Propriété (T) renforcée banachique et transformation de Fourier rapide

Vincent Lafforgue*

21 octobre 2009

Titre en anglais Strong Banach Property (T) and Fast Fourier Transform.

Résumé en anglais Let F be a non archimedean local field and let G be an algebraic connected almost F-simple group over F, whose Lie algebra contains $sl_3(F)$. We prove that $G(F)$ has strong Banach property (T) in a stronger sense than in the article "Un renforcement de la propriété (T)", published in Duke Math. Journal. As a consequence, families of expanders built from a lattice in $G(F)$ do not embed uniformly in Banach spaces of type > 1. Also any affine isometric action of $G(F)$ on a Banach space of type > 1 has a fixed point.

Cet article complète l'article [Laf08], où nous avons montré en particulier que si F est un corps local non archimédien, dont le corps résiduel a pour cardinal p^r (avec p un nombre premier et $r \in \mathbb{N}^*$), et G est un groupe algébrique connexe presque F-simple sur F dont l'algèbre de Lie contient $sl_3(F)$, $G(F)$ a la propriété (T) renforcée banachique au sens où, pour tout $\alpha > 0$, la représentation triviale est isolée parmi les représentations isométriques (ou dont la croissance est contrôlée par une exponentielle assez petite) dans les espaces de Banach de la classe $\mathcal{E}^{p,r,\alpha}$ définie comme suit. On note $\mathcal{E}^{p,r,\alpha}$ la classe des espaces de Banach tels que pour tous $(\xi_x)_{x\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r}$ dans E, on ait, en notant $\widehat{(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r}$ le groupe des caractères de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$,

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\chi\in\widehat{(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r}} \Big\| \mathop{\mathbb{E}}_{x\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r} \chi(x)\xi_x \Big\|_E^2 \leq e^{-\alpha}\Big(\mathop{\mathbb{E}}_{x\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r} \|\xi_x\|_E^2 \Big).$$

*Institut de mathématiques de Jussieu, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris, vlafforg@math.jussieu.fr

Dans cette formule comme dans la suite de l'article, pour tout ensemble fini I, tout espace vectoriel E et toute fonction $f : I \to E$, on note $\mathbb{E}_{x\in I} f(x) = \frac{1}{\sharp I}\sum_{x\in I} f(x)$ l'espérance de f.

On en déduisait dans [Laf08] que si Γ est un réseau de $G(F)$, et si Γ_n est une suite décroissante de sous-groupes d'indice fini de Γ d'intersection triviale, les graphes de Cayley de Γ/Γ_n (associés à un système fini de générateurs de Γ) forment une suite d'expanseurs ne se plongeant uniformément dans aucun espace de Banach appartenant la classe $\cup_{\alpha>0} \mathcal{E}^{p,r,\alpha}$.

Il est vrai que $\cup_{r\in\mathbb{N}^*,\alpha>0} \mathcal{E}^{p,r,\alpha}$ est exactement la classe des espaces de Banach de type >1 (également appelés B-convexes), c'est-à-dire ne contenant pas $(1+\epsilon)$-isométriquement ℓ_1^N pour un certain entier $N>0$ et un certain $\epsilon>0$. Cependant, p et r sont fixés par le corps F et $\cup_{\alpha>0} \mathcal{E}^{p,r,\alpha}$ n'est pas (au moins a priori) la classe des espaces de Banach de type >1. L'énoncé que nous avions obtenu présentait donc un inconvénient majeur : nous ne savions pas construire une suite d'expanseurs ne se plongeant uniformément dans aucun espace de Banach de type >1. Nous avons appris récemment que par des méthodes abstraites Naor et Mendel ont construit une telle suite d'expanseurs.

En fait une petite variation de la preuve de [Laf08] montre que les suites d'expanseurs Γ/Γ_n considérées ci-dessus n'admettent de plongement uniforme dans aucun espace de Banach de type >1. Ce résultat est impliqué par une amélioration de l'énoncé de la propriété (T) renforcée banachique pour $G(F)$, qui est l'objet de cet article. Le titre de cet article vient du fait que je me suis aperçu que les démonstrations de la propriété (T) renforcée banachique pour $SL_3(F)$, dans cet article comme dans [Laf08], utilisaient une variante de la transformation de Fourier rapide.

Dans la suite les espaces de Banach seront des espaces de Banach complexes munis de normes bien précisées (et non pas à équivalence près).

Définition 0.1 *On dira qu'une classe $\mathcal{E}$ d'espaces de Banach est de type >1 si les conditions équivalentes suivantes sont réalisées :*
- *il existe $n\in\mathbb{N}^*$ et $\epsilon>0$ tels que tout espace de Banach E dans $\mathcal{E}$ ne contienne pas $(1+\epsilon)$-isométriquement ℓ_1^n,*
- *il existe $p>1$ (appelé le type) et $T\in\mathbb{R}_+$ tels que pour E dans $\mathcal{E}$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $x_1,\dots,x_n\in E$, on ait*

$$\Big(\mathbb{E}_{\epsilon_i=\pm 1}\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\|_E^2\Big)^{\frac12} \le T\Big(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_E^p\Big)^{\frac1p}. \quad (1)$$

Dans cette définition on pourrait dire "uniformément de type >1" au lieu de dire "de type >1". On renvoie à [Mau03] pour une revue sur la notion de type. On rappelle simplement que ℓ_1^n désigne $\mathbb{C}^n$ muni de la norme ℓ_1 et qu'un espace de Banach contient $(1+\epsilon)$-isométriquement ℓ_1^n s'il existe $i : \ell_1^n \to E$ tel que $\|x\| \leq \|i(x)\| \leq (1+\epsilon)\|x\|$ pour tout $x \in \ell_1^n$.

On dit qu'une classe $\mathcal{E}$ est stable par dualité si pour tout E dans $\mathcal{E}$, E^* est dans $\mathcal{E}$. On dit qu'une classe $\mathcal{E}$ est stable par conjugaison complexe si pour tout E dans $\mathcal{E}$, $\bar{E}$ est dans $\mathcal{E}$. Toute classe de type >1 est incluse dans une classe de type >1 qui est stable par dualité et par conjugaison complexe.

Soit G un groupe localement compact, et dg une mesure de Haar à gauche, qui munit $C_c(G)$ d'une structure de $\mathbb{C}$-algèbre, par convolution. On appelle longueur sur G une fonction continue $\ell : G \to \mathbb{R}_+$ vérifiant $\ell(g^{-1}) = \ell(g)$ et $\ell(g_1g_2) \leq \ell(g_1) + \ell(g_2)$ pour $g, g_1, g_2 \in G$.

Si ℓ est une longueur sur G, et $\mathcal{E}$ est une classe d'espace de Banach, on note $\mathcal{E}_{G,\ell}$ la classe des représentations continues (E,π) de G dans un espace de Banach E de la classe $\mathcal{E}$ telles que $\|\pi(g)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq e^{\ell(g)}$ pour tout $g \in G$. On note $\mathcal{C}_\ell^{\mathcal{E}}(G)$ l'algèbre de Banach complétion de $C_c(G)$ pour la norme $\|f\| = \sup_{(E,\pi)\in\mathcal{E}_{G,\ell}} \|\pi(f)\|_{\mathcal{L}(E)}$. Si $\mathcal{E}$ est stable par dualité et par conjugaison complexe, $\mathcal{C}_\ell^{\mathcal{E}}(G)$ est une algèbre de Banach munie de la conjugaison complexe $\int_G f(g)e_g dg \mapsto \int_G \bar{f}(g)e_g dg$ et de l'involution habituelle $\int_G f(g)e_g dg \mapsto \int_G e_{g^{-1}}\bar{f}(g)dg$, car pour tout $(E,\pi) \in \mathcal{E}_{G,\ell}$, la représentation conjuguée $(\bar{E}, g \mapsto \bar{\pi}(g))$, la représentation contragrédiente $(E^*, g \mapsto {}^t\pi(g^{-1}))$ et la représentation contragrédiente conjuguée $(\bar{E}^*, g \mapsto {}^t\bar{\pi}(g^{-1}))$ appartiennent aussi à $\mathcal{E}_{G,\ell}$.

