Un renforcement de la propriété (T)

Vincent Lafforgue*

25 octobre 2007

Nous proposons un renforcement de la propriété (T) de Kazhdan en remplaçant les représentations unitaires par les représentations dans des espaces de Hilbert qui ne sont pas nécessairement unitaires, mais à croissance exponentielle suffisamment petite. On sait qu'un groupe localement compact a la propriété (T) si et seulement si il existe un idempotent p dans $C^*_{\max}(G)$ tel que pour toute représentation unitaire continue (H, π) de G, $\pi(\mathrm{p})$ est le projecteur orthogonal sur le sous-espace fermé de H formé des vecteurs G-invariants. Pour la propriété (T) renforcée, nous posons une définition dans ce style.

On appelle longueur sur un groupe localement compact G une fonction continue $\ell : G \to \mathbb{R}_+$ vérifiant $\ell(g^{-1}) = \ell(g)$ et $\ell(g_1 g_2) \leq \ell(g_1) + \ell(g_2)$ pour $g, g_1, g_2 \in G$. Dans la suite, pour tout groupe localement compact G, on supposera choisie une mesure de Haar à gauche, qui munit $C_c(G)$ d'une structure d'algèbre, par convolution.

Définition 0.1 *Soit G un groupe localement compact. Si ℓ est une longueur sur G, on note $\mathcal{E}_{G,\ell}$ la classe des représentations continues π de G dans un espace de Hilbert H telles que $\|\pi(g)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq e^{\ell(g)}$ pour tout $g \in G$, et on note $\mathcal{C}_\ell(G)$ l'algèbre de Banach involutive (pour l'involution usuelle) complétion de $C_c(G)$ pour la norme $\|f\| = \sup_{(H,\pi)\in\mathcal{E}_{G,\ell}} \|\pi(f)\|_{\mathcal{L}(H)}$ (en particulier pour $\ell = 0$, on a $\mathcal{C}_0(G) = C^*_{\max}(G)$).*

On dit que G a la propriété (T) renforcée si pour toute longueur ℓ sur G, il existe $s > 0$, tel que pour tout $C \in \mathbb{R}_+$, il existe un idempotent autoadjoint p *dans $\mathcal{C}_{s\ell+C}(G)$ tel que pour tout $(H, \pi) \in \mathcal{E}_{G,s\ell+C}$, $\pi(\mathrm{p})$ ait pour image le sous-espace de H formé des vecteurs G-invariants*

Dans la situation de la définition, pour $(H, \pi) \in \mathcal{E}_{G,\ell}$, ${}^t\pi(\mathrm{p})$ a pour image le sous-espace $(H^*)^G$ de H^* formé des formes linéaires continues G-invariantes sur H (comme ℓ est symétrique la représentation contragrédiente

*Institut de mathématiques de Jussieu, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris, vlafforg@math.jussieu.fr

$(H^*, g \mapsto {}^t\pi(g^{-1}))$ appartient aussi à $\mathcal{E}_{G,\ell}$). Son orthogonal $((H^*)^G)^\perp$ est un supplémentaire G-invariant de H^G dans H, et $\pi(\mathrm{p})$ est la projection sur H^G parallèlement à $((H^*)^G)^\perp$. Donc $\pi(\mathrm{p})$ commute à l'action de G et donc p est un élément central de $\mathcal{C}_{s\ell+C}(G)$. Pour tout $(H,\pi) \in \mathcal{E}_{G,\ell}$, H est la somme directe (pas nécessairement orthogonale) des deux sous-représentations $H_1 = \mathrm{Im}\pi(\mathrm{p})$, sur laquelle G agit trivialement, et $H_2 = \mathrm{Im}(1-\pi(\mathrm{p})) = \mathrm{Ker}\pi(\mathrm{p})$ qui ne possède ni vecteur invariant non nul ni forme linéaire continue G-invariante non nulle.

Nous montrerons d'abord que les groupes hyperboliques n'ont pas la propriété (T) renforcée, en construisant une représentation (H,π) à croissance polynomiale, qui n'a pas de vecteurs invariants non nuls, mais dont la représentation contragrédiente en possède.

Nous montrerons ensuite que, pour tout corps local F, $SL_3(F)$ a la propriété (T) renforcée. L'idée pour $SL_3(\mathbb{R})$ est que les coefficients de matrice, biinvariants par $SO_3(\mathbb{R})$, de représentations dans des Hilbert à petite croissance exponentielle vérifient certaines majorations de la norme de certains produits de Schur qui leur sont associés, et d'autre part que toute fonction sur $SO_3(\mathbb{R})\backslash SL_3(\mathbb{R})/SO_3(\mathbb{R})$ qui vérifie ces estimations admet une limite en l'infini et tend très vite vers cette limite (c'est-à-dire a un comportement analogue à celui mis en évidence par Howe pour les coefficients de matrice de représentations unitaires, voir [HT92]). Cette deuxième propriété est un obstacle très sérieux à une démonstration de la conjecture de Baum-Connes à coefficients pour $SL_3(\mathbb{R})$ utilisant KK^{ban} (voir [Laf02] 1.7). La preuve pour $SL_3(F)$ avec F non-archimédien a l'air différente, mais on pourrait l'exprimer à l'aide de produits de Schur du même type.

Nous en déduisons que pour tout corps local F, et pour tout groupe algébrique G presque simple sur F dont l'algèbre de Lie contient $sl_3(F)$, $G(F)$ a la propriété (T) renforcée.

Il faudrait aussi montrer que pour tout corps local F, $Sp_4(F)$ a la propriété (T) renforcée car cela impliquerait alors que tous les groupes algébriques presque simples sur un corps local, de rang déployé ≥ 2, possèdent la propriété (T) renforcée.

Nous montrons que la propriété (T) renforcée est héritée par les réseaux cocompacts (peut-être par tous les réseaux mais il faudrait affiner l'argument).

Nous montrons aussi que pour tout corps local non-archimédien F, $SL_3(F)$ vérifie une généralisation de la propriété (T) renforcée aux actions sur les espaces de Banach. Cette question m'avait été posée par Uri Bader (voir [BFGM], en particulier la remarque 1.7 (2), où les auteurs montrent, en utilisant le théorème 3.2 ci-dessous, que pour $n \geq 4$, toute action par isométries affines de $SL_n(\mathbb{Q}_p)$ sur un espace de Banach super-réflexif admet un point fixe).

Soit $\alpha > 0$, p un nombre premier et $r \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{E}^{p,r,\alpha}$ la classe des espaces de Banach E (munis d'une norme bien précisée) tels que pour tous $(x_i)_{i\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r}$ dans E, on ait, en notant $\widehat{(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r}$ le groupe des caractères de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$,

$$p^{-r} \sum_{\chi\in\widehat{(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r}} \Big\| p^{-r} \sum_{i\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r} \chi(i)x_i \Big\|_E^2 \leq e^{-\alpha}\Big(p^{-r} \sum_{i\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r} \|x_i\|_E^2 \Big).$$

Tout espace de Hilbert est dans $E^{p,r,r\log p}$. On peut montrer que tout espace de Banach uniformément convexe est dans $\mathcal{E}^{p,r,\alpha}$, où α ne dépend que de p, r et du module d'uniforme convexité. Assaf Naor m'a fait remarquer que d'après [Jam64, Enf72], tout espace de Banach dans $\mathcal{E}^{2,1,\alpha}$ pour un certain $\alpha > 0$ (c'est-à-dire uniformément non-quarable) est super-réflexif, donc on peut trouver une norme équivalente qui est uniformément convexe. Mais Gilles Pisier m'a dit que $\cup_{r\in\mathbb{N}^*,\alpha>0}\, \mathcal{E}^{2,r,\alpha}$ est exactement la classe des espaces de Banach B-convexes, c'est-à-dire ne contenant pas $(1+\epsilon)$-isométriquement ℓ_1^N pour un certain entier $N > 0$ et un certain $\epsilon > 0$, et que d'après James [Jam74], cette classe contient des espaces de Banach non réflexifs. Plus précisément $\cup_{\alpha>0}\, \mathcal{E}^{2,r,\alpha}$ contient la classe des espaces de Banach ne contenant pas $(1+\epsilon)$-isométriquement ℓ_1^{r+1} (réel), pour un certain $\epsilon > 0$ et est inclus dans la classe des espaces de Banach ne contenant pas $(1+\epsilon)$-isométriquement $\ell_1^{2^r}$ (réel), pour un certain $\epsilon > 0$.

Si ℓ' est une longueur sur G, on note $\mathcal{E}^{p,r,\alpha}_{G,\ell'}$ la classe des représentations continues (E,π) de G dans un espace de Banach E de la classe $\mathcal{E}^{p,r,\alpha}$ tel que $\|\pi(g)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq e^{\ell'(g)}$. On note $\mathcal{C}^{p,r,\alpha}_{\ell'}(G)$ l'algèbre de Banach involutive (pour l'involution usuelle) complétion de $C_c(G)$ pour la norme $\|f\| = \sup_{(E,\pi)\in\mathcal{E}^{p,r,\alpha}_{G,\ell'}} \|\pi(f)\|_{\mathcal{L}(E)}$.

Définition 0.2 *Soit G un groupe localement compact. Soit p un nombre premier et $r \in \mathbb{N}^*$. On dit que G a la propriété (T) renforcée banachique relativement à (p,r) si pour toute longueur ℓ sur G et pour tout $\alpha > 0$, il existe $s > 0$, tel que pour tout $C \in \mathbb{R}_+$, il existe un idempotent autoadjoint* p *dans $\mathcal{C}^{p,r,\alpha}_{C+s\ell}(G)$ tel que pour toute représentation $(E,\pi) \in \mathcal{E}^{p,r,\alpha}_{G,C+s\ell}$, $\pi(\mathrm{p})$ ait pour image le sous-espace de E formé des vecteurs G-invariants.*

On montre alors que pour tout corps local non-archimédien F, $SL_3(F)$ vérifie la propriété (T) renforcée banachique relativement à (p,r) si le corps résiduel de F a p^r éléments.

On montre que la propriété (T) renforcée banachique relativement à (p,r) est héritée par les réseaux cocompacts.

Assaf Naor a eu l'idée que cela pouvait permettre de construire des familles d'expanseurs ne se plongeant uniformément dans aucun espace de Banach uniformément convexe. En discutant nous avons réussi à nous en convaincre. L'argument est expliqué dans le dernier paragraphe. Cela répond à une question posée par Kasparov et Yu dans l'introduction de [KY06]. Je remercie beaucoup Assaf Naor pour cette idée. Je remercie aussi Uri Bader et Gilles Pisier pour les discussions que j'ai eues avec eux.

1 Cas des groupes hyperboliques

Le but de ce paragraphe est de montrer que les groupes hyperboliques n'ont pas la propriété (T) renforcée. Dans un autre article nous construirons, pour tout groupe hyperbolique G, des homotopies entre γ et 1 sortant de $KK_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ mais faisant intervenir des représentations de G dans des espaces de Hilbert avec des croissances exponentielles arbitrairement petites et cela nous permettra de montrer la conjecture de Baum-Connes à coefficients pour les groupes hyperboliques.

Définition 1.1 *Soit $\delta \geq 0$. Un espace métrique (X,d) est dit δ-hyperbolique si pour tout quadruplet (x,y,z,t) de points de X on a*

$$d(x,t)+d(y,z) \leq \max\big(d(x,y)+d(z,t), d(x,z)+d(y,t)\big)+\delta.$$

Dans la suite nous utiliserons les notations suivantes : pour x,y dans un espace métrique (X,d), on note $\text{géod}(x,y)=\{z\in X, d(x,z)+d(z,y)=d(x,y)\}$ et pour $\kappa>0$, $\kappa-\text{géod}(x,y)=\{z\in X, d(x,z)+d(z,y)\leq d(x,y)+\kappa\}$

Définition 1.2 *Soit $\delta \geq 0$. Un espace métrique (X,d) est dit faiblement δ-géodésique si pour tous $x,y\in X$ et pour tout $s\in[0,d(x,y)+\delta]$ il existe $z\in X$ tel que $d(x,z)\leq s$ et $d(z,y)\leq d(x,y)-s+\delta$.*

Un espace métrique (X,d) est dit hyperbolique (resp. faiblement géodésique) s'il existe $\delta\geq 0$ tel que (X,d) soit δ-hyperbolique (resp. faiblement δ-géodésique).

Pour $x\in X$ et $r\in\mathbb{R}_+$, on note $B(x,r)=\{y\in X, d(x,y)\leq r\}$.

Définition 1.3 *Un espace métrique (X,d) est dit uniformément localement fini si pour tout $r\in\mathbb{R}_+$ il existe $K\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $x\in X$, $B(x,r)$ contienne au plus K points.*

Pour tout groupe hyperbolique Γ muni de la métrique d invariante à gauche associée à la longueur des mots déterminée par un système fini de générateurs, l'espace métrique (Γ, d) est hyperbolique, faiblement géodésique et uniformément localement fini.

Théorème 1.4 *Soit G un groupe localement compact possédant la propriété (T) renforcée. Soit X un espace métrique hyperbolique, faiblement géodésique et uniformément localement fini, muni d'une action continue et isométrique de G. Alors toute orbite pour cette action est bornée.*

Dans la suite de l'article nous montrons la propriété (T) renforcée pour un certain nombre de groupes algébriques réels ou p-adiques simples de rang déployé ≥ 2 et leurs réseaux cocompacts. Yves Benoist pense qu'il n'est pas très difficile de montrer directement que les actions continues et isométriques de ces groupes sur des espaces hyperboliques faiblement géodésiques et uniformément localement finis ont des orbites bornées (son idée est de considérer deux éléments hyperboliques qui commutent).

Lorsque X est un arbre, le théorème est bien connu, sans l'hypothèse que X est uniformément localement fini d'ailleurs, et la propriété (T) suffit.

Néanmoins nous allons commencer par ce cas.

Cas d'un arbre

Soit X l'ensemble des sommets d'un arbre et q un entier tel que chaque sommet de l'arbre ait au plus $q+1$ voisins. Soit G un groupe localement compact, ayant la propriété (T) renforcée et agissant de façon continue et isométrique sur X. Nous devons montrer que les orbites de G dans X sont bornées.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in X$, on note $S_x^n = \{a \in X, d(x,a) = n\}$ la sphère de rayon n et de centre x. Pour $k, n \in \mathbb{N}$ avec $k \leq n$ et pour tout $z \in S_x^k$ on note $I_z^{n,k,x} = \{a \in S_x^n, z \in \text{géod}(x,a)\}$ de sorte que $S_x^n = \bigcup_{z \in S_x^k} I_z^{n,k,x}$ est une partition de la sphere S_x^n. Lorsque $k = n$ c'est la partition par les singletons et lorsque $k = 0$ la partition grossière.

On note $\mathbb{C}^{(X)}$ l'espace vectoriel des combinaisons finies d'éléments de X. On définit alors H_x comme l'espace de Hilbert, complétion de $\mathbb{C}^{(X)}$ pour la norme

$$\| \sum_a f(a)e_a \|_{H_x}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} (n+1)^2 \sum_{k=0}^{n} \sum_{z \in S_x^k} \Big| \sum_{a \in I_z^{n,k,x}} f(a) \Big|^2.$$

On a noté $\sum_a f(a)e_a$ la fonction $a \mapsto f(a)$. Le facteur $(n+1)^2$ a pour rôle de rendre continue la forme linéaire $\sum_a f(a)e_a \mapsto \sum_a f(a)$.

Fixons $x \in X$ et introduisons la longueur ℓ sur G définie par $\ell(g) = d(x, gx)$. Posons $H = H_x$.

Nous allons montrer que l'action de G par translations à gauche sur $\mathbb{C}^{(X)}$, donnée par la formule $\pi(g)(f)(x) = f(g^{-1}x)$ pour $g \in G, f \in \mathbb{C}^{(X)}, x \in X$, s'étend en une représentation continue de G sur H, qu'il existe un polynôme P tel que $\|\pi(g)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq P(\ell(g))$ pour tout $g \in G$, que la représentation contragrédiente H^* a un vecteur non nul fixe, et que H a un vecteur non nul fixe si et seulement si les orbites de l'action de G dans X sont bornées.

Soit $g \in G$. On pose $x' = g(x)$, de sorte que $d(x,x') = \ell(g)$. Il résulte de la définition de $H = H_x$ que l'on a une isométrie $\Theta_x : H \to l^2(\{n,k,z, 0 \leq k \leq n, z \in S_x^k\})$ définie par

$$\Theta_x(\sum_a f(a)e_a) = \Big((n+1) \sum_{a \in I_z^{n,k,x}} f(a)\Big)_{(n,k,z)}.$$

On introduit de la même façon une isométrie $\Theta_{x'}$ de $H_{x'}$ dans $l^2(\{(n',k',z'), 0 \leq k' \leq n', z' \in S_{x'}^{k'}\})$. Le lemme suivant permet de comparer les normes de H_x et de $H_{x'}$.

