

Structures de Hodge-Pink pour les φ/\mathfrak{S} -modules de Breuil et Kisin

Alain Genestier et Vincent Lafforgue

3 mai 2011

Le but de cet article est d'appliquer les méthodes de [GL10] aux φ/\mathfrak{S} -modules de Breuil et Kisin (voir [Bre97a, Bre97b, Bre98, Bre99a, Bre99b, Bre02, Kis05]). On démontre ainsi un léger renforcement du corollaire 1.3.15 de [Kis05], sans utiliser les résultats de Kedlaya [Ked04, Ked05]. Le corollaire 1.3.15 de [Kis05] est un étape essentielle de la nouvelle démonstration du théorème “faiblement admissible implique admissible” de Colmez et Fontaine [CF00] que Kisin a donnée dans [Kis05]. En insérant dans [Kis05] notre preuve du corollaire 1.3.15 on obtient donc une démonstration relativement élémentaire du théorème “faiblement admissible implique admissible”.

En revanche les méthodes employées ici ne s'appliquent pas aux (φ, Γ) -modules (voir [Fon90, Berg02, Berg04a, Berg04b, KR09]), pour lesquels le relèvement du Frobenius n'est plus $u \mapsto u^p$. De façon plus précise il semble que l'on ne puisse pas retrouver avec notre méthode les résultats de [KR09] (qui sont pourtant assez parallèles à ceux de [Kis05] et utilisent les résultats de Kedlaya de la même façon).

La théorie des φ/\mathfrak{S} -modules de Breuil et Kisin est \mathbb{Z}_p -linéaire. Dans le dernier paragraphe nous indiquerons un cadre général où \mathbb{Z}_p est remplacé par l'anneau des entiers d'un corps local non archimédien \mathcal{O}_F . Les φ/\mathfrak{S} -modules en ce sens généralisé sont exactement les chtoucas locaux [GL10] lorsque \mathcal{O}_F est d'égales caractéristiques. Ce cadre plus général unifie une partie de [GL10] et le présent article (à l'exception du premier paragraphe), à des variantes de notations près.

Soit k un corps parfait contenant \mathbb{F}_p . On note $W = W(k)$. On possède un morphisme de Frobenius \mathbb{Z}_p -linéaire $\varphi : W \rightarrow W$ qui relève l'endomorphisme $x \mapsto x^p$ de k . On note $K_0 = \text{Frac}W = W[\frac{1}{p}]$. On note $\mathfrak{S} = W[[u]]$. On note $\varphi : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ le morphisme égal à φ sur W et envoyant u sur u^p . Si M est un module sur un anneau A muni de $\varphi : A \rightarrow A$ (qui sera égal à W ou \mathfrak{S} ou à un localisé d'un de ces anneaux) on note ${}^\varphi M = M \otimes_{A, \varphi} A$. Ce module

${}^\varphi M$ est noté $\varphi^*(M)$ dans [Kis05] et ${}^\tau M$ dans [GL10]. Si $f : M \rightarrow M'$ est un morphisme de A -modules on note ${}^\varphi f = f \otimes 1$ et si x est un élément de M on note ${}^\varphi x = x \otimes 1$.

Soit K une extension totalement ramifiée de $K_0 = W[\frac{1}{p}]$, $e = [K : K_0]$ l'indice de ramification de K sur K_0 , π_K une uniformisante de K , et E le polynôme minimal de π_K sur K_0 , qui est un polynôme d'Eisenstein. On a donc $E = u^e + c_{e-1}u^{e-1} + \dots + c_0$, avec $c_{e-1}, \dots, c_1 \in pW$ et $c_0 \in pW^\times$. On notera $E(0) = c_0$.

Soit \mathcal{O}_K l'anneau des entiers de K . Le morphisme $\mathfrak{S}/E\mathfrak{S} \rightarrow \mathcal{O}_K$ qui envoie u sur π_K est un isomorphisme.