Définition 0.2 *Soit G un groupe localement compact. On dit que G a la propriété (T) renforcée banachique si pour toute classe $\mathcal{E}$ de type >1 et stable par dualité et par conjugaison complexe, et pour toute longueur ℓ sur G, il existe $s>0$, tel que pour tout $C \in \mathbb{R}_+$, il existe un idempotent réel et autoadjoint p dans $\mathcal{C}_{C+s\ell}^{\mathcal{E}}(G)$ tel que pour toute représentation $(E,\pi) \in \mathcal{E}_{G,C+s\ell}$, $\pi(\mathrm{p})$ ait pour image le sous-espace de E formé des vecteurs G-invariants.*

Remarque. Dans les conditions de la définition, comme p est invariant par $\int_G f(g)e_g dg \mapsto \int_G e_{g^{-1}} f(g)dg$ (qui est la composée de la conjugaison complexe et de l'involution habituelle), pour $(E,\pi) \in \mathcal{E}_{G,C+s\ell}$, $\mathrm{Ker}\pi(p)$ est l'orthogonal de $\mathrm{Im}{}^t\pi(p) = (E^*)^G$. On en déduit à la fois que p est déterminé de manière unique et que c'est un élément central de $\mathcal{C}_{C+s\ell}^{\mathcal{E}}(G)$.

Remarque. Soit ℓ une longueur sur G et $\mathcal{E}$ une classe d'espaces de Banach telle que $\mathcal{C}_\ell^{\mathcal{E}}(G)$ possède un idempotent p tel que pour toute représentation $(E,\pi) \in \mathcal{E}_{G,\ell}$, $\pi(\mathrm{p})$ ait pour image le sous-espace de E formé des vecteurs G-invariants. Supposons que G n'est pas compact et que la classe $\mathcal{E}$ est définie par une super-propriété (voir le paragraphe 2 de [Mau03] pour cette notion). Alors la classe $\mathcal{E}$ est de type >1. En effet pour tout morphisme surjectif

$E \to F$ dans la catégorie $\mathcal{E}_{G,\ell}$ (F étant muni de la norme quotient de celle de E), $E^G \to F^G$ doit être surjectif puisque E^G et F^G sont les sous-espaces de E et F images de l'idempotent p. Or le morphisme $L^1(G) \to \mathbb{C}, f \mapsto \int_G f dg$ est surjectif mais comme G n'est pas compact, $L^1(G)$ n'a pas de vecteur G-invariant non nul (on précise que G agit sur $L^1(G)$ par la représentation régulière gauche). Donc $L^1(G)$ ne peut pas appartenir à la classe $\mathcal{E}$. Comme la classe $\mathcal{E}$ est définie par une super-propriété, elle est de type >1. Donc, quel que soit le groupe G non compact, on ne peut espérer un énoncé plus fort que celui de la définition ci-dessus, si la classe $\mathcal{E}$ est définie par une super-propriété.

Le but de cet article est de montrer le résultat suivant.

Théorème 0.3 *Soit F un corps local non archimédien et G un groupe algébrique connexe presque F-simple sur F dont l'algèbre de Lie contient $sl_3(F)$. Alors $G(F)$ a la propriété (T) renforcée banachique.*

On montre comme dans [Laf08] que la propriété (T) renforcée banachique est héritée par les réseaux cocompacts. Pour les réseaux non cocompacts cela est encore vrai si on se limite aux représentations isométriques, comme dans la définition suivante.

Définition 0.4 *Soit G un groupe localement compact. On dit que G a la propriété (T) banachique si pour toute classe $\mathcal{E}$ de type >1 et stable par dualité et par conjugaison complexe, il existe un idempotent réel et autoadjoint* p *dans $\mathcal{C}_0^{\mathcal{E}}(G)$ tel que pour toute représentation $(E,\pi) \in \mathcal{E}_{G,0}$, $\pi(\mathrm{p})$ ait pour image le sous-espace de E formé des vecteurs G-invariants.*

La propriété (T) renforcée banachique implique évidemment la propriété (T) banachique. D'autre part on montre comme dans [Laf08] que la propriété (T) banachique est héritée par tous les réseaux.

On en déduit l'énoncé suivant.

Corollaire 0.5 *Soit F un corps local non archimédien et G un groupe algébrique connexe presque F-simple sur F dont l'algèbre de Lie contient $sl_3(F)$. Soit Γ un réseau de $G(F)$ et Γ_n une suite de sous-groupes d'indice fini de Γ telle que les indices tendent vers l'infini. On fixe un système fini de générateurs de Γ. Alors les graphes de Cayley de Γ/Γ_n forment une suite d'expanseurs ne se plongeant uniformément dans aucun espace de Banach de type >1, plus précisément pour tout espace de Banach E de type >1 il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute fonction $f : \Gamma/\Gamma_n \to E$ de moyenne nulle et 1-lipschitzienne, $\underset{x \in \Gamma/\Gamma_n}{\mathbb{E}} \|f(x)\|_E^2 \leq C$.*

Lors d'une discussion avec Uri Bader et inspiré par une idée de Bader et Gelander formulée dans la remarque 3.3 de [Gel08], je me suis aperçu que la propriété (T) renforcée banachique implique la propriété (F) banachique au sens suivant.

Définition 0.6 *Soit G un groupe localement compact. On dit que G a la propriété (F) banachique si toute action affine isométrique et continue de G sur un espace de Banach de type > 1 admet un point fixe.*

On en déduit le corollaire suivant, qui renforce la remarque 1.7 (2) de [BFGM07] ainsi que des cas particuliers du théorème B de [BFGM07] et du théorème 3.1 de [Gel08].

Corollaire 0.7 *Soit F un corps local non archimédien et G un groupe algébrique connexe presque F-simple sur F dont l'algèbre de Lie contient $sl_3(F)$. Alors G a la propriété (F) banachique.*

Nous rappelons que les problèmes suivants restent ouverts.
a) Montrer que pour tout corps local non archimédien F, $Sp_4(F)$ a la propriété (T) renforcée banachique. Cela impliquerait alors que tous les groupes algébriques presque simples sur un corps local non archimédien, de rang déployé ≥ 2, possèdent la propriété (T) renforcée banachique.
b) Montrer la propriété (T) renforcée banachique pour les groupes algébriques presque simples sur un corps local archimédien, de rang déployé ≥ 2, en particulier pour $SL_3(\mathbb{R})$. En effet dans [Laf08] nous ne montrons que la variante hilbertienne de la propriété (T) renforcée pour $SL_3(\mathbb{R})$. Avec les notations du paragraphe 2 de [Laf08] la propriété (T) renforcée banachique pour $SL_3(\mathbb{R})$ serait impliquée par l'énoncé suivant : pour toute classe $\mathcal{E}$ de type > 1, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $C \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $\epsilon \in]-1,1[$ et tout E dans la classe $\mathcal{E}$, on ait

$$\left\|(T_0 - T_\epsilon) \otimes 1\right\|_{\mathcal{L}(L^2(S^2,E))} \leq C|\epsilon|^\alpha.$$

c) Montrer que les suites de graphes de Ramanujan obtenues en quotientant un sous-groupe arithmétique cocompact de $SL_2(\mathbb{R})$ par des sous-groupes arithmétiques d'indice fini n'admettent pas de plongement uniforme dans des espaces Banach de type > 1. Cette question est difficile car $SL_2(\mathbb{R})$ n'a pas la propriété (T) et la raison pour laquelle ces graphes sont des expanseurs est que $SL_2(\mathbb{R})$ a la propriété (τ), c'est-à-dire que la représentation triviale est isolée parmi les $L^2(SL_2(\mathbb{R})/\Gamma)$ avec Γ un groupe arithmétique. Cependant nous ne savons pas si pour $\mathcal{E}$ une classe de type > 1, la représentation triviale de $SL_2(\mathbb{R})$ est isolée parmi les $L^2(SL_2(\mathbb{R})/\Gamma, E)$ avec Γ un groupe arithmétique et $E \in \mathcal{E}$. En effet les preuves de la propriété (τ) utilisent de

l'arithmétique. La preuve la plus élémentaire du fait que ces graphes sont des expanseurs est celle expliquée dans [DSV03] mais elle repose néanmoins sur des calculs de traces et nous ne savons pas comment l'adapter à coefficients dans des espaces de Banach de type >1 (ou même uniformément convexes).
d) Montrer que toutes les suites d'expanseurs considérées ci-dessus n'admettent pas de plongement uniforme dans des espaces de Banach de cotype fini (voir le paragraphe 3 de [Pis08] pour une discussion sur ce problème).