Lemme 1.5 *Pour $(n,k,z) \in \{(n,k,z), 0 \leq k \leq n, z \in S_x^k\}$ on peut écrire $I_z^{n,k,x}$ comme une réunion disjointe finie d'au plus $(q-1)(d(x,x')+1)+1$ parties $I_{z'}^{n',k',x'}$ pour $(n',k',z') \in \{(n',k',z'), 0 \leq k' \leq n', z' \in S_{x'}^{k'}\}$, de sorte que pour chaque (n',k',z') la partie $I_{z'}^{n',k',x'}$ intervienne au plus $d(x,x')+2$ fois dans ces décompositions (c'est-à-dire que l'ensemble des (n,k,z) tels que la partie $I_{z'}^{n',k',x'}$ intervienne dans la décomposition de $I_z^{n,k,x}$ est fini et de cardinal inférieur ou égal à $d(x,x')+2$)*

En effet si z n'appartient pas à géod(x,x'), on a $I_z^{n,k,x} = I_{z'}^{n',k',x'}$ avec $z' = z$, $k' = d(x',z)$, $n' = n + k' - k$. Si z appartient à géod(x,x'), on peut écrire $I_z^{n,k,x}$ comme la réunion disjointe des $I_{z'}^{n',k',x'}$, avec z' n'appartenant pas à géod(x,x') mais à distance 1 d'un point de géod(z,x'), $k' = d(x',z')$ et $n' = n - d(x,x') + 2(k'-1)$. □

Soit A la matrice de $l^2(\{(n',k',z'), 0 \leq k' \leq n', z' \in S_{x'}^{k'}\})$ dans $l^2(\{(n,k,z), 0 \leq k \leq n, z \in S_x^k\})$ dont le coefficient vaut $\frac{n+1}{n'+1}$ si $I_{z'}^{n',k',x'}$ intervient dans la décomposition de $I_z^{n,k,x}$ dans le lemme précédent, et 0 sinon. On a alors $A \circ \Theta_{x'} = \Theta_x$. Dans chaque ligne de A il y a au plus $(q-1)(d(x,x')+1)+1$ coefficients non nuls, dans chaque colonne au plus $d(x,x')+2$ et ces coefficients ont une valeur absolue inférieure ou égale à $d(x,x')+1$ (car pour n et n' comme dans le lemme avec $I_{z'}^{n',k',x'}$ intervenant dans la décomposition de $I_z^{n,k,x}$, on a $|n-n'| \leq d(x,x')$, donc $\frac{n+1}{n'+1} \leq d(x,x')+1$). Donc

$$\|A\| \leq \sqrt{(q-1)(d(x,x')+1)+1}\sqrt{d(x,x')+2}(d(x,x')+1).$$

Pour tout $f \in \mathbb{C}^{(X)}$, on a $\|f\|_{H_x} \leq \|A\| \|f\|_{H_{x'}}$ et donc $\|\pi(g)f\|_H \leq \|A\| \|\pi(g)f\|_{H_{g(x)}} = \|A\| \|f\|_H$. On voit que $\pi(g)$ est continu de H dans H, de norme inférieure ou égale à $\sqrt{(q-1)(\ell(g)+1)+1}\sqrt{\ell(g)+2}(\ell(g)+1)$.

Enfin H possède une forme linéaire continue G-invariante : l'image de $\sum_{a \in X} f(a) e_a$ par cette forme linéaire est $\sum_{a \in X} f(a)$. Mais un vecteur G-invariant de H est forcément nul si les orbites de l'action de G sur X ne sont pas bornées.

Cas général

Définition 1.6 *On dit qu'un espace métrique (X, d) est un bon espace hyperbolique discret si*

- *d prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et est géodésique : $\forall a, b \in X, \forall k \in \{0, ..., d(a, b)\}$, $\exists c \in X, d(a, c) = k, d(c, b) = d(a, b) - k$,*
- *(X, d) est uniformément localement fini (comme d est géodésique, cela équivaut à dire que le nombre de points à distance 1 d'un point, est borné indépendamment du point),*
- *(X, d) est hyperbolique.*

Remarquons que si G est un groupe hyperbolique, et d est la distance invariante à gauche associée à la longueur des mots, pour un système fini de générateurs, (G, d) est un bon espace hyperbolique discret, muni d'une action isométrique de G par translations à gauche.

Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, et (X, d) un espace métrique δ-hyperbolique et δ-faiblement géodésique, et uniformément localement fini, et muni d'une action isométrique d'un groupe G. Munissons X de la distance suivante : $d'(a, b) = \min\{i \in \mathbb{N}, \exists a_0, ..., a_i,\ a_0 = a, a_i = b, \forall j \in \{0, ..., i-1\}, d(a_j, a_{j+1}) \leq \delta + 1\}$. On a alors les propriétés suivantes :

- l'action de G sur (X, d') est isométrique,
- d' est équivalente à d : il existe une constante C telle que $d' \leq C(d+1)$ et $d \leq C(d'+1)$,
- (X, d') est un bon espace hyperbolique discret.

L'hyperbolicité de (X, d') résulte de la conservation de l'hyperbolicité par quasi-isométrie pour des espaces faiblement géodésiques (pour les espaces géodésiques la démonstration figure dans [GdlH90, CDP90] et pour les espaces faiblement géodésiques il n'y a pas grand chose à modifier).

Il suffit donc de montrer le théorème 1.4 avec X un bon espace hyperbolique discret, ce que nous faisons maintenant.

Soit (X, d) un bon espace hyperbolique discret, muni d'une action isométrique et continue d'un groupe localement compact G. Soit $\delta \in \mathbb{N}^*$ tel que (X, d) soit δ-hyperbolique.

On appellera constante universelle une constante qui ne dépend que de X et de δ : en fait les constantes universelles que nous verrons apparaître ne dépendront que de δ et du nombre maximal de points à distance 1 d'un point de X.

Pour tous $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, on introduit la partition de $S_x^n = \{a \in X, d(x,a) = n\}$ pour la relation d'équivalence suivante : $a\mathcal{R}b$ si pour tout $z \in B(x,k)$ on a $d(a,z) = d(b,z)$. On note $J^{n,k,x}$ l'ensemble des classes d'équivalence et $S_x^n = \bigcup_{i \in J^{n,k,x}} I_i^{n,k,x}$ la partition.

Comme X est *géodésique*, uniformément localement fini et hyperbolique, il est équivalent de connaître les distances d'un point a à tous les points de $B(x,k)$, ou seulement à un nombre fini (universellement borné) d'entre eux (à savoir les points de $B(x,k)$ à distance minimale de a à 3δ près) et comme ces points sont à distance bornée (universellement) les uns des autres par l'hyperbolicité, en fait la connaissance de tous ces points n'apporte qu'un nombre fini (universellement borné) d'informations supplémentaires, par rapport à la connaissance d'un seul point parmi les points les plus proches (qui appartiendront nécessairement à S_x^k), et enfin les distances de a à ces points diffèrent entre elles au plus d'une constante universelle. Donc le cardinal de $J^{n,k,x}$ est majoré par le produit du cardinal de S_x^k et d'une constante universelle.

Ces affirmations sont justifiées par les lemmes suivants

Lemme 1.7 *Soient $a \in X$, $n = d(x,a)$ et $k \in \{0, ..., n\}$. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, les points de $B(x,k)$ dont la distance à a est inférieure ou égale à $n - k + r$ forment un ensemble de diamètre inférieur ou égal à $\delta + r$.*

On applique la propriété d'hyperbolicité à a, x et deux de ces points. □

En particulier les points de $B(x,k)$ les plus proches de a (c'est-à-dire à distance $n-k$) forment un ensemble de diamètre inférieur ou égal à δ.

Lemme 1.8 *Soient $a \in X$, $n = d(x,a)$, $k \in \{0, ..., n\}$ et z un point de $B(x,k)$ à distance minimale (c'est-à-dire $n-k$) de a. Alors la connaissance des distances de a aux points de $B(x,k) \cap B(z, 3\delta)$ entraîne la connaissance des distances de a aux points de $B(x,k)$.*

En effet soit $y \in B(x,k)$. Si $d(a,y) \geq n-k+2\delta$, soit $y' \in \text{géod}(a,y)$, $d(y,y') = \delta$ (un tel y' existe puisque X est géodésique). La propriété d'hyperbolicité appliquée à x, a, y, y' montre que $y' \in B(x,k)$. En effet elle s'écrit

$$d(x,y') \leq \max(d(x,a) + d(y,y') - d(a,y) + \delta, d(x,y) + d(a,y') - d(a,y) + \delta)$$

et on a $d(x,a) + d(y,y') - d(a,y) + \delta \leq n + \delta - (n - k + 2\delta) + \delta = k$ et $d(x,y) + d(a,y') - d(a,y) + \delta \leq k - \delta + \delta = k$. Comme $d(a,y) = d(a,y') + \delta$

la connaissance de $d(a,y)$ est impliquée par la connaissance de la distance de a à y' qui est un point de $B(x,k)$ strictement plus proche de a que y et on recommence le procédé. Si $d(a,y) \leq n-k+2\delta$, le lemme précédent montre que $d(z,y) \leq 3\delta$. $\square$

Ces deux lemmes justifient les affirmations ci-dessus. Nous allons en profiter pour renforcer le lemme précédent, car nous en aurons besoin plus tard.

Lemme 1.9 *Soient $a \in X$, $n = d(x,a)$, $k \in \{0,...,n\}$ et z un point de $B(x,k)$ à distance minimale (c'est-à-dire $n-k$) de a. Si a' est un autre point de X, tel que a et a' soient à la même distance des points de $B(x,k) \cap B(z,3\delta)$, alors a' appartient à la même partie $I_i^{n,k,x}$ que a.*

Si z est un point de $B(x,k)$ à distance minimale de a', c'est exactement le lemme précédent. Supposons par l'absurde que z n'est pas un point de $B(x,k)$ à distance minimale de a'. Soit z' un point de $B(x,k)$ à distance minimale de a'. On a alors forcément $d(z,z') > 3\delta$. Par la propriété d'hyperbolicité appliquée à x,a',z,z', $d(a',z) > d(a',z')+2\delta$. Par le premier argument de la démonstration du lemme précédent, si z'' est un point de $\text{géod}(a',z)$ tel que $d(z,z'') = \delta$, alors $z'' \in B(x,k)$ et $d(a',z'') = n-k-\delta$ alors que $d(a,z'') \geq n-k$ donc a et a' ne peuvent pas être à même distance des points de $B(x,k) \cap B(z,3\delta)$, contradiction. $\square$

On définit alors, pour $x \in X$, H_x comme l'espace de Hilbert, complétion de $\mathbb{C}^{(X)}$ pour la norme

$$\|\sum_{a\in X} f(a)e_a\|_{H_x}^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)^2 \sum_{k=0}^{n} \sum_{i\in J^{n,k,x}} \Big| \sum_{a\in I_i^{n,k,x}} f(a)\Big|^2.$$

On fixe maintenant $x \in X$. Soit ℓ la longueur sur G définie par $\ell(g) = d(x,gx)$. On pose $H = H_x$.

Proposition 1.10 *La représentation de G sur $\mathbb{C}^{(X)}$ par translations à gauche s'étend en une représentation continue π de G sur H, et il existe un polynôme universel P tel que $\|\pi(g)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq P(\ell(g))$ pour tout $g \in G$.*

Soit $g \in G$. On pose $x' = g(x)$, de sorte que $d(x,x') = \ell(g)$. Il résulte de la définition de H que l'on a une isométrie $\Theta_x : H \to l^2(\{(n,k,i), 0 \leq k \leq n, i \in J^{n,k,x}\})$ définie par

$$\Theta_x(\sum_a f(a)e_a) = \Big((n+1)\sum_{a\in I_i^{n,k,x}} f(a)\Big)_{(n,k,i)}.$$

De même on a une isométrie $\Theta_{x'}$ de $H_{x'}$ dans $l^2(\{(n',k',i'), 0 \leq k' \leq n', i' \in J^{n',k',x'}\})$.

Lemme 1.11 *Il existe une constante universelle C telle que, pour $(n,k,i) \in \{(n,k,i), 0 \leq k \leq n, i \in J^{n,k,x}\}$ on peut écrire $I_i^{n,k,x}$ comme une réunion disjointe finie d'au plus $C(d(x,x')+1)$ parties $I_{i'}^{n',k',x'}$ pour $(n',k',i') \in \{(n',k',i'), 0 \leq k' \leq n', i' \in J^{n',k',x'}\}$, de sorte que pour chaque (n',k',i') la partie $I_{i'}^{n',k',x'}$ intervienne au plus $C(d(x,x')+1)$ fois dans ces décompositions.*

Par définition de $I_i^{n,k,x}$ la partie de $B(x,k)$ formée des points les plus proches (c'est-à-dire à distance minimale) d'un point a de $I_i^{n,k,x}$ est indépendante de a. On peut donc parler des points de $B(x,k)$ les plus proches de $I_i^{n,k,x}$.

Comme les parties $I_{i'}^{n',k',x'}$, avec n',k',i' variant sont deux à deux disjointes ou incluses l'une dans l'autre, si on peut écrire $I_i^{n,k,x}$, pour tous n,k,i, comme une réunion de parties $I_{i'}^{n',k',x'}$ de sorte que les majorations du lemme soient satisfaites, alors on peut écrire $I_i^{n,k,x}$, pour tous n,k,i, comme une réunion disjointe de parties $I_{i'}^{n',k',x'}$ de sorte que les majorations du lemme soient satisfaites.

Le lemme 1.11 résulte de l'énoncé plus précis suivant : on peut écrire $I_i^{n,k,x}$ comme une réunion de parties $I_{i'}^{n',k',x'}$ telles que pour tout z parmi les points de $B(x,k)$ les plus proches de $I_i^{n,k,x}$ et pour tout z' parmi les points de $B(x',k')$ les plus proches de $I_{i'}^{n',k',x'}$, on ait $z' \in 100\delta$-géod(x',z), $z \in 100\delta$-géod(x,z'), et $\big|(n'-d(x',z')) - (n-d(x,z'))\big| \leq 100\delta$.

Pour montrer cela soit $a \in I_i^{n,k,x}$ et soit z parmi les points de $B(x,k)$ les plus proches de a. Il s'agit de montrer qu'il existe une partie $I_{i'}^{n',k',x'}$ contenant a, incluse dans $I_i^{n,k,x}$ et vérifiant les conditions ci-dessus. Soit t un point "au centre" du triangle azx', plus précisément soit $t \in$ géod(a,z) tel que $\big|(d(x',a)-d(x',z)) - (d(t,a)-d(t,z))\big| \leq 1$. Alors, par la propriété d'hyperbolicité appliquée à x',a,t,z, t appartient à $(\delta+1)$-géod(x',a) et à $(\delta+1)$-géod(x',z). Soit $k' = d(x',t)+6\delta$ et n',i' uniques tels que $a \in I_{i'}^{n',k',x'}$. Soit $a' \in I_{i'}^{n',k',x'}$. Alors a' et a sont à la même distance des points de $B(t,6\delta)$. Ils sont donc à la même distance des points de $B(z,3\delta)$: c'est évident si $d(z,t) \leq 3\delta$ sinon on applique le lemme 1.9 avec z au lieu de x et $d(z,t)$ au lieu de k. Comme a' et a sont à la même distance des points de $B(z,3\delta)$ le lemme 1.9 montre que $a' \in I_i^{n,k,x}$. Donc $I_{i'}^{n',k',x'}$ est bien incluse dans $I_i^{n,k,x}$. Le lemme 1.11 est démontré. $\square$

On introduit la matrice A de $l^2(\{(n',k',i'), 0 \leq k' \leq n', i' \in J^{n',k',x'}\})$ dans $l^2(\{(n,k,i), 0 \leq k \leq n, i \in J^{n,k,x}\})$ dont le coefficient vaut $\frac{n+1}{n'+1}$ si $I_{i'}^{n',k',x'}$ intervient dans la décomposition de $I_i^{n,k,x}$ dans le lemme précédent et 0 sinon. Alors dans chaque ligne il y a au plus $C(d(x,x')+1)$ coefficients non nuls, dans chaque colonne au plus $C(d(x,x')+1)$ coefficients non nuls et ces coefficients ont une norme inférieure ou égale à $d(x,x')+1$ (car $|n-n'| \leq d(x,x')$ si $I_{i'}^{n',k',x'}$ intervient dans la décomposition de $I_i^{n,k,x}$). Donc $\|A\| \leq \sqrt{C(d(x,x')+1)}\sqrt{C(d(x,x')+1)}(d(x,x')+1) = C(d(x,x')+1)^2$. On a donc $\|f\|_{H_x} \leq C(d(x,x')+1)^2\|f\|_{H_{x'}}$ pour tout $f \in \mathbb{C}^{(X)}$, et comme dans le cas des arbres on en déduit $\|\pi(g)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq C(\ell(g)+1)^2$.

La proposition 1.10 est donc démontrée. □

Enfin H possède une forme linéaire continue G-invariante : l'image de $\sum_{a\in X} f(a)e_a$ par cette forme linéaire est $\sum_{a\in X} f(a)$. Mais un vecteur G-invariant de H est forcément nul si les orbites de l'action de G sur X ne sont pas bornées. □

2 Propriété (T) renforcée pour $SL_3(\mathbb{R})$

Nous montrons que le groupe $SL_3(\mathbb{R})$ a la propriété (T) renforcée. On munit $\mathbb{R}^3$ de la métrique euclidienne standard et $sl_3(\mathbb{R})$ de la métrique euclidienne induite de $(\mathbb{R}^3)^* \otimes (\mathbb{R}^3)$.

