigma \mathfrak{H}_\sigma$ attendue.

Idée de la preuve de 1) : preuve d'une première relation. Soit $\zeta : I \to J$ une application et W une représentation de $(\widehat{G})^I$. On montre la relation

$$S_{J,W^{\zeta},x,\xi,(\gamma_j)_{j\in J}} = S_{I,W,x,\xi,(\gamma_{\zeta(i)})_{i\in I}}$$

à l'aide du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & H_{J,W^{\zeta}} \arrow[r, "(\gamma_j)_{j\in J}"] & H_{J,W^{\zeta}} \arrow[dr, "\chi_{\zeta_J}"] & & \\
H_{\{0\},\mathbf{1}} \arrow[r, "\mathcal{H}(x)"'] & H_{\{0\},W^{\zeta_I}} \arrow[ur, "\chi_{\zeta_J}^{-1}"] \arrow[r, "\chi_{\zeta_I}^{-1}"'] & H_{I,W} \arrow[u, "\chi_{\zeta}"'] \arrow[r, "(\gamma_{\zeta(i)})_{i\in I}"'] & H_{I,W} \arrow[u, "\chi_{\zeta}"] \arrow[r, "\chi_{\zeta_I}"'] & H_{\{0\},W^{\zeta_I}} \arrow[r, "\mathcal{H}(\xi)"'] & H_{\{0\},\mathbf{1}}
\end{tikzcd}$$

où la ligne du bas est égale au membre de droite et celle du haut est égale au membre de gauche.

Idée de la preuve de 1) : preuve d'une deuxième relation (qui implique la commutativité de $\mathcal{B}$). On montre

$$S_{I_1\cup I_2, W_1\boxtimes W_2, x_1\boxtimes x_2, \xi_1\boxtimes\xi_2, (\gamma_i^1)_{i\in I_1}\times(\gamma_i^2)_{i\in I_2}}$$
$$= S_{I_1, W_1, x_1, \xi_1, (\gamma_i^1)_{i\in I_1}} \circ S_{I_2, W_2, x_2, \xi_2, (\gamma_i^2)_{i\in I_2}}$$