Je remercie Uri Bader, Assaf Naor et Gilles Pisier pour des discussions qui sont à l'origine non seulement de cet article mais aussi de [Laf08]. Je remercie Jean-François Mestre pour des discussions sur la transformation de Fourier rapide. L'idée de l'amélioration que cet article apporte à [Laf08] a été trouvée en préparant un exposé pour le Séminaire d'Analyse Fonctionnelle de l'Institut de Mathématiques de Jussieu, dont je remercie les organisateurs.

1 Rappels sur la transformation de Fourier rapide

On rappelle le cadre général de la transformation de Fourier rapide, en suivant des notes de cours de Jean-François Mestre.

Soit G un groupe abélien fini. On rappelle que la transformation de Fourier $T_G : \ell^2(G) \to \ell^2(\hat{G})$ est donnée par $T_G f(\chi) = \mathbb{E}_{x \in G} \chi(x) f(x)$. Cette normalisation, où T_G n'est pas une isométrie, n'est pas habituelle mais elle nous convient mieux pour la suite.

Soit H un sous-groupe de G. Le principe de la transformation de Fourier rapide, comme il est rappelé dans les notes de Jean-François Mestre, consiste à écrire T_G comme le produit de deux matrices par blocs dont les blocs sont essentiellement des matrices T_H et $T_{G/H}$. L'idée est de décomposer la moyenne sur $x \in G$ en une moyenne sur les classes modulo H, puis une moyenne sur G/H. On choisit une section $\sigma : G/H \to G$ de la projection $\pi : G \to G/H$, c'est-à-dire que $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_{G/H}$. Alors $T_G = T_{2,G,H} \circ T_{1,G,H}$, où $T_{1,G,H} : \ell^2(G) \to \ell^2((G/H) \times \hat{H})$ est donné par

$$f \mapsto \Big[(x', \chi') \mapsto \mathbb{E}_{x, \pi(x) = x'} \chi'(x - \sigma(x')) f(x)\Big]$$

et $T_{2,G,H} : \ell^2((G/H) \times \hat{H}) \to \ell^2(\hat{G})$ est donné par

$$g \mapsto \Big[\chi \mapsto \mathbb{E}_{x' \in G/H} \chi(\sigma(x')) g(x', \chi_{|H})\Big].$$

On voit que $T_{1,G,H}$ est diagonal par blocs : les blocs sont indexés par G/H et sont égaux à T_H. De même $T_{2,G,H}$ est diagonal par blocs : les blocs sont indexés par $\hat{H}$ et sont obtenus à partir de $T_{G/H}$ en multipliant les colonnes de cette matrice par des nombres complexes de modules 1 : plus précisément le choix d'une section $\sigma' : \hat{H} \to \hat{G}$ de la restriction $\hat{G} \to \hat{H}$ identifie le bloc de $T_{2,G,H}$ indexé par $\chi' \in \hat{H}$ à la matrice obtenue à partir de $T_{G/H}$ en multipliant la colonne indexée par $x' \in G/H$ par l'unité $\sigma'(\chi')(\sigma(x'))$.

Si A est une matrice finie, dont les lignes et les colonnes sont indexées par des ensembles finis I et J, et E un espace de Banach, on a l'opérateur $A \otimes 1_E : \ell^2(J,E) \to \ell^2(I,E)$, où $\ell^2(I,E)$ est l'espace des fonctions de I dans E muni de la norme $\|f\| = \sqrt{\mathbb{E}_{x\in I}\|f(x)\|_E^2}$ et de même pour J. Il est clair que la norme de $A \otimes 1_E$ ne change pas si on multiplie A par une unité ou même si on multiplie les lignes ou les colonnes de A par des unités. Dans toute la suite de l'article (sauf dans les inégalités suivantes où nous voulons être plus explicites), pour alléger les notations nous noterons $\|A \otimes 1_E\|$ la norme d'opérateur de $A \otimes 1_E : \ell^2(J,E) \to \ell^2(I,E)$.

On a donc pour tout espace de Banach E,

$$\|T_{1,G,H} \otimes 1_E\|_{\mathcal{L}(\ell^2(G,E),\ell^2((G/H)\times\hat{H},E))} = \|T_H \otimes 1_E\|_{\mathcal{L}(\ell^2(H,E),\ell^2(\hat{H},E))}$$

$$\text{et} \quad \|T_{2,G,H} \otimes 1_E\|_{\mathcal{L}(\ell^2((G/H)\times\hat{H},E),\ell^2(\hat{G},E))} = \|T_{G/H} \otimes 1_E\|_{\mathcal{L}(\ell^2(G/H,E),\ell^2(\widehat{G/H},E))}.$$

On en déduit la proposition suivante, où l'on a remplacé la chaîne de longueur 2 de groupes abéliens finis $0 \subset H \subset G$ par une chaîne de longueur quelconque $0 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = G$.

Proposition 1.1 *Pour tout espace de banach E,*

$$\|T_G \otimes 1_E\|_{\mathcal{L}(\ell^2(G,E),\ell^2(\hat{G},E))} \leq \prod_{i=1}^{n} \|T_{(G_i/G_{i-1})} \otimes 1_E\|_{\mathcal{L}(\ell^2((G_i/G_{i-1}),E),\ell^2((\widehat{G_i/G_{i-1}}),E))}.$$

En informatique l'intérêt de la transformation de Fourier est de réduire le temps de calcul. Prenons par exemple $G = \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$. Le nombre d'opérations pour un calcul brutal de l'image par T_G d'une fonction donnée dans $\ell^2(G)$ est 2^{2n} alors que la décomposition de T_G en un produit de n matrices par blocs (dont les blocs sont de taille 2×2), qui est associé à la chaîne $0 = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = G$ avec $G_i = 2^{n-i}\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$, permet un calcul avec $O(n2^n)$ opérations.

2 Transformation de Fourier et type

Nous rappelons les liens entre le type et la norme des opérateurs T_G considérés dans le paragraphe précédent. D'abord il est évident que pour tout groupe abélien fini G et pour tout espace de Banach E on a $\|T_G \otimes 1_E\| \leq 1$, puisque dans la matrice de T_G la somme des valeurs absolues des coefficients sur une ligne ou une colonne est égale à 1 (la norme régulière de T_G, au sens de [Pis08], est donc égale à 1). D'autre part $\|T_G \otimes 1_{\ell^1(G)}\| = 1$ car le vecteur $(x,y) \mapsto \delta_{x,y}$ de $\ell^2(G, \ell^1(G))$ est de norme 1 (puisque la norme ℓ^2 est définie par une moyenne et la norme ℓ^1 par une somme) et son image est aussi de norme 1. Donc si $\mathcal{E}$ est une classe d'espaces de Banach définie par une super-propriété on ne peut espérer avoir $\sup_{E \in \mathcal{E}} \|T_G \otimes 1\| < 1$ que si la classe $\mathcal{E}$ est de type > 1. La proposition suivante est le théorème 1 de [Bou82] (plus la remarque 1 à la fin de [Bou82]).