Théorème 2.1 *Soit $G = SL_3(\mathbb{R})$. Soit ℓ la longueur sur G définie par $\ell(g) = \log\|Ad(g)\|$, en notant Ad la représentation adjointe. Soit $\alpha \in [0, 1/6[$. Il existe $t, C' > 0$, tels que pour tout $C \in \mathbb{R}_+$, il existe un idempotent autoadjoint* p *dans $\mathcal{C}_{\alpha\ell+C}(G)$ tel que*

- *(i) pour tout $(H,\pi) \in \mathcal{E}_{G,\alpha\ell+C}$, $\pi(\mathrm{p})$ a pour image le sous-espace de H formé des vecteurs G-invariants,*
- *(ii) il existe une suite $\mathrm{p}_n \in C_c(G)$, telle que $\int_G |\mathrm{p}_n(g)|dg \leq 1$, p_n est à support dans $\{g \in G, \ell(g) \leq n\}$, et $\|\mathrm{p} - \mathrm{p}_n\|_{\mathcal{C}_{\alpha\ell+C}(G)} \leq C'e^{2C-tn}$.*

On note S^2 la sphère dans $\mathbb{R}^3$, munie de la mesure usuelle, normalisée pour être de masse 1. Pour tout $\varepsilon \in [-1,1]$ on note T_ε l'application linéaire continue de $L^2(S^2)$ dans lui-même définie par la formule suivante : pour toute fonction continue f sur S^2 et pour tout $x \in S^2$, $T_\varepsilon(f)(x)$ est la moyenne de f sur le cercle formé par les $y \in S^2$ qui vérifient $\langle x,y\rangle = \varepsilon$ (et T_1 est l'identité et T_{-1} l'antipodie). On vérifie que T_ε, a priori défini sur les fonctions continues seulement, est formellement auto-adjoint, et a pour noyau une mesure positive, et que l'image de la fonction 1 est 1 et donc on obtient (par interpolation, ou par Cauchy-Schwarz) que T_ε s'étend de manière unique en un opérateur borné sur $L^2(S^2)$, de norme 1 (cet opérateur est équivariant pour l'action de $SO_3(\mathbb{R})$ sur $L^2(S^2)$ par translation à gauche).

Lemme 2.2 *a) Il existe une constante C_1 telle que $\|T_0 - T_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(L^2(S^2))} \leq C_1\sqrt{|\varepsilon|}$ pour tout $\varepsilon \in [-1,1]$.*

b)Pour tout $\varepsilon \in [-1,1]$ et $a, b \in \mathbb{R}$, on a $\|aT_0 - bT_\varepsilon\| \geq |a-b|$.

La deuxième assertion est immédiate puisque la fonction 1 est vecteur propre de T_ε, avec valeur propre 1, pour tout $\varepsilon \in [-1,1]$.

Montrons donc la première assertion. Pour $|\varepsilon| \geq 1/2$, l'inégalité est vraie si $C_1 \geq 2\sqrt{2}$, donc on peut supposer $\varepsilon \in [-1/2, 1/2]$. On a la décomposition $L^2(S^2) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_n$ en harmoniques sphériques, où H_n est égal à l'espace des restrictions à la sphère des polynômes homogènes de degré n et harmoniques. Si on note (u_1, u_2, u_3) des coordonnées orthonormales dans $\mathbb{R}^3$, et si P_n est le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Legendre, la fonction $P_n(u_3)$ appartient à H_n. Comme H_n est une représentation irréductible de $SO_3(\mathbb{R})$, et comme l'opérateur T_ε agit comme un scalaire sur les H_n, il est clair que ce scalaire est égal à $P_n(\varepsilon)$, si P_n a été normalisé pour que $P_n(1) = 1$. Par conséquent $\|T_0 - T_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(L^2(S^2))} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |P_n(0) - P_n(\varepsilon)|$. Or P_n possède la représentation intégrale suivante : pour $x \in [-1,1]$, $P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta)^n d\theta$. Mais $|x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta| = \sqrt{x^2 + (1-x^2)\cos^2\theta}$ et par suite pour $\varepsilon \in [-1/2, 1/2]$, $|\varepsilon + i\sqrt{1-\varepsilon^2}\cos\theta| \leq \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2\theta}$. De plus pour $a, b \in \mathbb{C}$, en écrivant $a^n - b^n = \sum_0^{n-1}(a-b)a^{n-1-i}b^i$ on aboutit à l'inegalité $|a^n - b^n| \leq n|a-b|\max(|a|,|b|)^{n-1}$. Enfin pour $\varepsilon \in [-1/2, 1/2]$ en posant $a = i\cos\theta$ et $b = \varepsilon + i\sqrt{1-\varepsilon^2}\cos\theta$ on a $|a-b| \leq 2|\varepsilon|$, d'où $|a^n - b^n| \leq 2n|\varepsilon|\Big(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2\theta\Big)^{(n-1)/2}$. D'autre part il est évident que $|a^n - b^n| \leq |a|^n + |b|^n \leq 2\Big(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2\theta\Big)^{n/2} \leq 2\Big(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2\theta\Big)^{(n-1)/2}$. Or il existe une constante C telle que $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2\theta\Big)^{(n-1)/2} d\theta \leq C/\sqrt{n+1}$ pour tout entier n (cela est évident pour $n = 0, 1$, et pour $n \geq 2$, on utilise le fait que $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2\theta\Big)^{(n-1)/2} d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \Big(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2\theta\Big)^{(n-1)/2} d\theta$, et l'existence de $a > 0$ tel que $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2\theta \leq e^{-a\theta^2}$ sur $[0, \pi/2]$, et enfin la majoration $\int_0^{\pi/2} e^{-a\frac{(n-1)}{2}\theta^2} d\theta \leq \int_0^\infty e^{-a\frac{(n-1)}{2}\theta^2} d\theta = C'/\sqrt{n-1}$ pour une certaine constante C').

Par suite $|P_n(0) - P_n(\varepsilon)| \leq 2C\min(n|\varepsilon|, 1)\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, d'où $\|T_0 - T_\varepsilon\| \leq 2C\sqrt{|\varepsilon|}$, pour tout $\varepsilon \in [-1/2, 1/2]$, ce que l'on voulait démontrer. □

Dans la suite on note $G = SL_3(\mathbb{R})$ et $K = SO_3(\mathbb{R})$. Pour $s, t \in \mathbb{R}_+$ on pose $D(s,t) = e^{-\frac{s+2t}{3}} \begin{pmatrix} e^{s+t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on note $\bar{A}_+$ l'ensemble des matrices $D(s,t)$ quand s, t parcourent $\mathbb{R}_+$. Une fonction sur G biinvariante par K est déterminée par sa restriction à $\bar{A}_+$ en vertu de la décomposition $G = K\bar{A}_+K$. On a $\ell(kD(s,t)k') = s + t$, pour $k, k' \in K$ et $s, t \in \mathbb{R}_+$. On rappelle que pour

$\alpha, C \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{E}_{G,\alpha\ell+C}$ désigne la classe des espaces de Hilbert munis d'une représentation continue π de G telle que $\|\pi(g)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq e^{C+\alpha\ell(g)}$.

Proposition 2.3 *Soit $\alpha \in [0, 1/6[$. Il existe une constante $C_0 > 0$ telle que pour tout $C \in \mathbb{R}_+$ la propriété suivante soit vraie. Si (H, π) est dans la classe $\mathcal{E}_{G,\alpha\ell+C}$, ξ et η sont des vecteurs K-invariants de norme 1 dans H et H^*, et si on pose $c(g) = \langle \eta, \pi(g)\xi \rangle$ pour $g \in G$, la fonction $c(D(s,t))$ tend vers une limite c_∞ à l'infini et on a $|c(D(s,t)) - c_\infty| \leq C_0 e^{2C-(\frac{1}{6}-\alpha)(s+t)}$.*

Proposition 2.4 *Soit $\alpha \in [0, 1/6[$. Soit (V, τ) une représentation irréductible unitaire non triviale de K. Il existe une constante $C_0 > 0$ telle que pour tout $C \in \mathbb{R}_+$ la propriété suivante soit vraie. Si (H, π) est dans la classe $\mathcal{E}_{G,\alpha\ell+C}$, ξ est un vecteur K-invariant de norme 1 dans H, η un vecteur K-invariant de norme 1 dans $V \otimes H^*$ et si on pose $c(g) = \langle \eta, \pi(g)\xi \rangle \in V$ pour $g \in G$, la fonction $c(D(s,t))$ à valeurs dans V tend vers 0 à l'infini et on a $\|c(D(s,t))\|_V \leq C_0 e^{2C-(\frac{1}{6}-\alpha)(s+t)}$.*

Pour $\delta > 0$, la constante C_0 est uniforme lorsque α parcourt $[0, \frac{1}{6} - \delta]$.

Démontrons le théorème 2.1 en admettant les deux propositions. En fait la proposition 2.3 permet la construction d'un idempotent p qui grâce à la proposition 2.4 sera celui du théorème. Cependant dans le cas où les représentations sont isométriques, c'est-à-dire pour montrer la propriété (T) usuelle, on voit facilement que cet idempotent est celui du théorème (sans utiliser la proposition 2.4). Soit $f \in C_c(G)$ une fonction d'intégrale 1, de support inclus dans $\{g \in G, \ell(g) \leq 1\}$. Soient $\alpha < 1/6$ et $C \in \mathbb{R}_+$. Pour $g \in G$, on pose $P_g = e_K e_g f e_K$, c'est-à-dire que $P_g(h) = \int_{K\times K} f(k_1 g^{-1} h k_2) dk_1 dk_2$, où les intégrales sur K se font pour la mesure de Haar de masse 1. D'après la proposition 2.3, P_g est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}_{\alpha\ell+C}(G)$ quand g tend vers l'infini, et on note p la limite de cette suite. La proposition 2.3 montre aussi que p ne dépend pas du choix de f et que $P_g^* = e_K f^* e_{g^{-1}} e_K$ tend vers la même limite, d'où l'on déduit $\mathrm{p} = \mathrm{p}^*$. De plus pour toute représentation (H, π) dans la classe $\mathcal{E}_{G,\alpha\ell+C}$, $\pi(\mathrm{p})$ a pour image le sous-espace des vecteurs x tels que pour tout $g \in G$, $\pi(e_K)\pi(g)x = x$. En effet $e_K e_g P_{g'}$ est égal à $\int_K P_{gkg'} dk$, d'où il résulte que $e_K e_g \mathrm{p} = \mathrm{p}$. Par ailleurs il est évident que $\pi(\mathrm{p})$ agit par Id sur les vecteurs x tels que pour tout $g \in G$, $\pi(e_K)\pi(g)x = x$, donc p est un idempotent. Si π est unitaire les vecteurs x tels que pour tout $g \in G$, $\pi(e_K)\pi(g)x = x$ sont exactement les vecteurs G-invariants (en effet $\|\pi(g)x\| = \|x\|$ et tout vecteur y tel que $\|\pi(e_K)y\| = \|y\|$ est K-équivariant). En général nous utilisons la proposition 2.4. Soit V une représentation irréductible non triviale de K, et e_K^V le projecteur sur les éléments dont le K-type est V. La proposition 2.4 implique que $e_K^V e_g f e_K$ tend vers 0 dans

$\mathcal{C}_{\alpha\ell+C}(G)$ quand g tend vers l'infini dans G. Il en résulte facilement que, pour tout $g \in G$, $e_K^V e_g \mathrm{p} = 0$ dans $\mathcal{C}_{\alpha\ell+C}(G)$. Donc pour toute représentation $(H,\pi) \in \mathcal{E}_{G,\alpha\ell+C}$, l'image de $\pi(\mathrm{p})$ est formée exactement des vecteurs G-invariants de H. De plus, si on pose $\mathrm{p}_n = P_{D(n-1,1)}$, la suite $(\mathrm{p}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie les conditions (i) et (ii) du théorème (avec $t = \frac{1}{6} - \alpha$). Ceci achève la démonstration du théorème 2.1. $\square$

Démontrons la proposition 2.3. On commence par un lemme évident.

Lemme 2.5 *Soit X un espace compact muni d'une mesure de masse 1, et b une application continue de X dans un espace de Hilbert H, et a une application continue de X dans H^*. Soit T un opérateur borné sur $L^2(X)$ et notons T' l'opérateur obtenu en multipliant au sens de Schur le noyau de T par $\langle a(x), b(y)\rangle$, autrement dit T' est défini de façon rigoureuse par $T' = A(T \otimes 1)B$, où $B : L^2(X) \to L^2(X) \otimes H$ est défini par $(Bf)(y) = f(y)b(y)$, pour $f \in L^2(X)$, où on a identifié $L^2(X) \otimes H$ avec $L^2(X, H)$, et de même $A : L^2(X) \otimes H \to L^2(X)$ est défini par $(Af)(x) = \langle a(x), f(x)\rangle$, à l'aide de la même identification. Alors on a*

$$\|T'\|_{\mathcal{L}(L^2(X))} \leq \sup_{x\in X} \|a(x)\| \sup_{y\in X} \|b(y)\| \|T\|_{\mathcal{L}(L^2(X))}.$$

$\square$

Corollaire 2.6 *Soient $X = S^2$, H un espace de Hilbert, et $a : X \to H^*$ et $b : X \to H$ des applications continues. Supposons qu'il existe une fonction continue $h : [-1,1] \to \mathbb{C}$ telle que $\langle a(x), b(y)\rangle = h(\langle x, y\rangle)$ pour $x, y \in S^2$. Alors, pour $\varepsilon \in [-1,1]$, $|h(0) - h(\varepsilon)| \leq \sup_{x\in S^2} \|a(x)\| \sup_{y\in S^2} \|b(y)\| C_1 \sqrt{|\varepsilon|}$, où C_1 est la constante du lemme 2.2.*

En effet le produit de Schur de $T_0 - T_\varepsilon$ par $\langle a(x), b(y)\rangle = h(\langle x, y\rangle)$ est $h(0)T_0 - h(\varepsilon)T_\varepsilon$. Par la partie b) du lemme 2.2 on a $|h(0) - h(\varepsilon)| \leq \|h(0)T_0 - h(\varepsilon)T_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(L^2(X))}$. Par le lemme précédent,

$$\|h(0)T_0 - h(\varepsilon)T_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(L^2(X))} \leq \sup_{x\in S^2} \|a(x)\| \sup_{y\in S^2} \|b(y)\| \|T_0 - T_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(L^2(X))}.$$

Enfin, par la partie a) du lemme 2.2, $\|T_0 - T_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(L^2(X))} \leq C_1\sqrt{|\varepsilon|}$. Gilles Pisier m'a fait remarquer que l'inégalité

$$|h(0) - h(\varepsilon)| \leq \sup_{x\in S^2} \|a(x)\| \sup_{y\in S^2} \|b(y)\| \max_{n\in\mathbb{N}} |P_n(0) - P_n(\varepsilon)|$$

résulte aussi du théorème 4 de [Kri79] (les P_n sont comme dans la preuve du lemme 2.2 et on rappelle que $\|T_0 - T_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(L^2(X))} = \max_{n\in\mathbb{N}} |P_n(0) - P_n(\varepsilon)|$).$\square$

On définit $\theta_\eta : G/K \to H^*$ et $\theta_\xi : G/K \to H$ par $\theta_\eta(g) = {}^t\pi(g^{-1})\eta$ et $\theta_\xi(g) = \pi(g)\xi$, en utilisant le fait que η et ξ sont K-invariants. D'autre part pour tout $r \in \mathbb{R}$ soit $q_r : X = S^2 \to G/K$ l'application définie de la façon suivante. On note $\iota : SO_2(\mathbb{R}) \to K = SO_3(\mathbb{R})$ l'inclusion $A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$. L'image de ι est le stabilisateur de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour l'action de K sur $\mathbb{R}^3$, d'où une identification $S^2 = K/\iota(SO_2(\mathbb{R}))$ que nous utiliserons souvent. Le stabilisateur de $e^{-\frac{r}{3}} \begin{pmatrix} e^r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} K$ pour l'action de K par multiplication à gauche sur G/K contient $\iota(SO_2(\mathbb{R}))$, d'où une application K-équivariante $q_r : S^2 = K/\iota(SO_2(\mathbb{R})) \to G/K$. Autrement dit, si on identifie G/K à l'espace des formes quadratiques définies positives sur $\mathbb{R}^3$, à homothétie près, $q_r(x)$ est la classe de la forme quadratique dont la boule unité est un ellipsoïde dont les axes par rapport à la boule euclidienne standard de $\mathbb{R}^3$ ont pour longueur e^r, 1 et 1, x indiquant la direction du premier.

On définit alors $a : X \to H^*$ et $b : X \to H$ en posant $a(x) = \theta_\eta(q_{-(s+t)}(x))$ et $b(y) = \theta_\xi(q_t(y))$. Comme $q_{-(s+t)}(x)$ et $q_t(y)$ appartiennent à G/K, on peut former $q_{-(s+t)}(x)^{-1}q_t(y) \in K\backslash G/K$ et cet élément exprime la position relative des deux formes quadratiques (à homothétie près) associées à $q_{-(s+t)}(x)$ et $q_t(y)$. Le coefficient de matrice $c : g \mapsto \langle \eta, \pi(g)\xi \rangle$ est une fonction sur $K\backslash G/K$ et on voit facilement que $\langle a(x), b(y) \rangle = c(q_{-(s+t)}(x)^{-1}q_t(y))$. Comme $q_{-(s+t)} : X \to G/K$ et $q_t : X \to G/K$ sont K-équivariantes, l'application $(x, y) \mapsto q_{-(s+t)}(x)^{-1}q_t(y)$ de X^2 dans $K\backslash G/K$ est invariante pour l'action diagonale de K sur X^2 et donc $\langle a(x), b(y) \rangle$ ne dépend que de $|\langle x, y \rangle|$. Lorsque $\langle x, y \rangle = 0$, on voit que $q_{-(s+t)}(x)^{-1}q_t(y) = KD(s, t)K$. En général on a le lemme suivant.