Définition 0.1 On appelle φ/\mathfrak{S} -module un couple $(\mathfrak{M}, \varphi_{\mathfrak{M}})$ où \mathfrak{M} est un \mathfrak{S} -module libre de type fini et $\varphi_{\mathfrak{M}} : {}^\varphi\mathfrak{M}[\frac{1}{E}] \rightarrow \mathfrak{M}[\frac{1}{E}]$ est un isomorphisme de $\mathfrak{S}[\frac{1}{E}]$ -modules. Pour $s, t \in \mathbb{Z}$ vérifiant $s \leq t$, on dit que $(\mathfrak{M}, \varphi_{\mathfrak{M}})$ est d'amplitude $\subset [s, t]$ si on a $E^t \mathfrak{M} \subset \varphi_{\mathfrak{M}}({}^\varphi\mathfrak{M}) \subset E^s \mathfrak{M}$.

On note $\text{Mod}_{\mathfrak{S}}^\varphi$ la catégorie des φ/\mathfrak{S} -modules et $\text{Mod}_{\mathfrak{S}, [s, t]}^\varphi$ la catégorie des φ/\mathfrak{S} -modules d'amplitude $\subset [s, t]$.

On note $\text{Mod}_{\mathfrak{S}}^\varphi \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ la catégorie à isogénie près et on appelle iso- φ/\mathfrak{S} -module un objet de cette catégorie.

Remarque 0.2 La catégorie $\text{Mod}_{\mathfrak{S}}^\varphi$ de [Kis05] n'est pas exactement la nôtre mais en est la sous-catégorie pleine formée des objets d'amplitude $\subset [0, +\infty[$.

Soit $\widehat{\mathfrak{S}}$ le complété de $\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]$ par rapport à l'idéal engendré par E . C'est un anneau local d'uniformisante E dont le corps résiduel est $K = \mathfrak{S}[\frac{1}{p}]/E\mathfrak{S}[\frac{1}{p}] = \widehat{\mathfrak{S}}/E\widehat{\mathfrak{S}}$.

Définition 0.3 On appelle φ -module un couple $D = (D, \varphi_D)$ où

- D est un K_0 -espace vectoriel de dimension finie
- $\varphi_D : {}^\varphi D \rightarrow D$ est un isomorphisme de K_0 -espaces vectoriels.

Si D est un K_0 -espace vectoriel de dimension finie on appelle structure de Hodge-Pink sur D un $\widehat{\mathfrak{S}}$ -module libre V qui est un réseau dans ${}^\varphi D \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}]$.

On appelle φ -module de Hodge-Pink un triplet $D = (D, \varphi_D, V_D)$ où

- (D, φ_D) est un φ -module,
- V_D est une structure de Hodge-Pink sur D .

On notera toujours $U_D = {}^\varphi D \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}$ qui est un réseau dans ${}^\varphi D \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}]$.

On note $\text{MHP}(\varphi)$ la catégorie des φ -modules de Hodge-Pink. Un morphisme de φ -modules de Hodge-Pink $D' \rightarrow D$ est un morphisme de φ -modules f tel que $f(V_{D'}) \subset V_D$.

La terminologie ‘‘Hodge-Pink’’ provient du cas d’égales caractéristiques (voir [Pin97, Pin00, GL10]). De tels objets ont été introduits par Breuil [Bre97a, Bre97b, Bre99b, Bre02] mais toujours sous la condition de transversalité de Griffiths (que nous rappellerons dans (2) ci-dessous).

Si D est de dimension 1, la matrice de φ_D dans une base est le produit de p^k et d’une unité. De plus on a $V_D = E^l U_D$. On note $t_N(D) = k$ et $t_H(D) = -l$.

Si D est de dimension r , on note $\det(D) = \Lambda^r D$, $\varphi_{\det(D)} = \det(\varphi_D)$ et $V_{\det(D)} = \det(V_D)$. Alors $\det(D)$ est un φ -module de Hodge-Pink de dimension 1. On pose alors $t_N(D) = t_N(\det(D))$ et $t_H(D) = t_H(\det(D))$.