Proposition 2.1 *Si $\mathcal{E}$ est une classe de type > 1 il existe $p > 1$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout groupe compact abélien G, tout espace de Banach E dans la classe $\mathcal{E}$ et toute suite à support fini $(x_\gamma)_{\gamma \in \hat{G}}$ d'éléments de E, on ait, en notant dg la mesure de Haar sur G de masse 1,*

$$\Big(\int_{g \in G} \Big\| \sum_{\gamma \in \hat{G}} x_\gamma \gamma(g) \Big\|_E^2 dg \Big)^{1/2} \leq M \Big(\sum_{\gamma \in \hat{G}} \|x_\gamma\|^p \Big)^{1/p}.$$

Nous n'utiliserons cet énoncé que pour G fini. Nous pouvons supposer $p \in]1,2]$ dans cet énoncé. En remplaçant les sommes par des moyennes, l'inégalité ci-dessus devient

$$\Big(\int_{g \in G} \Big\| \mathop{\mathbb{E}}_{\gamma \in \hat{G}} x_\gamma \gamma(g) \Big\|_E^2 dg \Big)^{1/2} \leq M (\sharp G)^{\frac{1}{p}-1} \Big(\mathop{\mathbb{E}}_{\gamma \in \hat{G}} \|x_\gamma\|^p \Big)^{1/p}.$$

L'inégalité de Hölder montre que pour toute famille $(x_\gamma)_{\gamma \in \hat{G}}$ d'éléments de E on a

$$\Big(\mathop{\mathbb{E}}_{\gamma \in \hat{G}} \|x_\gamma\|^p \Big)^{1/p} \leq \big(\mathop{\mathbb{E}}_{\gamma \in \hat{G}} \|x_\gamma\|^2 \big)^{\frac{1}{2}}.$$

En permutant les rôles de G et $\hat{G}$, nous obtenons donc le corollaire suivant.

Corollaire 2.2 *Si $\mathcal{E}$ est une classe de type > 1 il existe $\epsilon > 0$ et $C \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout groupe abélien fini G et tout espace de Banach E dans la classe $\mathcal{E}$, on ait*

$$\|T_G \otimes 1_E\| \leq C (\sharp G)^{-\epsilon}.$$

Soit F un corps local non archimédien, $\mathcal{O}$ son anneau d'entiers et π une uniformisante de $\mathcal{O}$.

Les deux corollaires suivants sont des conséquences immédiates du corollaire 2.2.

Corollaire 2.3 *Pour toute classe $\mathcal{E}$ de type >1 il existe $h \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 0$ tel que pour tout $E \in \mathcal{E}$, $\|T_{\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}} \otimes 1_E\| \leq e^{-\alpha}$.*

Corollaire 2.4 *Pour toute classe $\mathcal{E}$ de type >1 il existe $C \in \mathbb{R}_+$ et $\beta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $E \in \mathcal{E}$, $\|T_{\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}} \otimes 1_E\| \leq Ce^{-\beta n}$.*

Pour la suite il est intéressant de préciser la relation logique entre les énoncés des corollaires 2.3 et 2.4. Il est clair que l'énoncé du corollaire 2.4 implique celui du corollaire 2.3. Grâce à la transformation de Fourier rapide, et plus précisément grâce à la proposition 1.1, l'énoncé du corollaire 2.3 implique celui du corollaire 2.4. En effet, supposons vrai l'énoncé du corollaire 2.3 et soit h comme dans le corollaire 2.3. Soit $n = ah + b$ avec $b \in \{0, \dots h-1\}$ et $a \in \mathbb{N}$. En considérant la chaîne de sous-groupes

$$0 \subset \pi^{ah}\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O} \subset \pi^{(a-1)h}\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O} \subset \cdots \subset \pi^h\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O} \subset \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O},$$

on voit grâce à la proposition 1.1 que $\|T_{\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}} \otimes 1_E\| \leq \Big(\|T_{\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}} \otimes 1_E\|\Big)^a$. L'énoncé du corollaire 2.4 en résulte, en prenant $\beta = \frac{\alpha}{h}$ et $C = e^{\alpha}$.

3 Une variante de la transformation de Fourier

Le but de ce paragraphe est de montrer le lemme 3.2, qui est une variante du corollaire 2.4 et qui nous sera utile dans le paragraphe suivant. Nous montrons le lemme 3.2 à l'aide d'une variante de la transformation de Fourier rapide, en nous inspirant de l'argument présenté à la fin du paragraphe précédent pour justifier le fait que le corollaire 2.3 implique le corollaire 2.4. La seule nouveauté est que les produits par des racines de l'unité sont remplacés par des translations en une variable auxiliaire t. Si on pouvait décomposer en modes de Fourier en t, le lemme 3.2 résulterait immédiatement du corollaire 2.4, mais une telle décomposition n'est pas envisageable à coefficients dans un espace de Banach car elle gâcherait toutes les estimées.

Soit F un corps local non archimédien, $\mathcal{O}$ son anneau d'entiers et π une uniformisante de $\mathcal{O}$. Soit $\mathcal{E}$ une classe d'espaces de Banach, $h \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 0$ tels que pour tout $E \in \mathcal{E}$, $\|T_{\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}} \otimes 1_E\| \leq e^{-\alpha}$.

Soit χ un caractère non dégénéré de $\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}$, ce qui signifie que la restriction de χ à $\pi^{h-1}\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}$ n'est pas triviale. On rappelle qu'alors le morphisme de groupes abéliens $\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O} \to \widehat{\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}}$ qui à x associe $y \mapsto \chi(xy)$ est un isomorphisme.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq h$.

Définition 3.1 *Pour tout ensemble fini I on note $\ell^2(I \times \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi$ le sous-espace de $\ell^2(I \times \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})$ formé des fonctions telles que $f(x, t + \pi^{n-h}s) = f(x,t)\chi(s)$ pour $x \in I$, $t \in \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}$ et $s \in \mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}$. Pour tout espace de Banach E le sous-espace $\ell^2(I \times \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}, E)_\chi$ de $\ell^2(I \times \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}, E)$ est défini de la même manière et est muni de la norme induite. Si I et J sont des ensembles finis, pour tout opérateur $T : \ell^2(I \times \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi \to \ell^2(J \times \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi$, on note $\|T \otimes 1_E\|$ la norme de $T \otimes 1_E : \ell^2(I \times \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}, E)_\chi \to \ell^2(J \times \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}, E)_\chi$.*

Le choix d'une section de la projection $\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O} \to \mathcal{O}/\pi^{n-h}\mathcal{O}$ identifie $\ell^2(I \times \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi$ à $\ell^2(I \times \mathcal{O}/\pi^{n-h}\mathcal{O})$ ce qui permet de représenter un opérateur $T : \ell^2(I \times \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi \to \ell^2(J \times \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi$ par une matrice A indexée par $J \times \mathcal{O}/\pi^{n-h}\mathcal{O}$ et $I \times \mathcal{O}/\pi^{n-h}\mathcal{O}$, et on a alors $\|T \otimes 1_E\| = \|A \otimes 1_E\|$, où $\|T \otimes 1_E\|$ est comme dans la définition précédente, et $\|A \otimes 1_E\|$ a été défini dans le premier paragraphe.

Dans la suite les ensembles finis I et J seront égaux à $\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}$, $\mathcal{O}/\pi^{n-ih}\mathcal{O} \times \mathcal{O}/\pi^{ih}\mathcal{O}$ ou $\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}$.

Lemme 3.2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq h$, l'opérateur*

$$\begin{array}{rccc} T : & \ell^2(\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O} \times \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi & \to & \ell^2(\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O} \times \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi \\ & (\xi_{x,t})_{x,t \in \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}} & \mapsto & \left(\mathbb{E}_{x \in \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}} \xi_{x,t+xy}\right)_{y,t \in \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}} \end{array}$$

vérifie $\|T \otimes 1_E\| \leq e^{-(\frac{n}{h}-1)\alpha}$ pour tout $E \in \mathcal{E}$.