à l'aide du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H_{\{0\}\cup\{0\},\mathbf{1}} \arrow[d, "\mathcal{H}(x_1\boxtimes\mathbf{1})"'] \arrow[dr, "\mathcal{H}(x_1\boxtimes x_2)"] & & & & & \\
H_{\{0\}\cup\{0\},W_1^{\zeta_1}\boxtimes\mathbf{1}} \arrow[r, "\mathcal{H}(\mathrm{Id}\boxtimes x_2)"] \arrow[d, "\chi^{-1}_{\zeta_1\times\mathrm{Id}}"'] & H_{\{0\}\cup\{0\},W_1^{\zeta_1}\boxtimes W_2^{\zeta_2}} \arrow[d, "\chi^{-1}_{\zeta_1\times\mathrm{Id}}"'] \arrow[dr, "\chi^{-1}_{\zeta_1\times\zeta_2}"] & & & & \\
H_{I_1\cup\{0\},W_1\boxtimes\mathbf{1}} \arrow[r, "\mathcal{H}(\mathrm{Id}\boxtimes x_2)"] \arrow[d, "\gamma^1\times 1"'] & H_{I_1\cup\{0\},W_1\boxtimes W_2^{\zeta_2}} \arrow[r, "\chi^{-1}_{\mathrm{Id}\times\zeta_2}"] \arrow[d, "\gamma^1\times 1"'] & H_{I_1\cup I_2,W_1\boxtimes W_2} \arrow[d, "\gamma^1\times 1"'] \arrow[dr, "\gamma^1\times\gamma^2"] & & & \\
H_{I_1\cup\{0\},W_1\boxtimes\mathbf{1}} \arrow[r, "\mathcal{H}(\mathrm{Id}\boxtimes x_2)"] \arrow[d, "\chi_{\zeta_1\times\mathrm{Id}}"'] & H_{I_1\cup\{0\},W_1\boxtimes W_2^{\zeta_2}} \arrow[r, "\chi^{-1}_{\mathrm{Id}\times\zeta_2}"] \arrow[d, "\chi_{\zeta_1\times\mathrm{Id}}"'] & H_{I_1\cup I_2,W_1\boxtimes W_2} \arrow[r, "1\times\gamma^2"] \arrow[d, "\chi_{\zeta_1\times\mathrm{Id}}"'] & H_{I_1\cup I_2,W_1\boxtimes W_2} \arrow[d, "\chi_{\zeta_1\times\mathrm{Id}}"'] \arrow[dr, "\chi_{\zeta_1\times\zeta_2}"] & & \\
H_{\{0\}\cup\{0\},W_1^{\zeta_1}\boxtimes\mathbf{1}} \arrow[r, "\mathcal{H}(\mathrm{Id}\boxtimes x_2)"] \arrow[d, "\mathcal{H}(\xi_1\boxtimes\mathbf{1})"'] & H_{\{0\}\cup\{0\},W_1^{\zeta_1}\boxtimes W_2^{\zeta_2}} \arrow[r, "\chi^{-1}_{\mathrm{Id}\times\zeta_2}"] \arrow[d, "\mathcal{H}(\xi_1\boxtimes\mathrm{Id})"'] & H_{\{0\}\cup I_2,W_1^{\zeta_1}\boxtimes W_2} \arrow[r, "1\times\gamma^2"] \arrow[d, "\mathcal{H}(\xi_1\boxtimes\mathrm{Id})"'] & H_{\{0\}\cup I_2,W_1^{\zeta_1}\boxtimes W_2} \arrow[r, "\chi_{\mathrm{Id}\times\zeta_2}"] \arrow[d, "\mathcal{H}(\xi_1\boxtimes\mathrm{Id})"'] & H_{\{0\}\cup\{0\},W_1^{\zeta_1}\boxtimes W_2^{\zeta_2}} \arrow[d, "\mathcal{H}(\xi_1\boxtimes\mathrm{Id})"'] \arrow[dr, "\mathcal{H}(\xi_1\boxtimes\xi_2)"] & \\
H_{\{0\}\cup\{0\},\mathbf{1}} \arrow[r, "\mathcal{H}(\mathbf{1}\boxtimes x_2)"] & H_{\{0\}\cup\{0\},\mathbf{1}\boxtimes W_2^{\zeta_2}} \arrow[r, "\chi^{-1}_{\mathrm{Id}\times\zeta_2}"] & H_{\{0\}\cup I_2,\mathbf{1}\boxtimes W_2} \arrow[r, "1\times\gamma^2"] & H_{\{0\}\cup I_2,\mathbf{1}\boxtimes W_2} \arrow[r, "\chi_{\mathrm{Id}\times\zeta_2}"] & H_{\{0\}\cup\{0\},\mathbf{1}\boxtimes W_2^{\zeta_2}} \arrow[r, "\mathcal{H}(\mathbf{1}\boxtimes\xi_2)"] & H_{\{0\}\cup\{0\},\mathbf{1}}
\end{tikzcd}$$

Idée de la preuve de 1) : preuve d'une troisième relation. On montre

$$S_{I,W,x,\xi,(\gamma_i(\gamma_i')^{-1}\gamma_i'')_{i\in I}} = S_{I\cup I\cup I,W\boxtimes W^*\boxtimes W,\delta_W\boxtimes x,\xi\boxtimes \mathrm{ev}_W,(\gamma_i)_{i\in I}\times(\gamma_i')_{i\in I}\times(\gamma_i'')_{i\in I}}$$

$\delta_W : \mathbf{1} \to W \otimes W^*$ et $\mathrm{ev}_W : W^* \otimes W \to \mathbf{1}$ sont les morphismes naturels.
Pour montrer cette relation on utilise
$S_{I\cup I\cup I,W\boxtimes W^*\boxtimes W,\delta_W\boxtimes x,\xi\boxtimes \mathrm{ev}_W,(\gamma_i(\gamma_i')^{-1}\gamma_i'')_{i\in I}\times(\gamma_i(\gamma_i')^{-1}\gamma_i'')_{i\in I}\times(\gamma_i(\gamma_i')^{-1}\gamma_i'')_{i\in I}}$
comme étape intermédiaire.

Idée de la preuve de 2).
On considère le quotient grossier $(\widehat{G})^n /\!\!/ \widehat{G}$, où $\widehat{G}$ agit par conjugaison diagonale, c'est-à-dire que $h \in \widehat{G}$ agit par
$(g_1, ..., g_n) \mapsto (hg_1h^{-1}, ..., hg_nh^{-1})$.
D'après Richardson, les points de $(\widehat{G})^n /\!\!/ \widehat{G}$ correspondent aux classes de conjugaison de n-uplets semi-simples d'éléments de $\widehat{G}$ (un n-uplet est dit semi-simple si pour tout sous-groupe parabolique qui le contient il existe un Levi associé qui le contient).
Autrement dit pour tout n-uplet $(g_1, ..., g_n)$ d'éléments de $\widehat{G}$, sa classe de conjugaison $\{(hg_1h^{-1}, ..., hg_nh^{-1}), h \in \widehat{G}\}$ est fermée si et seulement ce n-uplet est semi-simple. Cela est bien connu pour $n = 1$: la classe d'un élément est fermée si et seulement si cet élément est semi-simple.