Lemme 2.7 *Pour $s, t \in \mathbb{R}_+$, $q_{-(s+t)}(x)^{-1}q_t(y) = KD(s', t')K$, avec $s', t' \in \mathbb{R}_+$, $t' \leq t$, $s + 2t = s' + 2t'$, et $\langle x, y \rangle^2 = \frac{(e^{2t}-e^{2t'})(e^{2s+2t-2t'}-1)}{(e^{2t}-1)(e^{2s+2t}-1)}$.*

Comme $q_{-(s+t)}(x)^{-1}q_t(y)$ ne dépend que de $|\langle x, y \rangle|$ on peut supposer $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $q_{-(s+t)}(x)^{-1} = Ke^{-\frac{s+t}{3}} \begin{pmatrix} e^{s+t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $q_t(y) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{3}} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} K$ et le lemme résulte de la première partie du lemme suivant (la deuxième partie servira pour la démonstration de la proposition 2.4). $\square$

Lemme 2.8 *Soit $s, t \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.*

(i) Alors il existe $s', t' \in R_+$ uniques et $\theta_1 \in [-\pi/2, \pi/2], \theta_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{pmatrix} e^{s+t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{s'+t'} & 0 \\ 0 & e^{t'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

et on a $s' + 2t' = s + 2t$, $0 \leq t' \leq t \leq s + t \leq s' + t' \leq s + 2t$, et

$$\cos^2\theta = \frac{(e^{2t} - e^{2t'})(e^{2s+2t-2t'} - 1)}{(e^{2t} - 1)(e^{2s+2t} - 1)}.$$

(ii) De plus on a $\sin^2\theta_1 = \frac{(e^{2s'+2t'} - e^{2s+2t})(e^{2t'}-1)}{e^{2t'}(e^{2s'}-1)(e^{2s+2t}-1)}$.

□

On en déduit le lemme suivant :

Lemme 2.9 *Soient $\alpha, C \in \mathbb{R}_+$. Si (H, π) est dans la classe $\mathcal{E}_{G,\alpha\ell+C}$, ξ et η sont des vecteurs K-invariants de norme 1 dans H et H^*, et si on pose $c(g) = \langle \eta, \pi(g)\xi \rangle$ pour $g \in G$, alors pour $s, t, s', t' \in \mathbb{R}_+$, avec $s + 2t = s' + 2t'$, et $0 \leq t' \leq t \leq s + t \leq s' + t' \leq s + 2t$, on a $|c(D(s,t)) - c(D(s',t'))| \leq C_1 e^{2C+\alpha(s+2t)-t'/2}$, où C_1 est la constante du lemme 2.2.*

On applique le corollaire 2.6 avec a, b comme ci-dessus et en prenant $\varepsilon = \sqrt{\frac{(e^{2t}-e^{2t'})(e^{2s+2t-2t'}-1)}{(e^{2t}-1)(e^{2s+2t}-1)}}$. Comme $\sup_{x \in S^2} \|a(x)\| \leq e^{C+\alpha(s+t)}$ et $\sup_{y \in S^2} \|b(y)\| \leq e^{C+\alpha t}$, le corollaire 2.6 donne $|c(D(s,t)) - c(D(s',t'))| \leq e^{2C+\alpha(s+2t)} C_1 \sqrt{|\varepsilon|}$. Enfin on a $\varepsilon \leq \sqrt{\frac{e^{2s+2t-2t'}-1}{e^{2s+2t}-1}} \leq e^{-t'}$. □

On a aussi le lemme symétrique obtenu en inversant les rôles de s et t (c'est-à-dire en faisant agir l'automorphisme $g \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^t g^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de G, qui stabilise K, et envoie $D(s,t)$ sur $D(t,s)$).

Lemme 2.10 *Sous les mêmes hypothèses, pour $s, t, s', t' \in \mathbb{R}_+$, avec $2s + t = 2s' + t'$ et $0 \leq s' \leq s \leq s + t \leq s' + t' \leq 2s + t$, on a $|c(D(s,t)) - c(D(s',t'))| \leq C_1 e^{2C+\alpha(2s+t)-s'/2}$.*

□

La proposition 2.3 découle des lemmes 2.9 et 2.10. En effet si $s \le t$, on applique le lemme 2.9 avec $s' = t' = \frac{s+2t}{3}$, d'où

$$|c(D(s,t)) - c(D(\frac{s+2t}{3}, \frac{s+2t}{3}))| \le C_1 e^{2C-(\frac{1}{6}-\alpha)(s+2t)}.$$

Si $s \ge t$, on applique le lemme 2.10 avec $s' = t' = \frac{2s+t}{3}$, d'où

$$|c(D(s,t)) - c(D(\frac{2s+t}{3}, \frac{2s+t}{3}))| \le C_1 e^{2C-(\frac{1}{6}-\alpha)(2s+t)}.$$

Soient maintenant $u, v \in \mathbb{R}_+^*$, avec $\frac{u}{v} \in]1,2[$. En appliquant le lemme 2.9 à $(s,t) = (2v-u, 2u-v)$ et $(s',t') = (u,u)$, on obtient $|c(D(2v-u, 2u-v)) - c(D(u,u))| \le C_1 e^{2C+(3\alpha-\frac{1}{2})u}$. En appliquant le lemme 2.10 à $(s,t) = (v,v)$ et $(s',t') = (2v-u, 2u-v)$, on obtient $|c(D(2v-u, 2u-v)) - c(D(v,v))| \le C_1 e^{2C+(3\alpha-1)v+u/2}$. D'où

$$|c(D(u,u)) - c(D(v,v))| \le C_1 e^{2C}(e^{(3\alpha-\frac{1}{2})u} + e^{(3\alpha-1)v+u/2}).$$

On applique cette inégalité avec u/v assez proche de 1. On en déduit facilement la proposition 2.3. $\square$

L'expression exacte de ε dans la preuve du lemme 2.9 permet de montrer qu'en dehors d'un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}_+^2$, le coefficient de matrice c est 1/4-Hölder, avec une constante tendant exponentiellement vers 0 à l'infini.

Montrons maintenant la proposition 2.4. Le lemme suivant remplace le lemme 2.5.

Lemme 2.11 *Soit X un espace compact muni d'une mesure de masse 1, $\mathcal{W}$ un fibré hermitien sur X, H un espace de Hilbert, a une section continue de $\mathcal{W} \otimes H^*$ et b une application continue de X dans H. Soit T un opérateur borné sur $L^2(X)$ et notons T' l'opérateur borné de $L^2(X)$ dans $L^2(X, \mathcal{W})$ obtenu en multipliant au sens de Schur le noyau de T par $\langle a(x), b(y) \rangle$, autrement dit T' est défini de façon rigoureuse par $T' = A(T \otimes 1)B$, où $B : L^2(X) \to L^2(X) \otimes H$ est défini par $(Bf)(y) = f(y)b(y)$, pour $f \in L^2(X)$ et de même $A : L^2(X) \otimes H \to L^2(X, \mathcal{W})$ est défini par $(Af)(x) = \langle a(x), f(x) \rangle$. Alors on a*

$$\|T'\|_{\mathcal{L}(L^2(X), L^2(X,\mathcal{W}))} \le \sup_{x \in S^2} \|a(x)\| \sup_{y \in S^2} \|b(y)\| \|T\|_{\mathcal{L}(L^2(X))}.$$

$\square$

On note $\mathcal{V}$ le fibré hermitien G-équivariant $G \times_K V$ sur G/K. Les sections de $G \times_K V$ sur G/K sont les fonctions $f : G \to V$ telles que $f(gk) = \tau(k^{-1}) f(g)$ pour $g \in G$ et $k \in K$. La représentation π de G sur H munit le fibré constant H sur G/K d'une structure G-équivariante. On a une bijection entre les sections G-équivariantes de $\mathcal{V}\otimes H^*$ sur G/K et $(V\otimes H^*)^K$. On note θ_η la section G-équivariante de $\mathcal{V}\otimes H^*$ sur G/K associée à $\eta\in(V\otimes H^*)^K$. Comme précédemment on note θ_ξ la section G-équivariante de H sur G/K associée à $\xi\in H^K$: c'est l'application de G/K dans H définie par $\theta_\xi(gK)=\pi(g)\xi$.

On rappelle que $c(g)=\langle\eta,\pi(g)\xi\rangle\in V$ pour $g\in G$. On a donc, pour $g\in G$ et $k\in K$, $c(gk)=c(g)$ et $c(kg)=\tau(k)c(g)$, car $c(kg)=\langle\eta,\pi(kg)\xi\rangle=\langle(1\otimes{}^t\pi(k))\eta,\pi(g)\xi\rangle=\langle(\tau(k)\otimes 1)\eta,\pi(g)\xi\rangle=\tau(k)\langle\eta,\pi(g)\xi\rangle$, puisque η est invariant par $\tau(k)\otimes{}^t\pi(k^{-1})$.

Nous appliquons le lemme précédent à $X=S^2$, à $T=T_0-T_\varepsilon$ et à certaines applications a et b que nous allons maintenant définir.

Pour tout $r\in\mathbb{R}$, on définit $q_r:S^2\to G/K$ comme précédemment. Relativement à l'action évidente de $K=SO_3(\mathbb{R})$ sur S^2, q_r est K-équivariante. On pose alors $a(x)=\theta_\eta(q_{-(s+t)}(x))$ et $b(y)=\theta_\xi(q_t(y))$. Ici a est une section K-équivariante du fibré K-équivariant $\mathcal{W}\otimes H^*$ sur S^2 (où K agit diagonalement) en notant $\mathcal{W}=q^*_{-(s+t)}(\mathcal{V})$ et b est une application K-équivariante de S^2 dans H. Donc $\langle a(x),b(y)\rangle$ est une section K-équivariante (pour l'action diagonale de K) du fibré $\mathcal{W}\otimes\mathbb{C}$ sur $S^2\times S^2$, et nous voulons la calculer. Pour cela on rappelle l'identification $S^2=K/\iota(SO_2(\mathbb{R}))$. Le fibré $\mathcal{W}$ sur S^2 s'identifie alors à $K\times_{SO_2(\mathbb{R})}V$, où $SO_2(\mathbb{R})$ agit sur V par $\tau\circ\iota$ et s'injecte dans K par ι. On identifie $K\backslash(S^2\times S^2)$ à $\iota(SO_2(\mathbb{R}))\backslash K/\iota(SO_2(\mathbb{R}))$ en envoyant (x,y) sur $x^{-1}y$. Alors $\langle a(x),b(y)\rangle$ est en fait une section du fibré $V\times_{SO_2(\mathbb{R})}K/\iota(SO_2(\mathbb{R}))$ sur $\iota(SO_2(\mathbb{R}))\backslash K/\iota(SO_2(\mathbb{R}))$ et nous devons la calculer. On peut voir cette section comme une application $\sigma:K\to V$ telle que $\sigma(\iota(k')k)=\tau(\iota(k'))\sigma(k)$ et $\sigma(k\iota(k'))=\sigma(k)$ pour $k\in K$ et $k'\in SO_2(\mathbb{R})$. En fait $\sigma(k)=\langle\eta,\pi(e^{-\frac{s+2t}{3}}\begin{pmatrix}e^{s+t}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}k\begin{pmatrix}e^{t}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix})\xi\rangle\in V$. Comme tout élément de $\iota(SO_2(\mathbb{R}))\backslash K/\iota(SO_2(\mathbb{R}))$ admet un représentant de la forme $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, il suffit de calculer $\sigma(k)$ pour $k=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. D'après le lemme 2.8, on a

$$\sigma\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\tau\begin{pmatrix}\cos\theta_1&-\sin\theta_1&0\\\sin\theta_1&\cos\theta_1&0\\0&0&1\end{pmatrix}c(D(s',t')),$$

où s', t', θ_1 sont comme dans ce lemme. Il reste à calculer le produit de Schur de $T_0 - T_\varepsilon$ par σ et à minorer sa norme. Pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $\zeta \in V$ nous introduisons un opérateur K-équivariant $T_{\theta,\zeta} \in \mathcal{L}(L^2(S^2), L^2(S^2, \mathcal{W}))$, dont le noyau est supporté par les couples $(x, y) \in S^2 \times S^2$ tels que $\langle x, y \rangle = \cos\theta$. De façon précise pour toute fonction f sur $K/\iota(SO_2(\mathbb{R})) = S^2$,

$$T_{\theta,\zeta}(f)(k) = \int_{SO_2(\mathbb{R})} f\Big(k\iota(u)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\iota(SO_2(\mathbb{R}))\Big)\tau \circ \iota(u)(\zeta)du$$

où du est la mesure de Haar de masse 1 sur $SO_2(\mathbb{R})$. On rappelle que les sections de $\mathcal{W}$ sur S^2 s'identifient aux fonctions $f : K \to V$ telles que $f(k\iota(u)) = \tau \circ \iota(u^{-1})f(k)$ pour $k \in K$ et $u \in SO_2(\mathbb{R})$.

Soit $\theta \in [0, \pi/2]$ tel que $\cos\theta = \varepsilon$, et $s', t', \theta_1, \theta_2$ comme dans le lemme 2.8. Alors le produit de Schur de $T_0 - T_\varepsilon$ par σ est

$$T_{\frac{\pi}{2}, c(D(s,t))} - T_{\theta, \tau\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} c(D(s',t'))}.$$

Pour minorer la norme de cet opérateur on a le lemme suivant.

Lemme 2.12 *Il existe une application continue* $A : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathrm{End}(V)$ *telle que* $A(\pi/2)$ *soit inversible et que pour* $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ *et* $\zeta, \zeta' \in V$ *on ait*

$$\|T_{\theta,\zeta} - T_{\theta',\zeta'}\|_{\mathcal{L}(L^2(X), L^2(X,\mathcal{W}))} \geq \|A(\theta)\zeta - A(\theta')\zeta'\|_V.$$

En effet, soit s une trivialisation du fibré hermitien $\mathcal{W}$ sur un voisinage $\mathcal{U}$ de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans S^2, autrement dit s est un isomorphisme de $\mathcal{W}$ vers V sur $\mathcal{U}$, respectant les normes hermitiennes. Soient f_1, f_2 des fonctions continues positives sur S^2, de norme 1 dans $L^2(S^2)$, avec f_1, respectivement f_2, supportée dans un voisinage assez petit de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, respectivement $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (et en particulier $\mathrm{supp} f_1 \subset \mathcal{U}$). Alors $\langle f_1 s, T_{\theta,\zeta} f_2 \rangle = A(\theta)\zeta$ pour une certaine application continue $A : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathrm{End}(V)$, et $A(\pi/2)$ est inversible. $\square$

On en déduit le lemme suivant :

Lemme 2.13 *Il existe une application* $B : \{(s, t, s', t') \in (\mathbb{R}_+)^4, s + 2t = s' + 2t', 0 \leq t' \leq t \leq s + t \leq s' + t' \leq s + 2t\} \to \mathrm{End}(V)$, *telle que* $\|B\|_{\mathrm{End}(V)}$

est borné et que B tend vers Id_V lorsque t' et $s+t-t'$ tendent vers $+\infty$, et une constante C_2 (dépendant de V) de sorte que pour tout $C \in \mathbb{R}_+$ la propriété suivante soit vraie. Si (H,π) est dans la classe $\mathcal{E}_{G,\alpha\ell+C}$, ξ est un vecteur K-invariant de norme 1 dans H, et η un vecteur K-invariant de norme 1 dans $V\otimes H^*$, et si on pose $c(g)=\langle \eta,\pi(g)\xi\rangle$ pour $g\in G$, alors pour $s,t,s',t'\in\mathbb{R}_+$, avec $s+2t=s'+2t'$, et $0\leq t'\leq t\leq s+t\leq s'+t'\leq s+2t$, on a

$$\|c(D(s,t))-B(s,t,s',t')c(D(s',t'))\|_V \leq C_2 e^{2C+\alpha(s+2t)-t'/2}.$$

En effet soit $\varepsilon=\sqrt{\frac{(e^{2t}-e^{2t'})(e^{2s+2t-2t'}-1)}{(e^{2t}-1)(e^{2s+2t}-1)}}$, $\theta\in[0,\pi/2]$ tel que $\cos\theta=\varepsilon$, et θ_1 comme dans le lemme 2.8. Par le lemme 2.11, puis par le lemme 2.2 on a

$$\left\|T_{\frac{\pi}{2},c(D(s,t))}-T_{\theta,\tau\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}c(D(s',t'))}\right\|_{\mathcal{L}(L^2(X),L^2(X,\mathcal{W}))}$$

$$\leq \sup_{x\in S^2}\|a(x)\|\sup_{y\in S^2}\|b(y)\|\|T_0-T_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(L^2(X))}\leq e^{2C+\alpha(s+2t)}C_1\sqrt{\varepsilon}$$

et on sait que $\varepsilon\leq e^{-t'}$. On déduit alors du lemme 2.12 que

$$\left\|A(\pi/2)c(D(s,t))-A(\theta)\tau\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}c(D(s',t'))\right\|_V$$

$$\leq C_1 e^{2C+\alpha(s+2t)-t'/2}.$$

D'où le lemme, avec $C_2=C_1\|A(\pi/2)^{-1}\|_{\mathrm{End}(V)}$ et

$$B(s,t,s',t')=A(\pi/2)^{-1}A(\theta)\tau\begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

On vérifie que $B(s,t,s',t')$ tend vers Id_V si t' et $s+t-t'$ tendent vers $+\infty$, car $\varepsilon\leq e^{-t'/2}$ et $\sin^2(\theta_1)\leq\frac{e^{2t'}}{e^{2s+2t}-1}$. $\square$

La proposition 2.4 découle du lemme 2.13 et de son symétrique obtenu en inversant les rôles de s et t (c'est-à-dire en faisant agir l'automorphisme $g\mapsto\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}{}^tg^{-1}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ de G, qui stabilise K, et envoie $D(s,t)$ sur $D(t,s)$, et en appliquant le lemme précédent aux représentations $\pi\circ\theta$ et $\tau\circ\theta$).