En effet on écrit $n = ah + b$ avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \{0, \ldots, h-1\}$. On va écrire $T = RT_{a-1} \ldots T_1 T_0$ avec $\|T_i \otimes 1_E\| \leq e^{-\alpha}$ et $\|R \otimes 1_E\| \leq 1$ pour E dans $\mathcal{E}$ et $i \in \{0, \ldots, a-1\}$. On rappelle que pour $i \in \{1, \ldots a\}$ on note

$$\ell^2(\mathcal{O}/\pi^{n-ih}\mathcal{O} \times \mathcal{O}/\pi^{ih}\mathcal{O} \times \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi$$

$$\text{le sous-espace de} \quad \ell^2(\mathcal{O}/\pi^{n-ih}\mathcal{O} \times \mathcal{O}/\pi^{ih}\mathcal{O} \times \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})$$

formé des fonctions f telles que $f(x_i, y_i, t + \pi^{n-h}s) = f(x_i, y_i, t)\chi(s)$ pour $x_i \in \mathcal{O}/\pi^{n-ih}\mathcal{O}, y_i \in \mathcal{O}/\pi^{ih}\mathcal{O}, t \in \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}$ et $s \in \mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}$ (dans cette formule i est fixé mais il est commode pour la suite de noter x_i et y_i plutôt que x et y les variables dans $\mathcal{O}/\pi^{n-ih}\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}/\pi^{ih}\mathcal{O}$).

Pour tout $i \in \{1, \ldots, a\}$ on choisit une section $\sigma_i : \mathcal{O}/\pi^{ih}\mathcal{O} \to \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}$ de la projection $\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O} \to \mathcal{O}/\pi^{ih}\mathcal{O}$.

On définit

$$\begin{array}{rccc} T_0 : & \ell^2(\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O} \times \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi & \to & \ell^2(\mathcal{O}/\pi^{n-h}\mathcal{O} \times \mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O} \times \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi \\ & (\xi_{x,t})_{x,t \in \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}} & \mapsto & \left(\mathbb{E}_{x \bmod \pi^{n-h}\mathcal{O} = x_1} \xi_{x,t+x\sigma_1(y_1)}\right)_{x_1,y_1,t} \end{array}$$

(où on a bien sûr $x_1 \in \mathcal{O}/\pi^{n-h}\mathcal{O}, y_1 \in \mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}, t \in \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}$). Pour $i \in \{1,\dots,a-1\}$ on définit

$$T_i : \ell^2(\mathcal{O}/\pi^{n-ih}\mathcal{O} \times \mathcal{O}/\pi^{ih}\mathcal{O} \times \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi$$
$$\to \ell^2(\mathcal{O}/\pi^{n-(i+1)h}\mathcal{O} \times \mathcal{O}/\pi^{(i+1)h}\mathcal{O} \times \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi$$

qui à $(\xi_{x_i,y_i,t})_{x_i\in\mathcal{O}/\pi^{n-ih}\mathcal{O}, y_i\in\mathcal{O}/\pi^{ih}\mathcal{O}, t\in\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}}$ associe

$$\left(\mathop{\mathbb{E}}_{x_i \bmod \pi^{n-(i+1)h}\mathcal{O}=x_{i+1}} \xi_{x_i, y_{i+1} \bmod \pi^{ih}\mathcal{O}, t+x_i(\sigma_{i+1}(y_{i+1})-\sigma_i(y_{i+1} \bmod \pi^{ih}\mathcal{O}))}\right)_{x_{i+1},y_{i+1},t}$$

où la notation indique bien sûr que x_{i+1}, y_{i+1}, t appartiennent à $\mathcal{O}/\pi^{n-(i+1)h}\mathcal{O}$, $\mathcal{O}/\pi^{(i+1)h}\mathcal{O}$, $\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}$ respectivement. On définit $\sigma_0 : \{0\} = \mathcal{O}/\mathcal{O} \to \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}$ par $\sigma_0(0) = 0$, si bien que la formule ci-dessus pour T_i est encore valable pour $i = 0$.

Enfin on définit

$$R : \ell^2(\mathcal{O}/\pi^{n-ah}\mathcal{O} \times \mathcal{O}/\pi^{ah}\mathcal{O} \times \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi \to \ell^2(\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O} \times \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi$$

qui à $(\xi_{x_a,y_a,t})_{x_a\in\mathcal{O}/\pi^{n-ah}\mathcal{O}, y_a\in\mathcal{O}/\pi^{ah}\mathcal{O}, t\in\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}}$ associe

$$\left(\mathop{\mathbb{E}}_{x_a} \xi_{x_a, y \bmod \pi^{ah}\mathcal{O}, t+x_a(y-\sigma_a(y \bmod \pi^{ah}\mathcal{O}))}\right)_{y,t\in\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}}.$$

Il est évident que pour tout E dans la classe $\mathcal{E}$, $\|R \otimes 1_E\| \leq 1$. Soit $i \in \{0,\dots,a-1\}$. Nous devons montrer $\|T_i \otimes 1_E\| \leq e^{-\alpha}$. On rappelle que T_i est un opérateur de $\ell^2(I \times \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi$ vers $\ell^2(J \times \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi$, avec

$$I = \mathcal{O}/\pi^{n-ih}\mathcal{O} \times \mathcal{O}/\pi^{ih}\mathcal{O} \quad \text{et} \quad J = \mathcal{O}/\pi^{n-(i+1)h}\mathcal{O} \times \mathcal{O}/\pi^{(i+1)h}\mathcal{O}.$$

Notons $K = \mathcal{O}/\pi^{n-(i+1)h}\mathcal{O} \times \mathcal{O}/\pi^{ih}\mathcal{O}$ de sorte que l'on a des projections

$$(pr_1 \times \mathrm{Id}) : I \to K \quad \text{et} \quad (\mathrm{Id} \times pr_2) : J \to K$$

associées aux projections évidentes

$$pr_1 : \mathcal{O}/\pi^{n-ih}\mathcal{O} \to \mathcal{O}/\pi^{n-(i+1)h}\mathcal{O} \quad \text{et} \quad pr_2 : \mathcal{O}/\pi^{(i+1)h}\mathcal{O} \to \mathcal{O}/\pi^{ih}\mathcal{O}.$$

Pour $k \in K$, on note $I_k = (pr_1 \times \mathrm{Id})^{-1}(k)$ et $J_k = (\mathrm{Id} \times pr_2)^{-1}(k)$, de sorte que $I = \bigcup_{k\in K} I_k$ et $J = \bigcup_{k\in K} J_k$ sont des partitions de I et J. On a

$$\ell^2(I \times \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi = \bigoplus_{k\in K} \ell^2(I_k \times \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi$$

$$\text{et} \quad \ell^2(J\times\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi = \bigoplus_{k\in K}\ell^2(J_k\times\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi$$

où les sommes directes sont des sommes directes ℓ^2. On vérifie facilement que T_i envoie $\ell^2(I_k\times\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi$ dans $\ell^2(J_k\times\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi$ pour tout $k\in K$. On note

$$T_{i,k} : \ell^2(I_k\times\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi \to \ell^2(J_k\times\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi$$

la restriction de T_i à $\ell^2(I_k\times\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi$, de sorte que T_i est la somme directe des $T_{i,k}$. On est donc ramené à montrer que pour tout $k\in K$, $\|T_{i,k}\otimes 1_E\|\leq e^{-\alpha}$. Soit $k=(x_{i+1},y_i)\in K=\mathcal{O}/\pi^{n-(i+1)h}\mathcal{O}\times\mathcal{O}/\pi^{ih}\mathcal{O}$. Soient

$$\tilde{x}_i\in pr_1^{-1}(x_{i+1})\subset\mathcal{O}/\pi^{n-ih}\mathcal{O} \quad \text{et} \quad \tilde{y}_{i+1}\in pr_2^{-1}(y_i)\subset\mathcal{O}/\pi^{(i+1)h}\mathcal{O}.$$