Idée de la preuve de 2) (suite). Soit ν un caractère de $\mathcal{B}$.
En prenant $I = \{0, ..., n\}$, on a un isomorphisme

$$(\widehat{G})^n /\!\!/ \widehat{G} \xrightarrow{\sim} \widehat{G} \backslash (\widehat{G})^{\{0,\dots,n\}} / \widehat{G}, (g_1, ..., g_n) \mapsto (1, g_1, ..., g_n).$$

On veut montrer l'unicité et l'existence de σ paramètre de Langlands vérifiant

$$\nu(S_{I,f,(\gamma_i)_{i\in I}}) = f((\sigma(\gamma_i))_{i\in I}) \tag{0.3}$$

pour tous I, f et $(\gamma_i)_{i\in I}$. Pour tous n et $(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ arbitraire, en appliquant (0.3) à $I = \{0, ..., n\}$, $\gamma_0 = 1$ et f arbitraire, on voit que (0.3) détermine la classe de conjugaison semi-simplifiée de $(\sigma(\gamma_1), ..., \sigma(\gamma_n))$. Pour simplifier on suppose d'abord que l'image de σ est finie. Alors en prenant n et $(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ tels que $\mathrm{Image}(\sigma) = \{\sigma(\gamma_1), ..., \sigma(\gamma_n)\}$ on voit que σ est déterminé à conjugaison près par la classe de conjugaison (semi-simplifiée) de $(\sigma(\gamma_1), ..., \sigma(\gamma_n))$. Les relations vérifiées par les $S_{I,f,(\gamma_i)_{i\in I}}$ (avec $I = \{0, ..., n+3\}$) montrent que σ est un morphisme de groupes .

Idée de la preuve de 2) en général (suite).
On ne suppose plus que l'image de σ est finie.
Unicité de σ. En choisissant n et $(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ tels que $(\sigma(\gamma_1), ..., \sigma(\gamma_n))$ engendre un sous-groupe Zariski dense de l'image de σ, on voit que la classe de conjugaison de $(\sigma(\gamma_1), ..., \sigma(\gamma_n), \sigma(\gamma))$ pour γ variable détermine σ. Cela détermine donc σ comme paramètre de Langlands, c'est-à-dire comme classe de conjugaison de morphisme semi-simple $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$.
Existence de σ. On choisit $(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ tel que la classe de conjugaison semi-simplifiée de $(\sigma(\gamma_1), ..., \sigma(\gamma_n))$ engendre un sous-groupe fermé de $\widehat{G}$ le plus grand possible avec un centralisateur le plus petit possible. Alors les classes de conjugaison de $(\sigma(\gamma_1), ..., \sigma(\gamma_n), \sigma(\gamma))$ pour γ variable permettent de construire σ comme ci-dessus et les relations vérifiées par les $S_{I,f,(\gamma_i)_{i\in I}}$ montrent qu'un tel σ est un morphisme de groupes.

Tout ce qui précède est également valable avec un niveau (un sous-schéma fini N de X). On note $K_N = \mathrm{Ker}(G(\mathbb{O}) \to G(\mathcal{O}_N))$. On a alors une décomposition canonique de $C_c(K_N \backslash G(\mathbb{A})/K_N, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$-modules

$$C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) = \bigoplus_\sigma \mathfrak{H}_\sigma, \tag{0.4}$$

avec σ paramètre de Langlands global non ramifié sur $X \smallsetminus N$. Si G est déployé, $\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q) = G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K_N$.
Dans un article en cours de rédaction, Alain Genestier et moi-même montrons la paramétrisation locale à semi-simplification près et la compatibilité local-global. Autrement dit, si G est un groupe réductif sur un corps local K d'égales caractéristiques, à tout caractère du centre de Bernstein de $G(K)$ (défini sur $\mathcal{O}_E$), et donc à toute représentation irréductible E-linéaire de $G(F)$ (admettant une $\mathcal{O}_E$-structure entière) nous associons un paramètre de Langlands local à semi-simplification près, c'est-à-dire (en supposant G déployé) une classe de conjugaison de morphisme $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ défini sur une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$, continue et semi-simple .