Soit $u \in \mathbb{R}_+$. On applique le lemme ci-dessus avec $s = 0$, $t = 3u/2$ et $s' = t' = u$. On a alors $\|c(D(0,3u/2)) - C(u)c(D(u,u))\|_V \leq C_2 e^{2C+(3\alpha-1/2)u}$, où $C : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{End}(V)$ est défini par $C(u) = B(0,3u/2,u,u)$ et tend vers Id_V en $+\infty$.

En appliquant le symétrique du lemme on obtient

$$\|c(D(3u/2,0)) - C'(u)c(D(u,u))\|_V \leq C_2 e^{2C+(3\alpha-1/2)u},$$

où $C' : \mathbb{R}_+ \to \mathrm{End}(V)$ tend vers Id_V en $+\infty$.

Mais on remarque que $c(D(3u/2,0))$ est invariant par $\iota(SO_2(\mathbb{R}))$ et que $c(D(0,3u/2))$ est invariant par $\iota'(SO_2(\mathbb{R}))$, où ι' est l'inclusion $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $SO_2(\mathbb{R})$ dans K. Par le lemme suivant on a $\|c(D(u,u))\|_V \leq C_3 e^{2C+(3\alpha-1/2)u}$, où C_3 ne dépend que de V. On conclut alors très facilement en utilisant le lemme 2.13 et son symétrique. $\square$

Lemme 2.14 *Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de* Id *dans $GL(V)$ et une constante C_4 ne dépendant que de V tels que, pour $h_1, h_2 \in \mathcal{V}$, $x \in V$, $y \in V$ invariant par $h_1^{-1}\iota(SO_2(\mathbb{R}))h_1$, $z \in V$ invariant par $h_2^{-1}\iota'(SO_2(\mathbb{R}))h_2$, on a $\|x\|_V \leq C_4 \max(\|x-y\|_V, \|x-z\|_V)$.*

Comme les images de $SO_2(\mathbb{R})$ par ι et ι' engendrent K, les sous-espaces $V^{\iota(SO_2(\mathbb{R}))}$ et $V^{\iota'(SO_2(\mathbb{R}))}$ de V ont une intersection réduite à 0. Il existe donc $\kappa > 0$ tel que pour $u \in V^{\iota(SO_2(\mathbb{R}))}$ et $v \in V^{\iota'(SO_2(\mathbb{R}))}$ on ait $\|u - v\|_V \geq \kappa\|u\|_V$. Comme V est de dimension finie, on en déduit facilement qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de Id dans $GL(V)$ tel que pour $u \in V^{\iota(SO_2(\mathbb{R}))}$, $v \in V^{\iota'(SO_2(\mathbb{R}))}$, et $h_1, h_2 \in \mathcal{V}$, on ait $\|h_1^{-1}u - h_2^{-1}v\|_V \geq \frac{\kappa}{2}\|h_1^{-1}u\|_V$. Avec les notations du lemme on a alors $\|x\|_V \leq \|y\|_V + \|x-y\|_V \leq (\frac{4}{\kappa}+1)\max(\|x-y\|_V, \|x-z\|_V)$. $\square$

3 Propriété (T) renforcée banachique pour SL_3 sur un corps local non-archimédien

Soit F un corps local non-archimédien, O_F son anneau d'entiers, π_F une uniformisante, $\mathbb{F}$ le corps résiduel, et q le cardinal de $\mathbb{F}$. On note $q = p^r$ avec p premier.

Nous montrons que $SL_3(F)$ a la propriété (T) renforcée et la propriété (T) renforcée banachique relativement à (p, r).

On note $G = SL_3(F)$ et $K = SL_3(O_F)$.

On munit G de la longueur ℓ définie par

$$\ell(k(\pi_F^{\frac{i+2j}{3}} \begin{pmatrix} \pi_F^{-(i+j)} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_F^{-j} & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix})k') = i + j$$

pour $k, k' \in K$ et $i, j \in \mathbb{N}$, $i - j \in 3\mathbb{Z}$.

Théorème 3.1 *Soit $s < \frac{r \log p}{6}$. Il existe $t, C' > 0$ tel que pour tout $C \in \mathbb{R}_+$, il existe un idempotent autoadjoint* p *dans $\mathcal{C}_{s\ell+C}(G)$ tel que*

- *(i) pour tout $(H, \pi) \in \mathcal{E}_{G,s\ell+C}$, $\pi(\mathrm{p})$ a pour image le sous-espace de H formé des vecteurs G-invariants,*
- *(ii) il existe une suite $\mathrm{p}_n \in C_c(G)$, telle que $\int_G |\mathrm{p}_n(g)| dg \leq 1$, p_n est à support dans $\{g \in G, \ell(g) \leq n\}$, et $\|\mathrm{p} - \mathrm{p}_n\|_{\mathcal{C}_{s\ell+C}(G)} \leq e^{2C} C' e^{-tn}$.*

On rappelle que pour $\alpha \geq 0$ on note $\mathcal{E}^{p,r,\alpha}$ la classe des espaces de Banach E (munis d'une norme bien précisée) tels que pour tous $(x_i)_{i \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r}$ dans E, on ait, en notant $\widehat{(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r}$ le groupe des caractères de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$,

$$p^{-r} \sum_{\chi \in \widehat{(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r}} \Big\| p^{-r} \sum_{i \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r} \chi(i) x_i \Big\|_E^2 \leq e^{-\alpha} \Big(p^{-r} \sum_{i \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r} \|x_i\|_E^2 \Big).$$

Par Cauchy-Schwarz tout espace de Banach est dans la classe $\mathcal{E}^{p,r,0}$.

On rappelle que si ℓ' est une longueur sur G, on note $\mathcal{E}^{p,r,\alpha}_{G,\ell'}$ la classe des représentations continues (E, π) de G dans un espace de Banach E de la classe $\mathcal{E}^{p,r,\alpha}$ telles que $\|\pi(g)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq e^{\ell'(g)}$ et $\mathcal{C}^{p,r,\alpha}_{\ell'}(G)$ l'algèbre de Banach complétion de $C_c(G)$ pour la norme $\|f\| = \sup_{(E,\pi) \in \mathcal{E}^{p,r,\alpha}_{G,\ell'}} \|\pi(f)\|_{\mathcal{L}(E)}$.

Théorème 3.2 *Soient $\alpha > 0$ et $\beta \in [0, \frac{\alpha}{6}[$. Il existe $t, C' > 0$ tels que pour tout $C \in \mathbb{R}^+$, il existe un idempotent autoadjoint $\mathrm{p} \in \mathcal{C}^{p,r,\alpha}_{C+\beta\ell}(G)$ tel que*

- *(i) pour toute représentation $(E, \pi) \in \mathcal{E}^{p,r,\alpha}_{G,C+\beta\ell}$, $\pi(\mathrm{p})$ a pour image le sous-espace de E formé des vecteurs G-invariants,*
- *(ii) il existe une suite $\mathrm{p}_n \in C_c(G)$, telle que $\int_G |\mathrm{p}_n(g)| dg \leq 1$, p_n est à support dans $\{g \in G, \ell(g) \leq n\}$, et $\|\mathrm{p} - \mathrm{p}_n\|_{\mathcal{C}^{p,r,\alpha}_{C+\beta\ell}(G)} \leq e^{2C} C' e^{-tn}$.*

Comme tout espace de Hilbert est dans $E^{p,r,r \log p}$, le théorème 3.2 implique le théorème 3.1. Le reste de cette section est consacré à la démonstration du théorème 3.2.

On commence par montrer que le théorème 3.2 résulte des deux propositions suivantes. On note $\Lambda = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2, i - j \in 3\mathbb{Z}\}$.

Proposition 3.3 *Soit $\alpha > 0$ et $\beta \in [0, \frac{\alpha}{6}[$. Il existe $C' > 0$ telle que la propriété suivante soit vraie. Soit $C \in \mathbb{R}^+$ arbitraire. Si (E, π) est dans la classe $\mathcal{E}^{p,r,\alpha}_{G,C+\beta\ell}$ et ξ et η sont deux vecteurs K-invariants de norme 1 dans E et E^*, et si on pose $c(g) = \langle \eta, \pi(g)\xi \rangle$ pour $g \in G$, la fonction $c : \Lambda \to \mathbb{C}$ définie par abus de notations par $c(i,j) = c(\pi_F^{\frac{i+2j}{3}} \begin{pmatrix} \pi_F^{-(i+j)} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_F^{-j} & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix})$ tend vers une limite c_∞ à l'infini et on a $|c(i,j) - c_\infty| \leq C' e^{2C - (\frac{\alpha}{6} - \beta)(i+j)}$.*

Proposition 3.4 *Soient $\alpha > 0$ et $\beta \in [0, \frac{\alpha}{6}[$. Soit (V, τ) une représentation irréductible unitaire non triviale de K. Il existe une constante $C' > 0$ telle que la propriété suivante soit vraie. Soit $C \in \mathbb{R}^+$ arbitraire. Si (E, π) est dans la classe $\mathcal{E}^{p,r,\alpha}_{G,C+\beta\ell}$, si ξ est un vecteur K-invariant de norme 1 dans E, et η un vecteur K-invariant de norme 1 dans $V \otimes E^*$ et si on pose $c(g) = \langle \eta, \pi(g)\xi \rangle \in V$ pour $g \in G$, la fonction $c : \Lambda \to V$ définie par abus de notations par $c(i,j) = c(\pi_F^{\frac{i+2j}{3}} \begin{pmatrix} \pi_F^{-(i+j)} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_F^{-j} & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix})$ tend vers 0 à l'infini et on a $\|c(i,j)\|_V \leq C' e^{2C - (\frac{\alpha}{6} - \beta)(i+j)}$.*

Montrons que les propositions 3.3 et 3.4 impliquent le théorème 3.2. Soient $\alpha > 0$ et $\beta \in [0, \frac{\alpha}{6}[$. La proposition 3.3 permet la construction d'un idempotent p qui grâce à la proposition 3.4 sera celui du théorème.

Soit $C \in \mathbb{R}_+$. Pour $g \in G$, on pose $P_g = e_K e_g e_K$. D'après la proposition 3.3, P_g est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}^{p,r,\alpha}_{C+\beta\ell}(G)$ quand g tend vers l'infini, et cette suite tend vers un certain élément p. Comme $P_g^* = P_{g^{-1}}$, p est autoadjoint. De plus pour toute représentation (E, π) dans la classe $\mathcal{E}^{p,r,\alpha}_{G,C+\beta\ell}$, $\pi(\mathrm{p})$ a pour image le sous-espace des vecteurs x tels que pour tout $g \in G$, $\pi(e_K)\pi(g)x = x$. En effet $e_K e_g P_{g'}$ est égal à $\int_K P_{gkg'} dk$, d'où il résulte que $e_K e_g \mathrm{p} = \mathrm{p}$. Par ailleurs il est évident que la restriction de $\pi(\mathrm{p})$ aux vecteurs x tels que pour tout $g \in G$, $\pi(e_K)\pi(g)x = x$ est Id, donc p est un idempotent. Si π est isométrique et E est uniformément convexe, le lemme suivant montre que les vecteurs x tels que pour tout $g \in G$, $\pi(e_K)\pi(g)x = x$ sont exactement les vecteurs G-invariants.

Lemme 3.5 *Soit π une représentation isométrique de G sur un espace uniformément convexe E. Soit $x \in E$ de norme 1, tel que $\pi(e_K)\pi(g)x = x$ pour tout $g \in G$. Alors x est G-invariant.*

En effet soit ξ l'unique forme linéaire de norme 1 telle que $\langle \xi, x \rangle = 1$. Comme elle est unique elle est K-invariante, et donc $\langle \xi, \pi(g)x \rangle = 1$ pour tout $g \in G$. Mais tout vecteur $y \in E$ de norme 1 tel que $\langle \xi, y \rangle = 1$ est égal à x. Donc x est G-invariant. □

En général nous utilisons la proposition 3.4. Soit V une représentation irréductible non triviale de K, et e_K^V le projecteur sur les éléments dont le K-type est V. La proposition 3.4 implique que $e_K^V e_g e_K$ tend vers 0 dans $\mathcal{C}^{p,r,\alpha}_{C+\beta\ell}(G)$ quand g tend vers l'infini dans G. Il en résulte facilement que $e_K^V e_g \mathrm{p} = 0$ dans $\mathcal{C}^{p,r,\alpha}_{C+\beta\ell}(G)$ pour tout $g \in G$. Donc pour toute représentation (E, π) dans la classe $\mathcal{E}^{p,r,\alpha}_{G,C+\beta\ell}$, l'image de $\pi(\mathrm{p})$ est formée exactement des vecteurs G-invariants de H. Enfin on peut prendre $\mathrm{p}_n = P_{g_{E(n/2)}}$, avec $g_n =$

$\pi_F^n \begin{pmatrix} \pi_F^{-2n} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_F^{-n} & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie facilement que t et C' ne dépendent pas de C. Ceci achève la démonstration du théorème 3.2. $\square$

Il nous reste maintenant à montrer les propositions 3.3 et 3.4.

Soit $G' = \{g \in GL_3(F), \det g \in \pi_F^{\mathbb{Z}}\}/(\pi_F^{\mathbb{Z}}\mathrm{Id})$. Alors G est un sous-groupe d'indice 3 dans G' et K est un sous-compact maximal de G'. Tout élément de G' s'écrit sous la forme $k \begin{pmatrix} \pi_F^{-(i+j)} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_F^{-j} & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} k'$, avec $i, j \in \mathbb{N}$ uniques et $k, k' \in K$. On munit G' de la longueur ℓ définie par $\ell(k \begin{pmatrix} \pi_F^{-(i+j)} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_F^{-j} & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} k') = i + j$, pour $k, k' \in K$ et $i, j \in \mathbb{N}$.

En induisant les représentations de G à G', on voit que les propositions 3.3 et 3.4 découlent des deux propositions suivantes.

Si ℓ' est une longueur sur G', on note $\mathcal{E}_{G',\ell'}^{p,r,\alpha}$ la classe des représentations continues (E, π) de G' dans un espace de Banach E de la classe $\mathcal{E}^{p,r,\alpha}$ telles que $\|\pi(g)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq e^{\ell'(g)}$.

Proposition 3.6 *Soit $\alpha > 0$ et $\beta \in [0, \frac{\alpha}{6}[$. Il existe $C' > 0$ telle que la propriété suivante soit vraie. Soit $C \in \mathbb{R}^+$ arbitraire. Si (E, π) est dans la classe $\mathcal{E}_{G',C+\beta\ell}^{p,r,\alpha}$ et ξ et η sont deux vecteurs K-invariants de norme 1 dans E et E^*, et si on pose $c(g) = \langle \eta, \pi(g)\xi \rangle$ pour $g \in G'$, la restriction à Λ de la fonction $c : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{C}$ définie par abus de notations par $c(i,j) = c(\begin{pmatrix} \pi_F^{-(i+j)} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_F^{-j} & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix})$ tend vers une limite c_∞ à l'infini et on a $|c(i,j) - c_\infty| \leq C' e^{2C - (\frac{\alpha}{6} - \beta)(i+j)}$ pour $(i,j) \in \Lambda$.*

Proposition 3.7 *Soient $\alpha > 0$ et $\beta \in [0, \frac{\alpha}{6}[$. Soit (V, τ) une représentation irréductible unitaire non triviale de K. Il existe une constante $C' > 0$ telle que la propriété suivante soit vraie. Soit $C \in \mathbb{R}^+$ arbitraire. Si (E, π) est dans la classe $\mathcal{E}_{G',C+\beta\ell}^{p,r,\alpha}$, si ξ est un vecteur K-invariant de norme 1 dans E, et η un vecteur K-invariant de norme 1 dans $V \otimes E^*$ et si on pose $c(g) = \langle \eta, \pi(g)\xi \rangle \in V$ pour $g \in G'$, la restriction à Λ de la fonction $c : \mathbb{N}^2 \to V$ définie par abus de notations par $c(i,j) = c(\begin{pmatrix} \pi_F^{-(i+j)} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_F^{-j} & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix})$ tend vers 0 à l'infini et on a $\|c(i,j)\|_V \leq C' e^{2C - (\frac{\alpha}{6} - \beta)(i+j)}$ pour $(i,j) \in \Lambda$.*

Il nous reste maintenant à montrer les propositions 3.6 et 3.7.