On notera $t_N(D) = t_N(D, \varphi_D)$ et $t_H(D) = t_H(D, \varphi_D, V_D)$ en cas d’ambiguïté.

Si (D, φ_D) est un φ -module on appelle sous- φ -module un sous- K_0 -espace vectoriel D' tel que $\varphi_D({}^\varphi D') = D'$, et on prend pour $\varphi_{D'}$ la restriction de φ_D à ${}^\varphi D'$. Si D est un φ -module de Hodge-Pink on munit D' d’une structure de Hodge-Pink en posant $V_{D'} = V_D \cap ({}^\varphi D' \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}])$.

Définition 0.4 *Un φ -module de Hodge-Pink D est dit faiblement admissible si $t_H(D) = t_N(D)$ et pour tout sous- φ -module D' on a $t_H(D') \leq t_N(D')$.*

Remarque 0.5 *Soit D faiblement admissible. Pour tout φ -module de Hodge-Pink $(D', \varphi_{D'}, V_{D'})$ et tout morphisme injectif $f : D' \rightarrow D$ de φ -modules de Hodge-Pink, on a $V_{D'} \subset V_D \cap ({}^\varphi D' \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}])$ et donc $t_H(D') \leq t_N(D')$.*

On va construire un foncteur de Dieudonné $\mathbb{D}_{\text{iso}} : \text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^\varphi \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \rightarrow \text{MHP}(\varphi)$ et notre résultat principal sera le théorème suivant.

Théorème 0.6 *Le foncteur \mathbb{D}_{iso} est pleinement fidèle et son image essentielle est constituée exactement des φ -modules de Hodge-Pink faiblement admissibles.*

On appellera admissibles les objets de l’image essentielle de ce foncteur. La partie difficile de ce théorème est bien sûr l’implication ‘‘faiblement admissible implique admissible’’. Le théorème 0.6 sera démontré dans le paragraphe 4 (en utilisant les résultats des paragraphes 2 et 3).

Le théorème 0.6 est un léger renforcement du corollaire 1.3.15 de [Kis05] car on verra dans le premier paragraphe que l’énoncé de Kisin équivaut au cas particulier du théorème 0.6 où les structures de Hodge-Pink vérifient la condition de transversalité de Griffiths (rappelée dans (2) ci-dessous). Il est très probable que les arguments du premier paragraphe de [Kis05] (qui reposent de façon essentielle sur les résultats de Kedlaya) permettent aussi

de montrer notre théorème 0.6. L'avantage de la démonstration que nous proposons ici est d'être plus élémentaire et de ne pas nécessiter l'introduction d'une clôture algébrique de K .

Voici le contenu de cet article.

Dans le premier paragraphe nous donnons un dictionnaire entre les (φ, N) -modules filtrés au sens de Fontaine et les φ -modules de Hodge-Pink vérifiant la condition de transversalité de Griffiths (rappelée dans (2) ci-dessous). Les propriétés de faible admissibilité se correspondent de part et d'autre. Ceci fait du corollaire 1.3.15 de [Kis05] une conséquence du théorème 0.6.

Dans le paragraphe 2 nous introduisons la notion de pseudo-iso- φ/\mathfrak{S} -module et nous montrons qu'elle est équivalente à la notion plus restrictive d'iso- φ/\mathfrak{S} -module.

Dans le paragraphe 3 nous construisons un foncteur de Dieudonné de la catégorie des pseudo-iso- φ/\mathfrak{S} -modules vers celle des φ -modules de Hodge-Pink. Nous montrons de plus qu'il est pleinement fidèle, que son image essentielle est formée d'objets faiblement admissibles et qu'elle est stable par extension.

Dans le paragraphe 4 nous achevons la démonstration du théorème 0.6, qui est notre résultat principal.