La compatibilité local-global à semi-simplication près s'énonce de la façon suivante. Soit X est une courbe projective sur $\mathbb{F}_q$ et $\pi = \bigotimes \pi_v$ une représentation de $G(\mathbb{A})$ telle que π^{K_N} apparaisse dans $\mathfrak{H}_\sigma$.
Alors pour toute place v de X on a égalité entre

- le semi-simplifié de la restriction de σ à $\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v)$,
- le paramètre local à semi-simplification près associé à $K = F_v$ et à la représentation π_v de $G(K)$ (en fait au caractère associé du centre de Bernstein de $G(K)$).

Ce travail utilise les cycles proches sur des bases arbitraires (Deligne, Laumon, Gabber, Illusie, Orgogozo) et donc les topos produits orientés.
Techniquement nous montrons que si γ_i sont dans $\mathrm{Gal}(\overline{F_v}/F_v) \subset Gal(\overline{F}/F)$ (et si f est définie sur $\mathcal{O}_E$) alors l'opérateur d'excursion global $S_{I,f,(\gamma_i)_{i\in I}} \in \mathrm{End}\left(C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_{G,N}(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell})\right)$ est donné par la multiplication par un élément $\mathfrak{z}_{I,f,(\gamma_i)_{i\in I}}$ du (complété $\mathcal{O}_E$-adique) du centre de Bernstein de $G(F_v)$ qui ne dépend que des données locales en v au sens hensélien, donc au sens du complété.

Remarques finales.
1) Dans ce travail on obtient une paramétrisation mais on ne calcule pas les multiplicités (on ne sait même pas montrer qu'elles sont non nulles). Les formules de trace permettent de calculer des multiplicités pour les espaces de formes automorphes ou de cohomologie (Drinfeld, Laumon, Laurent Lafforgue, Ngo Bao Chau, Eike Lau, Ngo Dac Tuan, Badulescu, Roche).
2) On espère que tous les paramètres de Langlands σ apparaissant dans cette décomposition proviennent de paramètres d'Arthur elliptiques. On espère même une paramétrisation de l'espace des formes automorphes discrètes (et pas seulement cuspidales) indexée par des paramètres d'Arthur elliptiques.

Remarques finales (suite).
3) On espère que la décomposition

$$C_c^{\mathrm{cusp}}(\mathrm{Bun}_G(\mathbb{F}_q)/\Xi, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) = \bigoplus_\sigma \mathfrak{H}_\sigma$$

est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ (au lieu de $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$) et indépendante de ℓ. En fait on espère que tous les opérateurs d'excursion sont définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$ (et si les considère sur $\mathbb{C}$ ils seraient alors normaux donc diagonalisables, autrement dit $\mathcal{B} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C}$ serait une C^*-algèbre commutative et la décomposition ci-dessus serait une diagonalisation au lieu d'être seulement une trigonalisation).
Cela serait évident si on savait réaliser les constructions de cet article de façon *motivique*.
En effet les motifs de Grothendieck forment une catégorie $\overline{\mathbb{Q}}$-linéaire et unifient les cohomologies ℓ-adiques pour les différents ℓ (un motif est un morceau d'une cohomologie universelle d'une variété).

Hommage à Alexandre Grothendieck.

Comme tous les articles actuels en géométrie algébrique, celui que je viens d'exposer est entièrement fondé sur les travaux de Grothendieck : définition fonctorielle des schémas et des champs, construction Quot pour Bun_G, cohomologie étale, topos, motifs, formalisme tannakien.

Les merveilleuses découvertes de Grothendieck que sont la vision des motifs et la théorie des topos ont déjà entraîné des conséquences immenses mais d'autres au moins aussi importantes sont sans doute encore à venir.

Des travaux récents de Scholze définissent des analogues des chtoucas locaux sur $\mathbb{Q}_p$. Un analogue des champs de chtoucas sur $\mathbb{Q}$ donnerait des résultats semblables à ceux de ce travail pour les formes automorphes sur les corps de nombres. Un tel analogue ne peut pas être un objet géométrique au sens usuel et il est à l'heure actuelle totalement hypothétique, mais s'il existe on peut penser qu'il fournira (voire sera lui-même) un ... topos !

Il est extrêmement important de poursuivre et d'intensifier les recherches sur les motifs et les topos.