Nous commençons par un lemme qui servira pour les deux.

Soit $\chi : \mathbb{F} \to C^*$ un caractère non trivial. Dans toute la suite nous pondérons toutes les sommes pour qu'elles soient des moyennes.

Lemme 3.8 *Soit $\alpha \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un espace de Banach dans la classe $\mathcal{E}^{p,r,\alpha}$, $(\xi_{x,y})_{x,y\in O_F/\pi_F^n O_F}$ des vecteurs de E. Alors*

$$\frac{1}{q^{2n}} \sum_{a,b\in O_F/\pi_F^n O_F} \Big\| \frac{1}{q^{n+1}} \sum_{x\in O_F/\pi_F^n O_F, \varepsilon\in\mathbb{F}} \chi(\varepsilon)\xi_{x,ax+b+\pi_F^{n-1}\varepsilon} \Big\|^2$$

$$\leq e^{-n\alpha} \frac{1}{q^{2n}} \sum_{x\in O_F/\pi_F^n O_F, y\in O_F/\pi_F^n O_F} \|\xi_{x,y}\|^2.$$

Par hypothèse E est dans la classe $\mathcal{E}^{p,r,\alpha}$. De façon équivalente, pour toute famille $(u_c)_{c\in\mathbb{F}}$ de vecteurs de E,

$$\frac{1}{q}\sum_{d\in\mathbb{F}} \Big\|\frac{1}{q}\sum_{c\in\mathbb{F}} \chi(cd)u_c\Big\|_E^2 \leq e^{-\alpha}\Big(\frac{1}{q}\sum_{c\in\mathbb{F}}\|u_c\|_E^2\Big).$$

Montrons le lemme pour $n = 1$.

Posons $u_c = \frac{1}{q}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{F}} \chi(\varepsilon)\xi_{c,\varepsilon}$ pour $c \in \mathbb{F}$ et appliquons l'inégalité ci-dessus aux vecteurs u_c. On en déduit

$$\frac{1}{q}\sum_{a\in\mathbb{F}} \Big\|\frac{1}{q^2}\sum_{x,\varepsilon\in\mathbb{F}} \chi(\varepsilon)\xi_{x,ax+\varepsilon}\Big\|^2 \leq \frac{1}{q}\sum_{a\in\mathbb{F}} \Big\|\frac{1}{q}\sum_{x\in\mathbb{F}} \chi(-ax)u_x\Big\|^2$$

$$\leq e^{-\alpha}\frac{1}{q}\sum_{x\in\mathbb{F}}\|u_x\|^2 \leq e^{-\alpha}\frac{1}{q^2}\sum_{x,y\in\mathbb{F}}\|\xi_{x,y}\|^2.$$

Soit maintenant $n \geq 2$, supposons le lemme vrai pour $n-1$ et montrons-le pour n. Appliquons l'inégalité ci-dessus aux vecteurs

$$u_c^{a,b} = \frac{1}{q^n} \sum_{x\in c+\pi_F O_F/\pi_F^n O_F, \varepsilon\in\mathbb{F}} \chi(\varepsilon)\xi_{x,ax+b+\pi_F^{n-1}\varepsilon}.$$

On en déduit

$$\frac{1}{q^{2n}} \sum_{a,b\in O_F/\pi_F^n O_F} \Big\| \frac{1}{q^{n+1}} \sum_{x\in O_F/\pi_F^n O_F, \varepsilon\in\mathbb{F}} \chi(\varepsilon)\xi_{x,ax+b+\pi_F^{n-1}\varepsilon} \Big\|^2$$

$$= \frac{1}{q^{2n}} \sum_{a,b\in O_F/\pi_F^n O_F} \frac{1}{q}\sum_{d\in\mathbb{F}} \Big\| \frac{1}{q^{n+1}} \sum_{x\in O_F/\pi_F^n O_F, \varepsilon\in\mathbb{F}} \chi(\varepsilon)\xi_{x,(a-d\pi_F^{n-1})x+b+\pi_F^{n-1}\varepsilon} \Big\|^2$$

$$= \frac{1}{q^{2n}} \sum_{a,b \in O_F/\pi_F^n O_F} \frac{1}{q} \sum_{d \in \mathbb{F}} \Big\| \frac{1}{q} \sum_{c \in \mathbb{F}} \chi(cd) u_c^{a,b} \Big\|^2$$

$$\leq e^{-\alpha} \frac{1}{q^{2n}} \sum_{a,b \in O_F/\pi_F^n O_F} \frac{1}{q} \sum_{c \in \mathbb{F}} \|u_c^{a,b}\|^2$$

$$= e^{-\alpha} \frac{1}{q} \sum_{c \in \mathbb{F}} \Big(\frac{1}{q^{2n}} \sum_{a,b \in O_F/\pi_F^n O_F} \Big\| \frac{1}{q^n} \sum_{x \in c + \pi_F O_F/\pi_F^n O_F, \varepsilon \in \mathbb{F}} \chi(\varepsilon) \xi_{x, ax+b+\pi_F^{n-1}\varepsilon} \Big\|^2 \Big).$$

Pour chaque $c \in \mathbb{F}$, on choisit un relevé $\tilde{c}$ de c à $O_F/\pi_F^n O_F$. Le membre de droite de l'inégalité précédente est alors égal à

$$e^{-\alpha} \frac{1}{q} \sum_{c \in \mathbb{F}} \Big(\frac{1}{q^{2n-1}} \sum_{a \in O_F/\pi_F^{n-1} O_F, b \in O_F/\pi_F^n O_F}$$

$$\Big\| \frac{1}{q^n} \sum_{x \in O_F/\pi_F^{n-1} O_F, \varepsilon \in \mathbb{F}} \chi(\varepsilon) \xi_{\tilde{c}+\pi_F x, a\pi_F x + b + \pi_F^{n-1}\varepsilon} \Big\|^2 \Big)$$

$$= e^{-\alpha} \frac{1}{q^2} \sum_{c,d \in \mathbb{F}} \Big(\frac{1}{q^{2(n-1)}} \sum_{a,b \in O_F/\pi_F^{n-1} O_F}$$

$$\Big\| \frac{1}{q^n} \sum_{x \in O_F/\pi_F^{n-1} O_F, \varepsilon \in \mathbb{F}} \chi(\varepsilon) \xi_{\tilde{c}+\pi_F x, \tilde{d} + a\pi_F x + \pi_F b + \pi_F^{n-1}\varepsilon} \Big\|^2 \Big).$$

On applique l'hypothèse de récurrence aux familles $(\xi_{\tilde{c}+\pi_F x, \tilde{d}+\pi_F y})_{x,y \in O_F/\pi_F^{n-1} O_F}$, pour $c, d \in \mathbb{F}$. Le lemme 3.8 est démontré. $\square$

Nous commençons par un lemme préliminaire pour montrer la proposition 3.6.

Dans la suite on note B l'immeuble de $PGL_3(F)$. On rappelle que les sommets de B sont identifiés aux réseaux de F^3, à homothéties près, et que $PGL_3(F)$ agit à gauche sur B. Donc G' agit à gauche sur B et cette action est transitive. D'autre part soit x_0 le sommet correspondant au réseau O_F^3 dans F^3 : son stabilisateur dans G' est $K = SL_3(O_F)$, ce qui permet d'identifier B et G'/K. Si M est un réseau associé à un sommet x de B, $\det(M) = \pi_F^{-a} \det(O_F^3)$ pour un certain entier $a \in \mathbb{Z}$, dont l'image dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ne dépend que de x : on dit que c'est le type de x. Etant donnés $x, y \in B$ il existe des entiers $i, j \in \mathbb{N}$ uniques tels que pour une certaine base (v_1, v_2, v_3) de F^3 engendrant x comme O_F-module on ait $y = O_F \pi_F^{-i-j} v_1 + O_F \pi_F^{-j} v_2 + O_F v_3$ modulo F^*. On écrit $\sigma(x, y) = (i, j) \in \mathbb{N}^2$. On a alors $\sigma(y, x) = (j, i)$ et le type de y est $\mathrm{type}(x) + i - j$ modulo 3. Etant donnés $x, y \in B = G'/K$, on a $\sigma(x,y)=(i,j)$ si et seulement si $x^{-1}y = K\begin{pmatrix}\pi_F^{-(i+j)} & 0 & 0\\ 0 & \pi_F^{-j} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}K$ dans $K\backslash G'/K$.

On note (e_1,e_2,e_3) la base standard de F^3. Soit $m,n\in\mathbb{N}$. Pour $x,y\in O_F/\pi_F^n O_F$ et $a,b\in O_F/\pi_F^m O_F$ on note $M^n_{x,y}$ et $M^{-m}_{a,b}$ les réseaux suivants de F^3 :

$$\begin{aligned} M^n_{x,y} &= O_F\pi_F^{-n}(e_1+xe_2-ye_3)+O_Fe_2+O_Fe_3 \text{ et}\\ M^{-m}_{a,b} &= \{u_1e_1+u_2e_2+u_3e_3\in O_F^3, u_1b+u_2a+u_3\in\pi_F^mO_F\}\\ &= O_F(e_1-be_3)+O_F(e_2-ae_3)+O_F\pi_F^me_3. \end{aligned}$$

Par abus nous avons supposé que x,y,a,b étaient relevés en des éléments de O_F, le résultat ne dépendant pas de ce choix. On note encore $M^n_{x,y}$ et $M^{-m}_{a,b}$ les classes d'homothétie de ces réseaux, considérées comme des éléments de $B=G'/K$. Dans G'/K on a $M^n_{x,y} = \begin{pmatrix}\pi_F^{-n} & 0 & 0\\ \pi_F^{-n}x & 1 & 0\\ -\pi_F^{-n}y & 0 & 1\end{pmatrix}K$ et $M^{-m}_{a,b} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \pi_F^{-m}b & \pi_F^{-m}a & \pi_F^{-m}\end{pmatrix}^{-1}K.$

Remarque Ici m et n jouent des rôles similaires à $s+t$ et t avant le lemme 2.7. En fait les images de S^2 par $q_{-(s+t)}$ et q_t correspondraient ici aux K-orbites de $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \pi_F^m\end{pmatrix}K$ et $\begin{pmatrix}\pi_F^{-n} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}K$ dans G'/K, qui s'identifient à des plans projectifs $\mathbb{P}^2(O_F/\pi_F^mO_F)$ et $\mathbb{P}^2(O_F/\pi_F^nO_F)$. Les points $M^{-m}_{a,b}$ pour $a,b\in O_F/\pi_F^mO_F$ et $M^n_{x,y}$ pour $x,y\in O_F/\pi_F^nO_F$ décrivent des plans affines dans ces plans projectifs (ce ne sont plus des K-orbites, nous perdons par conséquent l'action de K).

Le lemme suivant, qui est l'analogue du lemme 2.7, montre que la position relative de $M^{-m}_{a,b}$ et $M^n_{x,y}$ ne dépend que du produit scalaire entre le vecteur $e_1+xe_2-ye_3$ et la forme linéaire $u_1e_1+u_2e_2+u_3e_3\mapsto u_1b+u_2a+u_3$ (nous avons choisi les lettres pour qu'il prenne la forme agréable $(ax+b)-y$).

Lemme 3.9 *Soient $x,y\in O_F/\pi_F^nO_F$ et $a,b\in O_F/\pi_F^mO_F$. Soit i le plus grand entier de $\{0,...,\min(m,n)\}$ tel que $y-(ax+b)$ appartienne à $\pi_F^iO_F/\pi_F^{\min(m,n)}O_F$. Alors $\sigma(M^{-m}_{a,b},M^n_{x,y})=(m+n-2i,i)$.*

En effet si $i<\min(m,n)$ on a

$M^n_{x,y} = O_F\pi_F^{-n}(e_1+xe_2-ye_3)+O_F(e_2-ae_3)+O_F\pi_F^{-i}(e_1+xe_2-(ax+b)e_3)$ et

$M_{a,b}^{-m} = O_F \pi_F^{m-i}(e_1 + xe_2 - ye_3) + O_F(e_2 - ae_3) + O_F(e_1 + xe_2 - (ax+b)e_3)$
si $i = n$ (et donc $m \geq n$) on a

$$M_{x,y}^{n} = O_F \pi_F^{-n}(e_1 + xe_2 - (ax+b)e_3) + O_F(e_2 - ae_3) + O_F e_3 \text{ et}$$

$$M_{a,b}^{-m} = O_F(e_1 + xe_2 - (ax+b)e_3) + O_F(e_2 - ae_3) + O_F \pi_F^m e_3$$

et si $i = m$ (et donc $n \geq m$) on a

$$M_{x,y}^{n} = O_F \pi_F^{-n}(e_1 + xe_2 - ye_3) + O_F(e_2 - ae_3) + O_F e_3 \text{ et}$$

$$M_{a,b}^{-m} = O_F(e_1 + xe_2 - ye_3) + O_F(e_2 - ae_3) + O_F \pi_F^m e_3.$$

□

Montrons maintenant la proposition 3.6. Soient $m, n \in \mathbb{N}$, avec $m \geq n$. Soient $x, y \in O_F/\pi_F^n O_F$ et $a, b \in O_F/\pi_F^m O_F$. On pose $\xi_{x,y} = \pi(M_{x,y}^n)\xi \in E$ et $\eta_{a,b} = {}^t\pi((M_{a,b}^{-m})^{-1})\eta \in E^*$. Alors $\|\xi_{x,y}\| \leq e^{C+n\beta}$, $\|\eta_{a,b}\| \leq e^{C+m\beta}$ et $\langle \eta_{a,b}, \xi_{x,y} \rangle = c(m+n-2i, i)$, où i est le plus grand entier de $\{0, ..., n\}$ tel que $y - (ax+b)$ appartienne à $\pi_F^i O_F/\pi_F^n O_F$. Il résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du lemme 3.8 que

$$\frac{1}{q^{2m+n+1}} \Big| \sum_{a,b \in O_F/\pi_F^m O_F, x \in O_F/\pi_F^n O_F, \varepsilon \in \mathbb{F}} \chi(\varepsilon) \langle \eta_{a,b}, \xi_{x,ax+b+\varepsilon \pi_F^{n-1}} \rangle \Big|$$

$$\leq \sqrt{\frac{1}{q^{2m}} \sum_{a,b \in O_F/\pi_F^m O_F} \|\eta_{a,b}\|^2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{q^{2m}} \sum_{a,b \in O_F/\pi_F^m O_F} \Big\| \frac{1}{q^{n+1}} \sum_{x \in O_F/\pi_F^n O_F, \varepsilon \in \mathbb{F}} \chi(\varepsilon) \xi_{x,ax+b+\varepsilon \pi_F^{n-1}} \Big\|^2}$$

$$\leq e^{-n\frac{\alpha}{2}} e^{2C+(m+n)\beta}.$$

Mais le membre de gauche est égal à $\frac{1}{q}|c(m-n,n) - c(m-n+2, n-1)|$, et donc $|c(m-n,n) - c(m-n+2,n-1)| \leq q e^{-n\frac{\alpha}{2}} e^{2C+(m+n)\beta}$.

On a donc, pour $i, j \in \mathbb{N}$ avec $j > 0$,

$$|c(i,j) - c(i+2, j-1)| \leq q e^{-j\frac{\alpha}{2}} e^{2C+(i+2j)\beta}.$$

En faisant agir l'automorphisme $g \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^t g^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de G', qui stabilise K, et envoie $\begin{pmatrix} \pi_F^{-(i+j)} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_F^{-j} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} \pi_F^{-(i+j)} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_F^{-i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient, pour $i,j \in \mathbb{N}$ avec $i > 0$,

$$|c(i,j) - c(i-1,j+2)| \leq q e^{-i\frac{\alpha}{2}} e^{2C+(2i+j)\beta}.$$

Donc on a, pour $i,j \in \mathbb{N}$, avec $i \geq j$ et $i-j \in 3\mathbb{Z}$,

$$|c(i,j) - c(\frac{2i+j}{3}, \frac{2i+j}{3})| \leq q e^{2C}(e^{-i\frac{\alpha}{2}} + ... + e^{-(\frac{2i+j}{3}+1)\frac{\alpha}{2}}) e^{(2i+j)\beta}$$

$$\leq q e^{2C}(e^{\frac{\alpha}{2}} - 1)^{-1} e^{-(2i+j)(\frac{\alpha}{6}-\beta)},$$

ainsi que la même inégalité en inversant i et j, et

$$|c(i,i) - c(i+1,i+1)| \leq q e^{2C}(1 + e^{-\alpha+3\beta}) e^{-i(\frac{\alpha}{2}-3\beta)}.$$

La proposition 3.6 est démontrée. $\square$

Montrons maintenant la proposition 3.7 (nous rappelons que cette proposition n'est pas nécessaire si on se limite aux actions isométriques sur des espaces de Banach uniformément convexes).

Pour $x,y,a,b \in O_F$, nous devons calculer l'image de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \pi_F^{-m} b & \pi_F^{-m} a & \pi_F^{-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_F^{-n} & 0 & 0 \\ \pi_F^{-n} x & 1 & 0 \\ -\pi_F^{-n} y & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans $K' \backslash G'/K$, où K' est un sous-groupe ouvert compact de K inclus dans le noyau de τ, alors que le lemme 3.9 calculait l'image dans $K\backslash G'/K$. Pour simplifier nous ne mènerons ce calcul que lorsque $m \geq n$ et $y = ax+b$ ou $y = ax+b+\pi_F^{n-1}$. Le lemme ci-dessous, qui est une variante du lemme 3.8, permet de nous limiter à ces cas-là. Le rôle de la variable supplémentaire k sera expliqué plus tard.