Dans le paragraphe 5 nous développons une théorie entière : par des arguments très proches de ceux de la démonstration du théorème 0.6, nous redémontrons un résultat de Caruso et Liu (le théorème 2.2.1 de [CL09]).

Enfin le dernier paragraphe introduit un cadre général où \mathbb{Z}_p est remplacé par l'anneau des entiers d'un corps local non archimédien.

Cet article est essentiellement une transcription de [GL10], aux changements de notations près. Au prix de certaines répétitions, nous avons fait en sorte que le lecteur n'ait pas besoin de se référer à [GL10].

Nous remercions Laurent Fargues pour des observations qui ont été déterminantes pour cet article. Nous remercions également Laurent Berger, Christophe Breuil, Olivier Brinon, Xavier Caruso, Pierre Colmez, Jean-Marc Fontaine, Mark Kisin et Ariane Mézard pour des discussions très utiles et leurs encouragements à écrire cet article.

Dans cet article on notera souvent f au lieu de $f \otimes 1$. Si A est anneau, $M_r(A)$ désignera l'anneau des matrices de taille $r \times r$ à coefficients dans A .

1 Transversalité de Griffiths

Le but de ce paragraphe est de montrer que le théorème 0.6 implique le corollaire 1.3.15 de [Kis05].

La définition ci-dessous est due à Fontaine [Fon94b].

Définition 1.1 On appelle (φ, N) -module filtré un quadruplet

$$D = (D, \varphi_D, N_D, (\text{Fil}^i D_K)) \quad \text{où}$$

- (D, φ_D) est un φ -module,
- $N_D : D \rightarrow D$ est une application K_0 -linéaire vérifiant

$$N_D \varphi_D = p \varphi_D^\varphi N_D,$$

- $(\text{Fil}^i D_K)$ est une filtration décroissante de $D_K = D \otimes_{K_0} K$ par des sous- K -espaces vectoriels tels que

$$\text{Fil}^i D_K = D_K \text{ pour } i \ll 0 \text{ et } \text{Fil}^i D_K = 0 \text{ pour } i \gg 0.$$

On note $MF(\varphi, N)$ la catégorie des (φ, N) -modules filtrés.

Soit $D = (D, \varphi_D, N_D, (\text{Fil}^i D_K))$ un (φ, N) -module filtré. On définit $t_N(D)$ comme précédemment. Si D est de dimension 1, on note $t_H(D)$ l'unique entier i tel que $\text{Fil}^i D_K = D_K$ et $\text{Fil}^{i+1} D_K = 0$. En général on note $t_H(D) = t_H(\det D)$.

Si (D, φ_D) est un φ -module on appelle sous- (φ, N) -module un sous- K_0 -espace vectoriel D' tel que $\varphi_D(\varphi D') = D'$ et $N_D(D') \subset D'$. On définit alors $\varphi_{D'}$ et $N_{D'}$ comme la restriction de φ_D à $\varphi D'$ et de N_D à D' et on munit D' de la filtration $\text{Fil}^i D'_K = \text{Fil}^i D_K \cap (D' \otimes_{K_0} K)$.

D'après [Fon94b] on a la définition suivante.

Définition 1.2 Un (φ, N) -module filtré $(D, \varphi_D, N_D, (\text{Fil}^i D_K))$ est faiblement admissible si $t_H(D) = t_N(D)$ et si pour tout sous- (φ, N) -module D' on a $t_H(D') \leq t_N(D')$.

A toute structure de Hodge-Pink V (c'est-à-dire un $\widehat{\mathfrak{S}}$ -réseau dans ${}^\varphi D \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}]$) on peut associer la structure de Hodge $(\text{Fil}^i D_K)_{i \in \mathbb{Z}}$ (c'est-à-dire une filtration décroissante, séparée et exhaustive, de $D_K = D \otimes_{K_0} K$ par des sous- K -espaces vectoriels) définie par

$$\varphi_D^{-1}(\text{Fil}^i D_K) = \left(E^i V \cap U_D \right) / \left(E^i V \cap EU_D \right) \quad (1)$$

dans ${}^\varphi D \otimes_{K_0} K = U_D / EU_D$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Cette application (qui à une structure de Hodge-Pink associe une structure de Hodge) est surjective mais pas injective (sauf dans le cas minuscule). Le lemme suivant, qui est dû à Breuil (voir [Bre97a, Bre97b, Bre99b, Bre02]), fournit une section de cette application (dépendant de la donnée supplémentaire de N_D)