Les bijections

$$\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}\to pr_1^{-1}(x_{i+1}), z\mapsto \tilde{x}_i+\pi^{n-(i+1)h}z$$
$$\text{et} \quad \mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}\to pr_2^{-1}(y_i), u\mapsto \tilde{y}_{i+1}+\pi^{ih}u$$

donnent des bijections

$$\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}\to I_k, z\mapsto (\tilde{x}_i+\pi^{n-(i+1)h}z, y_i)$$
$$\text{et} \quad \mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}\to J_k, u\mapsto (x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}+\pi^{ih}u)$$

qui permettent de considérer $T_{i,k}$ comme un opérateur de $\ell^2(\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}\times\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi$ dans lui-même, qui à $(\eta_{z,t})_{z\in\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O},t\in\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}}$ associe

$$\Big(\mathop{\mathbb{E}}_{z\in\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}}\eta_{z,t+\tilde{x}_i(\sigma_{i+1}(\tilde{y}_{i+1}+\pi^{ih}u)-\sigma_i(y_i))+\pi^{n-(i+1)h}z(\tilde{y}_{i+1}-\sigma_i(y_i))+\pi^{n-h}zu}\Big)_{u\in\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O},t\in\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}}.$$

On définit les applications $f:\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}\to\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}$ en posant

$$f(z)=\pi^{n-(i+1)h}z(\tilde{y}_{i+1}-\sigma_i(y_i)) \quad \text{et} \quad g(u)=\tilde{x}_i(\sigma_{i+1}(\tilde{y}_{i+1}+\pi^{ih}u)-\sigma_i(y_i)).$$

Alors $T_{i,k}:\ell^2(\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}\times\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi\to\ell^2(\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}\times\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi$

$$\text{à} \quad (\eta_{z,t})_{z\in\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O},t\in\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}} \quad \text{associe} \quad \Big(\mathop{\mathbb{E}}_{z\in\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}}\eta_{z,t+g(u)+f(z)+\pi^{n-h}zu}\Big)_{u\in\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O},t\in\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}}.$$

L'inégalité $\|T_{i,k}\otimes 1_E\|\leq e^{-\alpha}$ résulte alors du lemme suivant.

Lemme 3.3 *Soient $f,g:\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}\to\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}$ des applications. Alors l'opérateur $S:\ell^2(\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}\times\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi\to\ell^2(\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}\times\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi$ qui*

$$\text{à} \quad (\eta_{z,t})_{z\in\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O},t\in\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}} \quad \text{associe} \quad \Big(\mathop{\mathbb{E}}_{z\in\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}}\eta_{z,t+g(u)+f(z)+\pi^{n-h}zu}\Big)_{u\in\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O},t\in\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}}$$

vérifie $\|S\otimes 1_E\|\leq e^{-\alpha}$ pour tout E dans la classe $\mathcal{E}$.

En effet on a $S = S_1 S_2 S_3$, avec

$$S_1, S_2, S_3 : \ell^2(\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O} \times \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi \to \ell^2(\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O} \times \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O})_\chi$$

définis de la manière suivante :

$$S_3\Big((\eta_{z,t})_{z\in\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O},t\in\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}}\Big) = \big(\eta_{z,t+f(z)}\big)_{z\in\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O},t\in\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}},$$

$$S_2\Big((\eta_{z,t})_{z\in\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O},t\in\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}}\Big) = \big(\mathop{\mathbb{E}}_{z\in\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}}\eta_{z,t+\pi^{n-h}zu}\big)_{u\in\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O},t\in\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}},$$

$$S_1\Big((\eta_{u,t})_{u\in\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O},t\in\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}}\Big) = \big(\eta_{u,t+g(u)}\big)_{u\in\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O},t\in\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}}.$$

Il est clair que pour tout E dans la classe $\mathcal{E}$, $S_1 \otimes 1_E$ et $S_3 \otimes 1_E$ sont des isométries, et d'autre part $\|S_2 \otimes 1_E\| \leq e^{-\alpha}$ car S_2 est diagonale par blocs et ses blocs sont indexés par $\mathcal{O}/\pi^{n-h}\mathcal{O}$ et sont égaux à $T_{\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}}$.

4 Propriété (T) renforcée banachique pour SL_3 sur un corps local non archimédien

Soit F un corps local non archimédien, $\mathcal{O}$ son anneau d'entiers et π une uniformisante de $\mathcal{O}$. Soit $\mathbb{F}$ le corps résiduel de F.

Le théorème suivant implique immédiatement que $SL_3(F)$ a la propriété (T) renforcée banachique au sens de la définition 0.2.

On note $G = SL_3(F)$ et $K = SL_3(\mathcal{O})$.

On munit G de la longueur ℓ définie par

$$\ell(k(\pi^{\frac{i+2j}{3}}\begin{pmatrix}\pi^{-(i+j)} & 0 & 0\\ 0 & \pi^{-j} & 0\\ 0 & & 1\end{pmatrix})k') = i+j$$

pour $k, k' \in K$ et $i, j \in \mathbb{N}$, $i - j \in 3\mathbb{Z}$.

On rappelle que si ℓ' est une longueur sur G, et $\mathcal{E}$ est une classe d'espaces de Banach stable par dualité et par conjugaison complexe, on note $\mathcal{E}_{G,\ell'}$ la classe des représentations continues (E,π) de G dans un espace de Banach E de la classe $\mathcal{E}$ tel que $\|\pi(g)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq e^{\ell'(g)}$. On rappelle que $\mathcal{C}^{\mathcal{E}}_{\ell'}(G)$ est l'algèbre de Banach, munie de la conjugaison complexe et de l'involution usuelle, complétion de $C_c(G)$ pour la norme $\|f\| = \sup_{(E,\pi)\in\mathcal{E}_{G,\ell'}} \|\pi(f)\|_{\mathcal{L}(E)}$.

Soit $h \in \mathbb{N}^*, \alpha > 0$ et soit $\mathcal{E}$ une classe d'espaces de Banach stable par dualité et par conjugaison complexe, telle que pour tout E dans $\mathcal{E}$, $\|T_{\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}} \otimes 1_E\| \leq e^{-\alpha}$.

Théorème 4.1 *Soit $\beta \in [0, \frac{\alpha}{3h}[$. Il existe $t, C' > 0$ tels que pour tout $C \in \mathbb{R}^+$, il existe un idempotent réel et autoadjoint $\mathrm{p} \in \mathcal{C}^{\mathcal{E}}_{C+\beta\ell}(G)$ tel que*

- *(i) pour toute représentation $(E, \pi) \in \mathcal{E}_{G,C+\beta\ell}$, $\pi(\mathrm{p})$ a pour image le sous-espace de E formé des vecteurs G-invariants,*
- *(ii) il existe une suite $\mathrm{p}_n \in C_c(G)$, telle que $\int_G |\mathrm{p}_n(g)|dg \leq 1$, p_n est à support dans $\{g \in G, \ell(g) \leq n\}$, et $\|\mathrm{p} - \mathrm{p}_n\|_{\mathcal{C}^{\mathcal{E}}_{C+\beta\ell}(G)} \leq e^{2C} C' e^{-tn}$.*

Le reste de ce paragraphe est consacré à la démonstration du théorème 4.1. On fixe donc h, α et $\mathcal{E}$ comme avant le théorème.

Les deux propositions suivantes jouent le rôle des propositions 3.3 et 3.4 de [Laf08]. On note $\Lambda = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2, i - j \in 3\mathbb{Z}\}$.