On sait que tout caractère non trivial de $\mathbb{F}$ est de la forme $\chi_d : x \mapsto \chi(dx)$, pour $d \in \mathbb{F}^*$. De plus on peut écrire $\delta_0 - \delta_1 = \sum_{d\in\mathbb{F}^*} t_d \chi_d$, pour certains $t_d \in \mathbb{C}$. On pose $C_2 = q^3 \sum_{d\in\mathbb{F}^*} |t_d|^2$.

Lemme 3.10 *Soit $\alpha \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0,...,n-1\}$. Soit E un espace de Banach dans la classe $\mathcal{E}^{p,r,\alpha}$, $(\xi_{x,y})_{x,y\in O_F/\pi_F^n O_F}$ des vecteurs de E. Alors*

$$\frac{1}{q^{2n}} \sum_{a,b\in O_F/\pi_F^n O_F} \Big\| \frac{1}{q^{n-k}} \sum_{x\in\pi_F^k O_F/\pi_F^n O_F} \xi_{x,ax+b} - \frac{1}{q^{n-k}} \sum_{x\in\pi_F^k O_F/\pi_F^n O_F} \xi_{x,ax+b+\pi_F^{n-1}} \Big\|^2$$

$$\leq C_2 e^{-(n-k)\alpha} \frac{1}{q^{2n-k}} \sum_{x\in\pi_F^k O_F/\pi_F^n O_F, y\in O_F/\pi_F^n O_F} \|\xi_{x,y}\|^2.$$

On se ramène tout de suite au cas où $k=0$, ce que l'on suppose désormais. On écrit

$$\frac{1}{q^n}\sum_{x\in O_F/\pi_F^n O_F}\xi_{x,ax+b}-\frac{1}{q^n}\sum_{x\in O_F/\pi_F^n O_F}\xi_{x,ax+b+\pi_F^{n-1}}$$
$$=q\sum_{d\in\mathbb{F}^*}t_d\Big(\frac{1}{q^{n+1}}\sum_{x\in O_F/\pi_F^n O_F,\varepsilon\in\mathbb{F}}\chi_d(\varepsilon)\xi_{x,ax+b+\pi_F^{n-1}\varepsilon}\Big),$$

puis on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le lemme 3.8. $\square$

On fixe maintenant $k\in\mathbb{N}$ tel que τ se factorise par $SL_3(O_F/\pi_F^k O_F)$ et on note K' le noyau de $K\to SL_3(O_F/\pi_F^k O_F)$. On va appliquer le lemme 3.10 pour cette valeur de k

Soient $m,n\in\mathbb{N}$, avec $m\geq n$. Pour $a,b\in O_F$, la classe dans G'/K' de $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\pi_F^{-m}b&\pi_F^{-m}a&\pi_F^{-m}\end{pmatrix}^{-1}$ ne dépend que de a,b modulo $\pi_F^{m+k}O_F$. Pour $x,y\in O_F/\pi_F^n O_F$ et $a,b\in O_F/\pi_F^{m+k}O_F$ on peut donc définir

$$\xi_{x,y}=\pi\begin{pmatrix}\pi_F^{-n}&0&0\\\pi_F^{-n}x&1&0\\-\pi_F^{-n}y&0&1\end{pmatrix}\xi\in E \text{ et}$$

$$\eta_{a,b}=\Big({}^t\pi\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\pi_F^{-m}b&\pi_F^{-m}a&\pi_F^{-m}\end{pmatrix}\otimes 1\Big)\eta\in E^*\otimes V.$$

Alors $\|\xi_{x,y}\|\leq e^{C+n\beta}$, $\|\eta_{a,b}\|\leq e^{C+m\beta}$. On a $\langle\eta_{a,b},\xi_{x,y}\rangle=c(A_{a,b}^{x,y})\in V$, où

$$A_{a,b}^{x,y}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\pi_F^{-m}b&\pi_F^{-m}a&\pi_F^{-m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_F^{-n}&0&0\\\pi_F^{-n}x&1&0\\-\pi_F^{-n}y&0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\pi_F^{-n}&0&0\\\pi_F^{-n}x&1&0\\\pi_F^{-m-n}(ax+b-y)&\pi_F^{-m}a&\pi_F^{-m}\end{pmatrix}.$$

On note $c(i,j)=c\begin{pmatrix}\pi_F^{-(i+j)}&0&0\\0&\pi_F^{-j}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. On rappelle que $c(kgk')=\tau(k)c(g)\in V$ pour $k,k'\in K,g\in G$. Si $y=ax+b$ on a

$$A_{a,b}^{x,y}=\begin{pmatrix}-\pi_F^{m-n+1}&1&0\\-\pi_F^{m-n+1}x&x&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_F^{-m}&0&0\\0&\pi_F^{-n}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&a&1\\1&\pi_F a&\pi_F\\0&1&0\end{pmatrix}$$

et donc

$$c(A_{a,b}^{x,y}) = \tau \begin{pmatrix} -\pi_F^{m-n+1} & 1 & 0 \\ -\pi_F^{m-n+1}x & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} c \begin{pmatrix} \pi_F^{-m} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_F^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \tau \begin{pmatrix} -\pi_F^{m-n+1} & 1 & 0 \\ -\pi_F^{m-n+1}x & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} c(m-n,n).$$

Si $y = ax + b + \pi_F^{n-1}$, on a

$$A_{a,b}^{x,y} = \begin{pmatrix} -\pi_F^{m-n+1} & 1 & 0 \\ -\pi_F^{m-n+1}x & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_F^{-(m+1)} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_F^{-(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \pi_F a & \pi_F \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$c(A_{a,b}^{x,y}) = \tau \begin{pmatrix} -\pi_F^{m-n+1} & 1 & 0 \\ -\pi_F^{m-n+1}x & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} c \begin{pmatrix} \pi_F^{-(m+1)} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_F^{-(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \tau \begin{pmatrix} -\pi_F^{m-n+1} & 1 & 0 \\ -\pi_F^{m-n+1}x & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} c(m-n+2,n-1).$$

On rappelle que τ se factorise par $SL_3(O_F/\pi_F^k O_F)$. On va appliquer le lemme 3.10 pour cette valeur de k de sorte que l'on aura toujours $x \in \pi_F^k O_F/\pi_F^n O_F$, ce qui implique $\tau \begin{pmatrix} -\pi_F^{m-n+1} & 1 & 0 \\ -\pi_F^{m-n+1}x & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} -\pi_F^{m-n+1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (c'est pour cela que nous avons introduit la variable supplémentaire k dans le lemme 3.10).

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le lemme 3.10, on obtient

$$\frac{1}{q^{2m+n+k}} \Big\| \sum_{a,b \in O_F/\pi_F^{m+k}O_F, x \in \pi_F^k O_F/\pi_F^n O_F} (\langle \eta_{a,b}, \xi_{x,ax+b}\rangle - \langle \eta_{a,b}, \xi_{x,ax+b+\pi_F^{n-1}}\rangle) \Big\|_V$$

$$\leq \frac{1}{q^{2m+2k}} \sum_{a,b \in O_F/\pi_F^{m+k}O_F} \|\eta_{a,b}\| \Big\| \frac{1}{q^{n-k}} \sum_{x \in \pi_F^k O_F/\pi_F^n O_F} \xi_{x,ax+b} - \xi_{x,ax+b+\pi_F^{n-1}} \Big\|$$

$$\leq \sqrt{C_2} e^{-(n-k)\frac{\alpha}{2}} e^{2C+(m+n)\beta}.$$

D'après les calculs qui précèdent, cette inégalité se réécrit

$$\left\|\tau\begin{pmatrix} -\pi_F^{m-n+1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} c(m-n,n)-\tau\begin{pmatrix} -\pi_F^{m-n+1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} c(m-n+2,n-1)\right\|_V$$

$$\leq \sqrt{C_2}e^{-(n-k)\frac{\alpha}{2}}e^{2C+(m+n)\beta}, \text{ et donc}$$

$$\|c(m-n,n)-c(m-n+2,n-1)\|_V \leq \sqrt{C_2}e^{-(n-k)\frac{\alpha}{2}}e^{2C+(m+n)\beta}.$$

On a donc

$$\|c(0,3i)-c(2i,2i)\|_V \leq \sqrt{C_2}e^{-(2i-k)\frac{\alpha}{2}}(e^{\frac{\alpha}{2}}-1)^{-1}e^{2C+6i\beta}.$$

En faisant agir l'automorphisme $g \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^t g^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de G', qui stabilise K, et envoie $\begin{pmatrix} \pi_F^{-(i+j)} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_F^{-j} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} \pi_F^{-(i+j)} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_F^{-i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et en appliquant l'inégalité précédente aux représentations $\pi \circ \theta$ et $\tau \circ \theta$, on voit que

$$\|c(3i,0)-c(2i,2i)\|_V \leq \sqrt{C_2}e^{-(2i-k)\frac{\alpha}{2}}(e^{\frac{\alpha}{2}}-1)^{-1}e^{2C+6i\beta}.$$

Or $c(0,3i)$ est invariant par le sous-groupe K_1 de K formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$, $c(3i,0)$ est invariant par le sous-groupe K_2 de K formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$ et on a le lemme suivant.

Lemme 3.11 *Il existe une constante C_3 (dépendant de V) telle que pour $x \in V$, $y \in V$ invariant par K_1, et $z \in V$ invariant par K_2, on a $\|x\|_V \leq C_3 \max(\|x-y\|_V, \|x-z\|_V)$.*

Comme les sous-groupes K_1 et K_2 engendrent K, on a $V^{K_1} \cap V^{K_2} = 0$ et le lemme en résulte aisément. □

En appliquant le lemme on voit que

$$\|c(2i,2i)\|_V \leq C_3\sqrt{C_2}e^{-(2i-k)\frac{\alpha}{2}}(e^{\frac{\alpha}{2}}-1)^{-1}e^{2C+6i\beta}.$$

On conclut alors comme à la fin de la démonstration de la proposition 3.6. □

4 Extension à d'autres groupes algébriques sur des corps locaux et à leurs réseaux cocompacts

Nous commençons par les groupes algébriques réels.

Corollaire 4.1 *Soit G un groupe algébrique presque simple sur $\mathbb{R}$, dont l'algèbre de Lie contient une sous-algèbre de Lie isomorphe à $sl_3(\mathbb{R})$. Alors G a la propriété (T) renforcée.*

L'argument que nous allons donner provient du paragraphe 1.6 de [BHV]. D'abord G contient un sous-groupe R qui est localement isomorphe à $SL_3(\mathbb{R})$. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Soit $a \in R$ l'exponentielle d'un élément semi-simple non nul a de $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{g} = \oplus_{\lambda \in \mathbb{R}} \mathfrak{g}^\lambda$ la décomposition de $\mathfrak{g}$ en espaces propres sous l'action adjointe de a. Soit $\mathfrak{g}^+ = \oplus_{\lambda > 0} \mathfrak{g}^\lambda$ et $\mathfrak{g}^- = \oplus_{\lambda < 0} \mathfrak{g}^\lambda$. D'après [BHV] $\mathfrak{g}$ est engendré par $\mathfrak{g}^+ \cup \mathfrak{g}^-$.

Soit ℓ' la longueur sur G définie par $\ell'(g) = \log \|Ad(g)\|$, en notant Ad la représentation adjointe (on choisit pour cela une norme hermitienne sur $\mathfrak{g}$, invariante par $SO_3(\mathbb{R}) \subset R$). Il existe $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\ell'|_R \leq \kappa \ell$. Soit $f \in C_c^\infty(G)$, d'intégrale 1, avec $\mathrm{Supp}(f) \subset \{g, \ell'(g) \leq 1\}$. Soit $s, t, C, C' \in \mathbb{R}_+^*, \mathrm{p} \in \mathcal{C}_{s\kappa\ell + C}(R)$, $\mathrm{p}_n \in C_c(R)$ vérifiant les conditions (i) et (ii) du théorème 2.1. Alors pour établir que G a la propriété renforcée il suffit de montrer que si s est assez petit la suite $\mathrm{p}_n f \in C_c(G)$ converge dans $\mathcal{C}_{s\ell' + C}(G)$ vers un idempotent autoadjoint p' tel que pour tout $(H, \pi) \in \mathcal{E}_{G, s\ell' + C}$, $\pi(\mathrm{p}')$ ait pour image le sous-espace de H formé des vecteurs G-invariants. D'abord il est clair que la suite $\mathrm{p}_n f$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}_{s\ell' + C}(G)$ et on note p' la limite (on peut voir p comme un multiplicateur de $\mathcal{C}_{s\ell' + C}(G)$ et alors $\mathrm{p}' = \mathrm{p} f$). Soit $(H, \pi) \in \mathcal{E}_{G, s\ell' + C}$. Il est évident que $\pi(\mathrm{p}')$ agit par l'identité sur tout vecteur G-invariant. Il reste donc à montrer que pour tout $x \in H$, $\pi(\mathrm{p}')x$ est G-invariant (en effet il en résultera que $\mathrm{p}' = f^* \mathrm{p}' = f^* \mathrm{p} f$, donc que p' est autoadjoint). Il suffit de montrer que $\pi(\mathrm{p}')x$ est invariant par $\exp(\mathfrak{g}^\lambda)$ pour $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$. On utilise le lemme de Mautner comme dans [BHV], avec une petite subtilité due au fait que la représentation n'est pas isométrique. Montrons par exemple que $\pi(\mathrm{p}')x$ est invariant par $\exp(\mathfrak{g}^\lambda)$ pour $\lambda > 0$. Soit $Y \in \mathfrak{g}^\lambda$. On sait que $\pi(\mathrm{p}')x$ est fixe par R, donc en particulier par a. Il s'agit donc de montrer que

$$\pi(\exp Y)\pi(\mathrm{p}')x - \pi(\mathrm{p}')x = \pi(\exp Y)\pi(a^n)\pi(\mathrm{p}')x - \pi(a^n)\pi(\mathrm{p}')x$$

$$= \pi(a^n)\big(\pi(\exp(ad(a)^{-n}Y)) - 1\big)\pi(\mathrm{p}')x = \pi(a^n)\big(\pi(\exp(e^{-\lambda n}Y)) - 1\big)\pi(\mathrm{p}')x$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

On pose $m = E(\kappa^{-1}\frac{\lambda}{2}n)$, où E désigne la partie entière. Comme $\pi(f)x$ est un vecteur C^∞, il existe $C_0 \in \mathbb{R}_+$ (dépendant de f et de x) tel que $\|(\pi(\exp X) - 1)\pi(f)x\|_H \leq C_0\|X\|_{\mathfrak{g}}$ pour $\|X\|_{\mathfrak{g}} \leq \|Y\|_{\mathfrak{g}}$. Alors

$$\|\pi(a^n)\big(\pi(\exp(e^{-\lambda n}Y)) - 1\big)\pi(\mathrm{p}_m f)x\|_H$$

$$\leq e^{C+s\ell'(a)n}\|\big(\pi(\exp(e^{-\lambda n}Y)) - 1\big)\pi(\mathrm{p}_m f)x\|_H$$

$$= e^{C+s\ell'(a)n}\|\int_R \mathrm{p}_m(g)\pi(g)\big(\pi(\exp(e^{-\lambda n}Ad(g^{-1})Y)) - 1\big)\pi(f)xdg\|_H$$

$$\leq e^{C+s\ell'(a)n}e^{C+s\frac{\lambda}{2}n} \sup_{\ell'(g)\leq\frac{\lambda}{2}n} \|\big(\pi(\exp(e^{-\lambda n}Ad(g^{-1})(Y))) - 1\big)\pi(f)x\|_H.$$

Or pour $\ell'(g) \leq \frac{\lambda}{2}n$ on a $\|e^{-\lambda n}Ad(g^{-1})Y\|_{\mathfrak{g}} \leq e^{-\frac{\lambda}{2}n}\|Y\|_{\mathfrak{g}}$ et donc

$$\|\big(\pi(\exp(e^{-\lambda n}Ad(g^{-1})(Y))) - 1\big)\pi(f)x\|_H \leq e^{-\frac{\lambda}{2}n}C_0\|Y\|_{\mathfrak{g}}.$$

On a donc

$$\|\pi(a^n)\big(\pi(\exp(e^{-\lambda n}Y)) - 1\big)\pi(\mathrm{p}_m f)x\|_H \leq e^{2C+(s(\ell'(a)+\frac{\lambda}{2})-\frac{\lambda}{2})n}C_0\|Y\|_{\mathfrak{g}}$$

et ceci tend vers 0 quand n tend vers l'infini si $s < \frac{\lambda}{2\ell'(a)+\lambda}$.