Lemme 1.3 Soit $D = (D, \varphi_D, N_D, (\text{Fil}^i D_K))$ un (φ, N) -module filtré. Il existe une unique structure de Hodge-Pink V sur D qui vérifie les deux conditions suivantes

- la filtration $(\text{Fil}^i D_K)$ est associée à V comme dans (1),
- V vérifie la condition de transversalité de Griffiths relativement à la connexion $p^\varphi N_D \otimes 1 + 1 \otimes u \frac{d}{du}$ sur ${}^\varphi D \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}_{[\frac{1}{E}]}$, c'est-à-dire que

$$(p^\varphi N_D \otimes 1 + 1 \otimes u \frac{d}{du})(V) \subset E^{-1}V. \quad (2)$$

Démonstration (d'après Breuil [Bre97b, Bre02]). La formule suivante détermine V par récurrence. Pour $i \in \mathbb{Z}$ assez petit on a $E^i V \cap U_D = U_D$ et pour tout $i \in \mathbb{Z}$ on a

$$E^{i+1}V \cap U_D = \{x \in U_D, (p^\varphi N_D \otimes 1 + 1 \otimes u \frac{d}{du})(x) \in E^i V \cap U_D \text{ et } x \bmod EU_D \in \varphi_D^{-1}(\text{Fil}^i D_K) \text{ dans } U_D/EU_D = {}^\varphi D \otimes_{K_0} K\}. \quad (3)$$

De plus $V = E^{-i}(E^i V \cap U_D)$ pour i assez grand. \square

On note

$$HP : MF(\varphi, N) \rightarrow MHP(\varphi)$$

le foncteur qui à $(D, \varphi_D, N_D, (\text{Fil}^i D_K)) \in MF(\varphi, N)$ associe (D, φ_D, V_D) où V_D est l'unique structure de Hodge-Pink qui satisfait les deux conditions (1) et (2).

On a alors le lemme suivant.

Lemme 1.4 L'image d'un objet $(D, \varphi_D, N_D, (\text{Fil}^i D_K))$ de $MF(\varphi, N)$ par HP est faiblement admissible au sens de la définition 0.4 si et seulement si $(D, \varphi_D, N_D, (\text{Fil}^i D_K))$ est faiblement admissible au sens de la définition 1.2.

Démonstration. On note (D, φ_D, V_D) l'image de $(D, \varphi_D, N_D, (\text{Fil}^i D_K))$ par HP . Il est évident que la faible admissibilité de (D, φ_D, V_D) implique la faible admissibilité de $(D, \varphi_D, N_D, (\text{Fil}^i D_K))$. En effet on a

$$t_H(D, \varphi_D, V_D) = t_H(D, \varphi_D, N_D, (\text{Fil}^i D_K)) \quad (4)$$

et cette relation reste vraie pour tout sous- (φ, N) -module D' de D .

On suppose maintenant que $(D, \varphi_D, N_D, (\text{Fil}^i D_K))$ est faiblement admissible et on suppose par l'absurde que (D, φ_D, V_D) ne l'est pas. Il existe donc un sous- φ -module D' dans D tel qu'en posant $V_{D'} = V_D \cap ({}^\varphi D' \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}_{[\frac{1}{E}]})$ on ait $t_H(D', \varphi_{D'}, V_{D'}) > t_N(D', \varphi_{D'})$. On suppose D' minimal pour cette propriété, ce qui implique pour tout φ -module \overline{D}' quotient non trivial de D' , en notant