Proposition 4.2 *Soit $\beta \in [0, \frac{\alpha}{3h}[$. Il existe $C' > 0$ telle que la propriété suivante soit vraie. Soit $C \in \mathbb{R}^+$ arbitraire. Si (E, π) est dans la classe $\mathcal{E}_{G,C+\beta\ell}$ et ξ et η sont deux vecteurs K-invariants de norme 1 dans E et E^*, et si on pose $c(g) = \langle \eta, \pi(g)\xi \rangle$ pour $g \in G$, la fonction $c : \Lambda \to \mathbb{C}$ définie par abus de notations par $c(i,j) = c(\pi^{\frac{i+2j}{3}} \begin{pmatrix} \pi^{-(i+j)} & 0 & 0 \\ 0 & \pi^{-j} & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix})$ tend vers une limite c_∞ à l'infini et on a $|c(i,j) - c_\infty| \leq C' e^{2C - (\frac{\alpha}{3h} - \beta)(i+j)}$.*

Proposition 4.3 *Soit $\beta \in [0, \frac{\alpha}{3h}[$. Soit (V, τ) une représentation irréductible unitaire non triviale de K. Il existe une constante $C' > 0$ telle que la propriété suivante soit vraie. Soit $C \in \mathbb{R}^+$ arbitraire. Si (E, π) est dans la classe $\mathcal{E}_{G,C+\beta\ell}$, si ξ est un vecteur K-invariant de norme 1 dans E, et η un vecteur K-invariant de norme 1 dans $V \otimes E^*$ et si on pose $c(g) = \langle \eta, \pi(g)\xi \rangle \in V$ pour $g \in G$, la fonction $c : \Lambda \to V$ définie par abus de notations par $c(i,j) = c(\pi^{\frac{i+2j}{3}} \begin{pmatrix} \pi^{-(i+j)} & 0 & 0 \\ 0 & \pi^{-j} & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix})$ tend vers 0 à l'infini et on a $\|c(i,j)\|_V \leq C' e^{2C - (\frac{\alpha}{3h} - \beta)(i+j)}$.*

Les propositions 4.2 et 4.3 impliquent le théorème 4.1. Nous ne reprenons pas l'argument car il est formellement identique à celui qui a permis dans [Laf08] de montrer que les propositions 3.3 et 3.4 impliquent le théorème 3.2 (cet argument figure entre les énoncés des propositions 3.4 et 3.6 dans [Laf08]).

Pour montrer les propositions 4.2 et 4.3 l'argument est le même que celui utilisé dans [Laf08] pour montrer les propositions 3.3 et 3.4, à ceci près que le lemme 3.8 de [Laf08] doit être modifié.

Voici la nouvelle forme du lemme 3.8 de [Laf08], qui utilise seulement l'hypothèse $\|T_{\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}} \otimes 1_E\| \leq e^{-\alpha}$, alors que le lemme 3.8 de [Laf08] nécessitait une hypothèse plus forte.

Lemme 4.4 *Soit $\chi : \mathbb{F} \to \mathbb{C}^*$ un caractère non trivial. Soit $h \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \mathbb{R}_+^*, n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un espace de Banach tel que $\|T_{\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}} \otimes 1_E\| \leq e^{-\alpha}$ et soient $(\xi_{x,y})_{x,y \in \mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}}$ des vecteurs de E. Alors*

$$\mathop{\mathbb{E}}_{a,b\in\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}} \Big\| \mathop{\mathbb{E}}_{x\in\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O},\varepsilon\in\mathbb{F}} \chi(\varepsilon)\xi_{x,ax+b+\pi^{n-1}\varepsilon} \Big\|^2$$

$$\leq (\sharp\mathcal{O}/\pi^{h-1}\mathcal{O})^2 e^{-2(\frac{n}{h}-1)\alpha} \mathop{\mathbb{E}}_{x,y\in\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}} \|\xi_{x,y}\|^2.$$

L'énoncé est évident pour $n < h$. On suppose donc $n \geq h$. On a

$$\mathop{\mathbb{E}}_{x\in\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O},\varepsilon\in\mathbb{F}} \chi(\varepsilon)\xi_{x,ax+b+\pi^{n-1}\varepsilon} = \sum_\eta \Big(\mathop{\mathbb{E}}_{x\in\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O},z\in\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}} \eta(z)\xi_{x,ax+b+\pi^{n-h}z} \Big)$$

où la somme porte sur les caractères η de $\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}$ dont la restriction à $\pi^{h-1}\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O} = \mathcal{O}/\pi\mathcal{O} = \mathbb{F}$ est égale à χ. Un tel caractère η est non dégénéré. Il suffit donc de montrer que pour tout caractère non dégénéré η de $\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}$ et pour tous vecteurs $(\xi_{x,y})_{x,y\in\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}}$ dans E on a

$$\mathop{\mathbb{E}}_{a,b\in\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}} \Big\| \mathop{\mathbb{E}}_{x\in\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O},z\in\mathcal{O}/\pi^h\mathcal{O}} \eta(z)\xi_{x,ax+b+\pi^{n-h}z} \Big\|^2$$

$$\leq e^{-2(\frac{n}{h}-1)\alpha} \mathop{\mathbb{E}}_{x,y\in\mathcal{O}/\pi^n\mathcal{O}} \|\xi_{x,y}\|^2.$$

Cela résulte immédiatement du lemme 3.2.

On voit que par rapport au lemme 3.8 de [Laf08] on a remplacé α par $\frac{2\alpha}{h}$ et multiplié le membre de droite par la constante $(\sharp\mathcal{O}/\pi^{h-1}\mathcal{O})^2 e^{2\alpha}$. Le remplacement de α par $\frac{2\alpha}{h}$ est responsable du fait que l'intervalle $[0, \frac{\alpha}{6}[$ des propositions 3.3 et 3.4 de [Laf08] est remplacé par l'intervalle $[0, \frac{\alpha}{3h}[$ dans les propositions 4.2 et 4.3. D'autre part la constante $(\sharp\mathcal{O}/\pi^{h-1}\mathcal{O})^2 e^{2\alpha}$ est absorbée dans la constante C' des propositions 4.2 et 4.3.

5 Conséquences

5.1 Extension à d'autres groupes de la propriété (T) renforcée banachique

En reprenant les démonstrations des corollaires 4.1 et 4.2 de [Laf08], on obtient l'énoncé suivant.

Corollaire 5.1 *Soit G un groupe algébrique connexe presque F-simple sur un corps local non archimédien F. Si $\mathfrak{g}$ contient $sl_3(F)$, G a la propriété (T) renforcée banachique.*

En reprenant la démonstration des propositions 4.3 et 4.4 de [Laf08], on obtient que la propriété (T) renforcée banachique est héritée par les réseaux cocompacts.

Proposition 5.2 *Soit G un groupe localement compact et Γ un sous-groupe discret cocompact de G. Si G a la propriété (T) renforcée banachique, Γ l'a également.*

Pour des réseaux non cocompacts, il vaut mieux se limiter aux représentations isométriques. En reprenant la démonstration de la proposition 4.5 de [Laf08] on obtient l'énoncé suivant.

Proposition 5.3 *Soit G un groupe localement compact et Γ un sous-groupe discret de G de covolume fini. Si G a la propriété (T) banachique, Γ l'a également.*

5.2 Plongements d'expanseurs

Soit F un corps local non archimédien. Soit G un groupe algébrique connexe presque F-simple sur F dont l'algèbre de Lie contient $sl_3(F)$. Soit Γ un réseau de $G(F)$. D'après le corollaire 5.1 et la proposition 5.3, Γ a la propriété (T) banachique.

Soit $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-groupes d'indice fini de Γ telle que $\sharp(\Gamma/\Gamma_i)$ tende vers l'infini (on sait qu'une telle suite existe). On choisit un système fini symétrique S de générateurs de Γ. On suppose $S^2 \cap \Gamma_i = \{1\}$ quel que soit i. La donnée de S munit $X_i = \Gamma/\Gamma_i$ d'une structure de graphe et on note d_i la métrique associée. Comme Γ a la propriété (T) usuelle, les X_i forment une suite d'expanseurs.

On dit que la suite X_i se plonge uniformément dans un espace de Banach E s'il existe une fonction $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ tendant vers $+\infty$ à l'infini et des applications 1-lipschitziennes $f_i : X_i \to E$ telles que $\|f_i(x) - f_i(y)\|_E \geq \rho(d_i(x,y))$ pour $i \in \mathbb{N}$ et $x, y \in X_i$.