Ensuite

$$\|\pi(a^n)\big(\pi(\exp(e^{-\lambda n}Y)) - 1\big)\pi((\mathrm{p}' - \mathrm{p}_m f))x\|_H$$

$$\leq e^{C+s\ell'(a)n}(1 + C'')\|\pi((\mathrm{p}' - \mathrm{p}_m f))x\|_H$$

où $C'' = \sup_{t\in[0,1]} \|\pi(\exp(tY))\|$ ne dépend que de Y. Mais

$$\|\pi((\mathrm{p}' - \mathrm{p}_m f))x\|_H \leq C'e^{-tm}\|\pi(f)x\|_H$$

grâce à (ii) du théorème 2.1 (on rappelle que C' et t sont les constantes du théorème 2.1). Au total,

$$\|\pi(a^n)\big(\pi(\exp(e^{-\lambda n}Y)) - 1\big)\pi((\mathrm{p}' - \mathrm{p}_m f))x\|_H$$

$$\leq e^{C+s\ell'(a)n}(1 + C'')C'e^{-tm}\|\pi(f)x\|_H,$$

et si $s < \frac{\kappa^{-1}t\lambda}{2\ell'(a)}$, ceci tend vers 0 quand n tend vers l'infini. $\square$

On peut adapter l'argument au cas non-archimédien.

Corollaire 4.2 *Soit G un groupe algébrique presque simple sur un corps local non-archimédien F. Si $\mathfrak{g}$ contient $sl_3(F)$, G a la propriété (T) renforcée.*

En effet G contient le quotient de $SL_3(F)$ par un sous-groupe central fini (voir le lemme III.5.2 et le théorème III.5.3 de [Mar91] pour les détails). On répète l'argument précédent avec un élément de $G(F)$ qui est l'image d'une matrice diagonale de $SL_3(F)$ dont l'un des coefficients a un module strictement supérieur à 1. $\square$

On montre de la même façon que les groupes comme dans le corollaire 4.2 ont la propriété (T) renforcée banachique relativement à (p, r), où le corps résiduel de F a p^r éléments.

Montrons maintenant que la propriété (T) renforcée est héritée par les réseaux cocompacts.

Proposition 4.3 *Soit G un groupe localement compact et Γ un sous-groupe discret cocompact de G. Si G a la propriété (T) renforcée, Γ l'a également.*

Comme $Sp(n, 1)$ et $\mathbb{F}_{4(-20)}$ possèdent des réseaux cocompacts, qui sont hyperboliques, ceux-ci n'ont pas la propriété (T) renforcée et donc $Sp(n, 1)$ et $\mathbb{F}_{4(-20)}$ non plus. Ce dernier résultat est bien connu de Cowling et Julg.

Montrons la proposition 4.3. L'existence de Γ implique que G est unimodulaire. Soit dg la mesure de Haar sur G telle que G/Γ soit de mesure 1. Comme Γ est cocompact, il existe $f \in C_c(G)$, positive et telle que $\sum_{\gamma\in\Gamma} f(g\gamma) = 1$ pour tout $g \in G$ (ceci implique que $\int_G f(g)dg = 1$). Soit $X = \mathrm{Supp}(f)$. Soit ℓ une longueur sur Γ et ℓ' la longueur sur G définie par $\ell'(g) = \max\{\ell(\gamma), gX \cap X\gamma \neq \emptyset\}$. Alors si $\mathrm{p}' \in \mathcal{C}_{\ell'}(G)$ vérifie les conditions de la définition 0.1, on peut en déduire un idempotent $\mathrm{p} \in \mathcal{C}_\ell(\Gamma)$ vérifiant les conditions de la définition 0.1. Si p' est la limite dans $\mathcal{C}_{\ell'}(G)$ de $\mathrm{p}'_n \in C_c(G)$, alors p sera la limite dans $\mathcal{C}_\ell(\Gamma)$ de la suite $\mathrm{p}_n \in C_c(\Gamma)$ définie par la formule suivante : $\mathrm{p}_n(\gamma) = \int_{G\times G} \mathrm{p}'_n(g_1)f(g_2\gamma)f(g_1g_2)dg_1dg_2$.

Pour justifier ceci on remarque que pour tout $(H, \pi) \in \mathcal{E}_{\Gamma,\ell}$, on peut construire une représentation induite $(H', \pi') \in \mathcal{E}_{G,\ell'}$ de la façon suivante : H' est le complété de l'espace des applications continues $s : G \to H$ vérifiant $s(g\gamma) = \pi(\gamma^{-1})s(g)$ pour la norme de Hilbert $\|s\|^2 = \int_G f(g)\|s(g)\|_H^2 dg$. De plus $\pi(\mathrm{p}_n) : H \to H$ est égal à $\beta \circ \pi'(\mathrm{p}'_n) \circ \alpha$, où $\alpha : H \to H'$ est défini par $\alpha(x) = (g \mapsto \sum_{\gamma\in\Gamma} f(g\gamma)\pi(\gamma)x)$, et $\beta : H' \to H$ est donné par $\beta(s) = \int_G f(g)s(g)dg$. Les normes de α et β sont bornées indépendamment de (H, π), et l'image par α (resp. β) d'un vecteur Γ-invariant (resp. G-invariant) est G-invariant (resp. Γ-invariant) et si $x \in H$ est Γ-invariant, $\beta \circ \alpha(x) = x$.

Enfin on calcule $\mathrm{p}_n^*(\gamma) = \int_{G\times G} {\mathrm{p}'_n}^*(g_1)f(g_2\gamma^{-1})f(g_1^{-1}g_2)dg_1dg_2 = \int_{G\times G} {\mathrm{p}'_n}^*(g_1)f(g_3\gamma)f(g_3g_2)dg_1dg_2$ par le changement de variable $g_3 = g_1^{-1}g_2\gamma^{-1}$, donc comme p' est autoadjoint, p l'est également. $\square$

Proposition 4.4 *Soit G un groupe localement compact et Γ un sous-groupe discret cocompact de G. Soit p un nombre premier et $r \in \mathbb{N}^*$. Si G a la propriété (T) renforcée banachique relativement à (p,r), Γ aussi.*

La démonstration est exactement la même. Pour (E,π) dans la classe $\mathcal{E}^{p,r,\alpha}_{\Gamma,\ell}$, on définit la représentation induite E' comme le complété de l'espace des applications continues $s : G \to E$ vérifiant $s(g\gamma) = \pi(\gamma^{-1})s(g)$ pour la norme $\|s\|^2 = \int_G f(g)\|s(g)\|^2_E dg$. Le seul point nouveau (mais évident) est que E' appartient à la classe $\mathcal{E}^{p,r,\alpha}$ et donc à la classe $\mathcal{E}^{p,r,\alpha}_{G,\ell'}$. □

Pour des réseaux non cocompacts, il vaut mieux se limiter aux representations isométriques.

Nous dirons qu'un groupe a la propriété (T) banachique relativement à (p,r) si pour tout $\alpha > 0$ il existe un idempotent autoadjoint p dans $\mathcal{C}^{p,r,\alpha}_0(G)$ tel que pour toute représentation $(E,\pi) \in \mathcal{E}^{p,r,\alpha}_{G,0}$, $\pi(\mathrm{p})$ ait pour image le sous-espace de E formé des vecteurs G-invariants.

Proposition 4.5 *Soit G un groupe localement compact et Γ un sous-groupe discret de covolume fini de G. Soit p un nombre premier et $r \in \mathbb{N}^*$. Si G a la propriété (T) banachique relativement à (p,r), Γ aussi.*

On reprend les notations de la preuve de la proposition 4.3. Soit $f \in L^1(G)$, positive et telle que $\sum_{\gamma\in\Gamma} f(g\gamma) = 1$ pour presque tout $g \in G$ (ceci implique que $\int_G f(g)dg = 1$). Alors si $\mathrm{p}' \in \mathcal{C}^{p,r,\alpha}_0(G)$ vérifie les conditions de la définition 0.2, on peut en déduire un idempotent $\mathrm{p} \in \mathcal{C}^{p,r,\alpha}_0(\Gamma)$ vérifiant les conditions de la définition 0.2. Si p' est la limite dans $\mathcal{C}^{p,r,\alpha}_0(G)$ de $\mathrm{p}'_n \in C_c(G)$, alors p sera la limite dans $\mathcal{C}^{p,r,\alpha}_0(\Gamma)$ de la suite $\mathrm{p}_n \in C_c(\Gamma)$ définie par la formule suivante : $\mathrm{p}_n(\gamma) = \int_{G\times G} \mathrm{p}'_n(g_1)f(g_2\gamma)f(g_1g_2)dg_1dg_2$.

Pour justifier ceci on remarque pour tout $(E,\pi) \in \mathcal{E}^{p,r,\alpha}_{\Gamma,0}$, on peut construire une représentation induite $(E',\pi') \in \mathcal{E}^{p,r,\alpha}_{G,0}$ de la façon suivante : E' est le complété de l'espace des applications continues $s : G \to E$ vérifiant $s(g\gamma) = \pi(\gamma^{-1})s(g)$ pour la norme $\|s\|^2 = \int_{G/\Gamma} \|s(g)\|^2_E dg$. De plus $\pi(\mathrm{p}_n) : E \to E$ est égal à $\beta \circ \pi'(\mathrm{p}'_n) \circ \alpha$, où $\alpha : E \to E'$ est défini par $\alpha(x) = (g \mapsto \sum_{\gamma\in\Gamma} f(g\gamma)\pi(\gamma)x)$, et $\beta : E' \to E$ est donné par $\beta(s) = \int_G f(g)s(g)dg$. Les normes de α et β sont bornées indépendamment de (E,π), et l'image par α (resp. β) d'un vecteur Γ-invariant (resp. G-invariant) est G-invariant (resp. Γ-invariant) et si $x \in E$ est Γ-invariant, $\beta \circ \alpha(x) = x$.

Le même calcul qu'à la fin de la démonstration de la proposition 4.3 montre que p est auto-adjoint. □

5 Familles d'expanseurs

Nous présentons ici une conséquence du théorème 3.2. Cette conséquence nous a été suggérée par Assaf Naor.

Soit F un corps local non-archimédien. On écrit le cardinal du corps résiduel sous la forme p^r, avec p premier. Soit Γ un réseau de $SL_3(F)$. D'après le théorème 3.2 et la proposition 4.5, Γ a la propriété (T) banachique relativement à p, r.

Soit $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante, d'intersection triviale, de sous-groupes d'indice fini de Γ (on sait qu'une telle suite existe). On choisit un système fini symétrique de générateurs de Γ. Cela munit $X_i = \Gamma/\Gamma_i$ d'une structure de graphe et on note d_i la métrique associée. Comme Γ a la propriété (T) usuelle, il est bien connu (depuis [Mar73]) que les X_i forment une suite d'expanseurs.

On dit que la suite X_i se plonge uniformément dans un espace de Banach E s'il existe une fonction $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ tendant vers $+\infty$ à l'infini et des applications 1-lipschitziennes $f_i : X_i \to E$ telles que $\|f_i(x) - f_i(y)\|_E \geq \rho(d_i(x, y))$ pour $i \in \mathbb{N}$ et $x, y \in X_i$.

Théorème 5.1 *La suite d'expanseurs (X_i, d_i) n'admet aucun plongement uniforme dans un espace de Banach de la classe $\mathcal{E}^{p,r,\alpha}$ avec $\alpha > 0$, et en particulier dans un espace de Banach uniformément convexe.*

En fait aucune sous-suite n'admet un tel plongement uniforme, et on a même le résultat plus précis suivant. Soit $\alpha > 0$ et E un espace de Banach de la classe $\mathcal{E}^{p,r,\alpha}$.

Proposition 5.2 *Il existe une constante C dépendant seulement de α telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, et pour toute application $f : X_i \to E$, on ait*

$$\frac{1}{(\sharp X_i)^2} \sum_{x,y\in X_i} \|f(x) - f(y)\|^2 \leq C \frac{1}{\sharp X_i} \sum_{x,y \text{ voisins dans } X_i} \|f(x) - f(y)\|^2.$$

Il est bien connu que la proposition implique le théorème. Si la suite (X_i, d_i) admettait un plongement uniforme dans un espace de Banach E de la classe $\mathcal{E}^{p,r,\alpha}$, on aurait des applications 1-lipschitziennes $f_i : X_i \to E$ et une application $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ tendant vers $+\infty$ en $+\infty$ telles que pour $i \in \mathbb{N}$ et $x, y \in X_i$ on ait $\|f_i(x) - f_i(y)\|_E \geq \rho(d(x, y))$. Or $\frac{1}{(\sharp X_i)^2} \sum_{x,y\in X_i} \rho(d(x, y))^2$ tend vers $+\infty$ quand i tend vers l'infini, car, pour tout entier k, $\sup_i \frac{1}{\sharp X_i} \sharp\{(x, y) \in (X_i)^2, d(x, y) \leq k\}$ est fini, et $\sharp X_i$ tend vers l'infini quand i tend vers l'infini. $\square$

Il nous reste à montrer la proposition. On note E_i l'espace des fonctions de X_i dans E, muni de la norme $\|f\|^2_{E_i} = \frac{1}{\sharp X_i} \sum_{x\in X_i} \|f(x)\|^2_E$. Il est évident que l'espace de Banach E_i appartient à la classe $\mathcal{E}^{p,r,\alpha}_{\Gamma,0}$ des représentations continues isométriques de Γ dans des espaces de Banach de la classe $\mathcal{E}^{p,r,\alpha}$. On rappelle que $\mathcal{C}^{p,r,\alpha}_0(\Gamma)$ est l'algèbre de Banach complétion de $C_c(\Gamma)$ pour la norme $\|f\| = \sup_{(E,\pi)\in\mathcal{E}^{p,r,\alpha}_{\Gamma,0}} \|\pi(f)\|_{\mathcal{L}(E)}$. Comme Γ a la propriété (T) banachique relativement à (p,r), il existe un idempotent $\mathrm{p} \in \mathcal{C}^{p,r,\alpha}_0(\Gamma)$ tel que pour toute représentation (E,π) dans la classe $\mathcal{E}^{p,r,\alpha}_{\Gamma,0}$, $\pi(\mathrm{p})$ ait pour image le sous-espace de E formé des vecteurs Γ-invariants.

Les vecteurs Γ-invariants de E_i sont exactement les fonctions constantes de X_i dans E. Pour toute fonction $f \in E_i$, on a $\mathrm{p}f = m_f$, où $m_f = \frac{1}{\sharp X_i}\sum_{x\in X_i} f(x) \in E$ est la moyenne de f, considérée comme fonction constante sur X_i. Il est bien connu que

$$\frac{1}{(\sharp X_i)^2}\sum_{x,y\in X_i}\|f(x)-f(y)\|^2 = \frac{2}{(\sharp X_i)}\sum_{x\in X_i}\|f(x)-m_f\|^2 = 2\|f-\mathrm{p}f\|^2_{E_i}.$$

Soit $\mathrm{p}_1 \in C_c(\Gamma)$, d'intégrale 1, tel que $\|\mathrm{p}-\mathrm{p}_1\|_{\mathcal{C}^{p,r,\alpha}_0(\Gamma)} \leq \frac{1}{2}$. Alors $\|\mathrm{p}f - \mathrm{p}_1 f\|_{E_i} = \|(\mathrm{p}-\mathrm{p}_1)(f-m_f)\|_{E_i} \leq \frac{1}{2}\|f-m_f\|_{E_i} = \frac{1}{2}\|f-\mathrm{p}f\|_{E_i}$. D'où $\|f-\mathrm{p}f\|_{E_i} \leq 2\|f-\mathrm{p}_1 f\|_{E_i}$. Enfin on voit facilement qu'il existe une constante C_1 (dépendant seulement de p_1) telle que $\|f-\mathrm{p}_1 f\|^2_{E_i} \leq \frac{C_1}{\sharp X_i}\sum_{x,y \text{ voisins dans } X_i}\|f(x)-f(y)\|^2$. $\square$

Références

[BFGM] U. Bader, A. Furman, T. Gelander et N. Monod, Property (T) and rigidity for actions on Banach spaces, Acta Mathematica 198 (2007), 57–105

[BHV] B. Bekka, P. de la Harpe et A. Valette, Kazhdan's property (T), http ://www.mmas.univ-metz.fr/∼bekka/

[CDP90] M. Coornaert, T. Delzant et A. Papadopoulos, Les groupes hyperboliques de Gromov. *Géométrie et théorie des groupes*, *Lecture Notes in Mathematics* 1441, Springer-Verlag, 1990.

[Enf72] P. Enflo, Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm, Israel Journal of Math 13 (1972), 281–288

[GdlH90] E. Ghys et P. de la Harpe (éditeurs), Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov, *Progress in Mathematics* 83, Birkhäuser, 1990

[HT92] R. Howe et E. Tan, Non-Abelian Harmonic Analysis, Springer-Verlag, 1992.

[Jam64] R. James, Uniformly non-square Banach spaces, Annals of Math 80 (3) (1964), 542–550

[Jam74] R. James, A nonreflexive Banach space that is uniformly nonoctahedral, Israel J. Math 18 (1974), 145–155

[KY06] G. Kasparov et G. Yu, The coarse geometric Novikov conjecture and uniform convexity, Advances in Mathematics 206 (1) (2006), 1–56

[Kri79] J.-L. Krivine, Constantes de Grothendieck et fonctions de type positif sur les sphères, Advances in Mathematics 31 (1979), 16–30

[Laf02] V. Lafforgue, Banach KK-theory and the Baum-Connes conjecture, Proceedings of the ICM 2002 (Beijing), vol II, 795–812

[Mar73] G. Margulis, Explicit construction of expanders, Problemy Peredaci Informacii 9 (4) (1973), 71–80

[Mar91] G. Margulis, Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 17, Springer-Verlag, 1991