$V_{\overline{D}'}$ l'image de $V_{D'}$ dans ${}^\varphi\overline{D}' \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}]$ on a $t_H(\overline{D}', \varphi_{\overline{D}'}, V_{\overline{D}'}) > t_N(\overline{D}', \varphi_{\overline{D}'})$.
 Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on note

$$D'_i = D' + N_D(D') + \dots + N_D^i(D').$$

On a $D'_0 = D'$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$, D'_i est un sous- φ -module de D . La suite $(D'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est croissante et stationnaire et on note D'_∞ sa limite, qui est un sous- (φ, N) -module de D . On pose $D'_{-1} = 0$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on note $\overline{D}'_{(i)}$ le quotient de D' par le noyau du morphisme surjectif $D' \xrightarrow{N_D^i} D'_i/D'_{i-1}$, autrement dit $\overline{D}'_{(i)}$ est le φ -module quotient de D' tel que

$$\overline{D}'_{(i)} \xrightarrow{N_D^i} D'_i/D'_{i-1}$$

soit un isomorphisme de K_0 -espaces vectoriels. Comme $N_D \varphi_D = p \varphi_D N_D$, on a

$$t_N(D'_i/D'_{i-1}) = t_N(\overline{D}'_{(i)}) - i \dim(\overline{D}'_{(i)}). \quad (5)$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}$ on note $V_{D'_i} = V_D \cap ({}^\varphi D'_i \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}])$ et $V_{D'_i/D'_{i-1}}$ l'image de $V_{D'_i}$ dans ${}^\varphi(D'_i/D'_{i-1}) \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}]$. On remarque que l'on a une suite exacte $0 \rightarrow V_{D'_{i-1}} \rightarrow V_{D'_i} \rightarrow V_{D'_i/D'_{i-1}} \rightarrow 0$ d'où

$$t_H(D'_i, \varphi_{D'_i}, V_{D'_i}) - t_H(D'_{i-1}, \varphi_{D'_{i-1}}, V_{D'_{i-1}}) = t_H(D'_i/D'_{i-1}, \varphi_{D'_i/D'_{i-1}}, V_{D'_i/D'_{i-1}}). \quad (6)$$

D'autre part il est évident que

$$t_N(D'_i, \varphi_{D'_i}) - t_N(D'_{i-1}, \varphi_{D'_{i-1}}) = t_N(D'_i/D'_{i-1}, \varphi_{D'_i/D'_{i-1}}). \quad (7)$$

La condition (2) de transversalité de Griffiths implique que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $V_{D'_i} \supset \left(E(p^\varphi N_D \otimes 1 + 1 \otimes u \frac{d}{du}) \right)^i (V_{D'_0})$, d'où $V_{D'_i/D'_{i-1}} \supset E^i {}^\varphi N_D^i (V_{D'_0})$, ce qui équivaut à $V_{D'_i/D'_{i-1}} \supset E^i {}^\varphi N_D^i (V_{\overline{D}'_{(i)}})$. On a donc

$$t_H(D'_i/D'_{i-1}, \varphi_{D'_i/D'_{i-1}}, V_{D'_i/D'_{i-1}}) \geq t_H(\overline{D}'_{(i)}, \varphi_{\overline{D}'_{(i)}}, V_{\overline{D}'_{(i)}}) - i \dim(\overline{D}'_{(i)}). \quad (8)$$

Par hypothèse on a $t_H(\overline{D}'_{(i)}, \varphi_{\overline{D}'_{(i)}}, V_{\overline{D}'_{(i)}}) > t_N(\overline{D}'_{(i)}, \varphi_{\overline{D}'_{(i)}})$ dès que $\overline{D}'_{(i)}$ est non trivial. Il résulte alors de (5) et (8) que pour tout $i \in \mathbb{N}$ tel que D'_i/D'_{i-1} est non trivial on a

$$t_H(D'_i/D'_{i-1}, \varphi_{D'_i/D'_{i-1}}, V_{D'_i/D'_{i-1}}) > t_N(D'_i/D'_{i-1}, \varphi_{D'_i/D'_{i-1}}). \quad (9)$$