Théorème 5.4 *La suite d'expanseurs (X_i, d_i) n'admet aucun plongement uniforme dans un espace de Banach de type >1.*

En fait aucune sous-suite n'admet un tel plongement uniforme, et on a même le résultat plus précis suivant.

Proposition 5.5 *Soit E un espace de Banach de type >1. Il existe une constante C telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$, et pour toute application $f : X_i \to E$, on ait*

$$\mathop{\mathbb{E}}_{x,y\in X_i} \|f(x) - f(y)\|^2 \leq C \mathop{\mathbb{E}}_{x,y \text{ voisins dans } X_i} \|f(x) - f(y)\|^2.$$

Il est bien connu que la proposition 5.5 implique le théorème. Si la suite (X_i, d_i) admettait un plongement uniforme dans un espace de Banach E de type > 1, on aurait des applications 1-lipschitziennes $f_i : X_i \to E$ et une application $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ tendant vers $+\infty$ en $+\infty$ telles que pour $i \in \mathbb{N}$ et $x, y \in X_i$ on ait $\|f_i(x) - f_i(y)\|_E \geq \rho(d_i(x, y))$. Or $\frac{1}{(\sharp X_i)^2} \sum_{x,y \in X_i} \rho(d_i(x, y))^2$ tend vers $+\infty$ quand i tend vers l'infini, car, pour tout entier k, $\sup_i \frac{1}{\sharp X_i} \sharp\{(x, y) \in (X_i)^2, d_i(x, y) \leq k\}$ est fini, et $\sharp X_i$ tend vers l'infini quand i tend vers l'infini. $\square$

Il reste à montrer la proposition 5.5. On note E_i l'espace des fonctions de X_i dans E, muni de la norme $\|f\|_{E_i}^2 = \mathop{\mathbb{E}}_{x \in X_i} \|f(x)\|_E^2$. Il existe une classe d'espaces de Banach $\mathcal{E}$ de type > 1 qui contient tous les E_i. En effet toute classe de type > 1 est incluse dans une classe de type > 1 stable par somme directe ℓ^2. Comme E_i est une représentation isométrique de Γ on a $E_i \in \mathcal{E}_{\Gamma,0}$. On rappelle que $\mathcal{C}_0^{\mathcal{E}}(\Gamma)$ est l'algèbre de Banach complétion de $C_c(\Gamma)$ pour la norme $\|f\| = \sup_{(E,\pi) \in \mathcal{E}_{\Gamma,0}} \|\pi(f)\|_{\mathcal{L}(E)}$. Comme Γ a la propriété (T) banachique, il existe un idempotent $\mathrm{p} \in \mathcal{C}_0^{\mathcal{E}}(\Gamma)$ tel que pour toute représentation (E, π) dans la classe $\mathcal{E}_{\Gamma,0}$, $\pi(\mathrm{p})$ ait pour image le sous-espace de E formé des vecteurs Γ-invariants.

Les vecteurs Γ-invariants de E_i sont exactement les fonctions constantes de X_i dans E. Pour toute fonction $f \in E_i$, on a $\mathrm{p}f = m_f$, où $m_f = \mathop{\mathbb{E}}_{x \in X_i} f(x) \in E$ est la moyenne de f, considérée comme une fonction constante sur X_i. Il est bien connu que

$$\mathop{\mathbb{E}}_{x,y \in X_i} \|f(x) - f(y)\|^2 = 2 \mathop{\mathbb{E}}_{x \in X_i} \|f(x) - m_f\|^2 = 2\|f - \mathrm{p}f\|_{E_i}^2.$$

Soit $\mathrm{p}_1 \in C_c(\Gamma)$, d'intégrale 1, tel que $\|\mathrm{p} - \mathrm{p}_1\|_{\mathcal{C}_0^{\mathcal{E}}(\Gamma)} \leq \frac{1}{2}$. Alors $\|\mathrm{p}f - \mathrm{p}_1 f\|_{E_i} = \|(\mathrm{p} - \mathrm{p}_1)(f - m_f)\|_{E_i} \leq \frac{1}{2}\|f - m_f\|_{E_i} = \frac{1}{2}\|f - \mathrm{p}f\|_{E_i}$. D'où $\|f - \mathrm{p}f\|_{E_i} \leq 2\|f - \mathrm{p}_1 f\|_{E_i}$. Enfin on voit facilement qu'il existe une constante C_1 (dépendant seulement de p_1) telle que $\|f - \mathrm{p}_1 f\|_{E_i}^2 \leq C_1 \mathop{\mathbb{E}}_{x,y \text{ voisins dans } X_i} \|f(x) - f(y)\|^2$. $\square$

5.3 Propriétés de points fixes pour des actions affines

Le corollaire 0.7 de l'introduction résulte de la proposition suivante et du corollaire 5.1.

Proposition 5.6 *Soit G un groupe localement compact. Si G a la propriété (T) renforcée banachique au sens de la définition 0.2, alors G a la propriété (F) banachique au sens de la définition 0.6.*

En effet soit E un espace de Banach affine dont l'espace de Banach vectoriel sous-jacent E_0 est de type > 1 et soit ρ une action continue de G sur

E par isométries affines. Soit $x_0 \in E$ un point et $\ell : G \to \mathbb{R}_+$ la longueur définie par $\ell(g) = \|\rho(g)(x_0) - x_0\|$. On pose $\tilde{E} = E_0 \oplus \mathbb{C}$ (avec la norme d'une somme directe ℓ^2) et on identifie E avec l'hyperplan $E_0 \times \{1\}$ de $\tilde{E}$ de telle sorte que x_0 s'envoie sur $(0, 1)$. Soit π la représentation (linéaire) de G sur $\tilde{E}$ telle que G préserve l'hyperplan $E_0 \times \{1\}$ et agisse sur celui-ci par ρ, à travers l'identification précédente. La représentation π n'est pas isométrique mais on a $\|\pi(g)\| \leq 1 + \ell(g)$. Pour tout $s > 0$ il existe C tel que $1 + \ell(g) \leq Ce^{s\ell(g)}$ pour tout $g \in G$. Comme G a la propriété (T) renforcée banachique, et comme on a une surjection G-équivariante $\tilde{E} \to \mathbb{C}$ (où $\mathbb{C}$ est muni de la représentation triviale), en reprenant l'argument de la deuxième remarque après la définition 0.2, on voit qu'il existe un vecteur G-invariant dans $\tilde{E}$ dont l'image dans $\mathbb{C}$ est égale à 1. Cela signifie exactement que ρ a un point fixe.

Remarque Plus généralement, si G a la propriété (T) renforcée banachique, pour toute classe $\mathcal{E}$ de type > 1 et pour toute longueur ℓ sur G il existe $s > 0$ tel que pour tout $C \in \mathbb{R}_+$, toute action affine de G sur un espace de Banach affine dont la représentation vectorielle sous-jacente appartient à $\mathcal{E}_{G,C+s\ell}$ admet un point fixe.

Références

[BFGM07] U. Bader, A. Furman, T. Gelander et N. Monod. Property (T) and rigidity for actions on Banach spaces. *Acta Math.* 198, 57–105, 2007.

[Bou82] J. Bourgain. A Hausdorff-Young inequality for B-convex Banach spaces. *Pacific J. of Math.* 101 (2), 255–262, 1982.

[DSV03] G. Davidoff, P. Sarnak et A. Valette. Elementary number theory, group theory and Ramanujan graphs. *Cambridge University Press*, 2003.

[Gel08] T. Gelander. On fixed points and uniformly convex spaces. Arxiv :0805.3813.

[Laf08] V. Lafforgue. Un renforcement de la propriété (T). *Duke Math. J.*, 143(3) :559–602, 2008.

[Mau03] B. Maurey. Type, cotype and K-convexity. In Johnson, W. B. and Lindenstrauss, J. (ed.), Handbook of the geometry of Banach spaces, Volume 2, Amsterdam :North-Holland, 1299-1332, 2003.

[Pis08] G. Pisier. Complex Interpolation between Hilbert, Banach and Operator spaces. arXiv :0802.0476v4 [math.FA].