Alors (9), (6) et (7) impliquent que

$$t_H(D'_\infty, \varphi_{D'_\infty}, V_{D'_\infty}) > t_N(D'_\infty, \varphi_{D'_\infty}). \quad (10)$$

Comme D'_∞ est un sous- (φ, N) -module de D (et non simplement un sous- φ -module de D), et grâce à l'égalité analogue à (4) pour D'_∞ , ceci contredit la faible admissibilité de $(D, \varphi_D, N_D, (\text{Fil}^i D_K))$. \square

Grâce au lemme 1.4, le théorème 0.6 implique le corollaire 1.3.15 de [Kis05].

Voici un exemple pour illustrer les relations entre les conditions de faible admissibilité pour les (φ, N) -modules filtrés et les φ -modules de Hodge-Pink. On considère le φ -module (D, φ_D) donné par $D = K_0^2$ et $\varphi_D = \text{Id}$. On notera que l'on a forcément $N_D = 0$. On note (e_1, e_2) la base canonique de K_0^2 . Soit $(\text{Fil}^i D_K)$ la filtration définie par

$$\text{Fil}^{-1} D_K = D_K, \quad \text{Fil}^0 D_K = \text{Fil}^1 D_K = K e_1, \quad \text{Fil}^2 D_K = 0.$$

Le (φ, N) -module filtré $(D, \varphi_D, N_D, (\text{Fil}^i D_K))$ n'est pas faiblement admissible au sens de Fontaine à cause du sous- (φ, N) -module $D' = K_0 e_1$. Soit maintenant $\alpha \in K$ et soit V_D^α la structure de Hodge-Pink définie par

$$V_D^\alpha = \widehat{\mathfrak{S}} E^{-1}(e_1 + \alpha E e_2) + \widehat{\mathfrak{S}} E e_2$$

de sorte que pour tout $\alpha \in K$, $(\text{Fil}^i D_K)$ est la filtration de Hodge associée à V_D^α par (1). Alors le φ -module de Hodge-Pink $(D, \varphi_D, V_D^\alpha)$ est faiblement admissible si et seulement si $\alpha \neq 0$. On remarque aussi que V_D^α vérifie la condition de transversalité de Griffiths si et seulement si $\alpha = 0$.

2 Pseudo-iso- φ/\mathfrak{S} -modules

Définition 2.1 *Pour $s, t \in \mathbb{Z}$ vérifiant $s \leq t$, on appelle pseudo-iso- φ/\mathfrak{S} -module d'amplitude $\subset [s, t]$ un couple $(\mathfrak{N}, \varphi_{\mathfrak{N}})$ où \mathfrak{N} est un $\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]$ -module libre de type fini et $\varphi_{\mathfrak{N}} : \varphi \mathfrak{N}[\frac{1}{E}] \rightarrow \mathfrak{N}[\frac{1}{E}]$ est un isomorphisme vérifiant la condition (PIM) : pour un (ou pour tout) \mathfrak{S} -module libre \mathfrak{M} muni d'un isomorphisme $\mathfrak{M}[\frac{1}{p}] = \mathfrak{N}$, il existe une constante C , telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathfrak{N}} \varphi_{\mathfrak{N}} \dots \varphi_{\mathfrak{N}}^{n-1} \varphi_{\mathfrak{N}} &\in p^{-C} E^s \dots \varphi^{n-1}(E)^s \text{Hom}_{\mathfrak{S}}(\varphi^n \mathfrak{M}, \mathfrak{M}) \\ \text{et } (\varphi_{\mathfrak{N}} \varphi_{\mathfrak{N}} \dots \varphi_{\mathfrak{N}}^{n-1} \varphi_{\mathfrak{N}})^{-1} &\in p^{-C} E^{-t} \dots \varphi^{n-1}(E)^{-t} \text{Hom}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M}, \varphi^n \mathfrak{M}). \end{aligned}$$

On note $\text{PIMod}_{\mathfrak{S}}^{\varphi}$ la catégorie des pseudo-iso- φ/\mathfrak{S} -modules.

Proposition 2.2 *Le foncteur évident $(\mathfrak{M}, \varphi_{\mathfrak{M}}) \mapsto (\mathfrak{M}[\frac{1}{p}], \varphi_{\mathfrak{M}} \otimes 1)$ de la catégorie $\text{Mod}_{\mathfrak{S}}^{\varphi} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ des iso- φ/\mathfrak{S} -modules dans la catégorie $\text{PIMod}_{\mathfrak{S}}^{\varphi}$ des pseudo-iso- φ/\mathfrak{S} -modules est une équivalence de catégories.*

Démonstration. Seule l'essentielle surjectivité doit être démontrée. Soient $s, t \in \mathbb{Z}$. Il s'agit d'établir qu'un pseudo-iso- φ/\mathfrak{S} -module \mathfrak{N} d'amplitude $\subset [s, t]$ est associé à un φ/\mathfrak{S} -module \mathfrak{M} d'amplitude $\subset [s, t]$ (évidemment non unique, mais unique à isogénie près). On note $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ le complété de $\mathfrak{S}[\frac{1}{u}]$ pour la topologie p -adique. C'est un anneau de valuation discrète complet d'uniformisante p dont le corps résiduel s'identifie à $k((u))$. On note $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}[\frac{1}{p}]$ son corps des fractions. Par le lemme 2.3 ci-dessous il suffit de trouver un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -réseau V dans le \mathcal{E} -espace vectoriel $\mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \mathcal{E}$, qui soit préservé par $\varphi_{\mathfrak{N}} \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}, \frac{1}{p}]} \text{Id}_{\mathcal{E}}$ (c'est-à-dire $\varphi_{\mathfrak{N}} \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}, \frac{1}{p}]} \text{Id}_{\mathcal{E}}(\varphi V) = V$). En effet si \mathfrak{M} est le \mathfrak{S} -module libre associé à \mathfrak{N} et V comme dans le lemme 2.3, on a $\varphi_{\mathfrak{M}}(\varphi \mathfrak{M}) \subset E^s \mathfrak{M}$ et $\varphi_{\mathfrak{M}}^{-1}(\mathfrak{M}) \subset E^{-t} \varphi \mathfrak{M}$ car $E^s \mathfrak{S}[\frac{1}{p}] \cap \mathcal{O}_{\mathcal{E}} = E^s \mathfrak{S}$ (et de même avec $-t$).

Montrons maintenant l'existence de V . Soit V_1 n'importe quel $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -réseau de $\mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \mathcal{E}$. D'après la condition (PIM) de la définition 2.1 il existe C tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'image de $\varphi^n V_1$ par $\varphi_{\mathfrak{N}} \varphi_{\mathfrak{N}} \dots \varphi_{\mathfrak{N}}^{\varphi^{n-1}} \varphi_{\mathfrak{N}}$ est comprise entre $p^C V_1$ et $p^{-C} V_1$. On pose alors

$$V = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}, n \geq k} \varphi_{\mathfrak{N}} \varphi_{\mathfrak{N}} \dots \varphi_{\mathfrak{N}}^{\varphi^{n-1}} \varphi_{\mathfrak{N}}(\varphi^n V_1).$$

Il est clair que V est un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -réseau de $\mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \mathcal{E}$, qui est préservé par $\varphi_{\mathfrak{N}} \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}, \frac{1}{p}]} \text{Id}_{\mathcal{E}}$. \square

Lemme 2.3 a) *Soit \mathfrak{N} un $\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]$ -module libre de rang r , V un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -module libre de rang r et $\alpha : \mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \mathcal{E} \rightarrow V \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathcal{E}$ un isomorphisme de \mathcal{E} -espaces vectoriels. Alors il existe un unique triplet $(\mathfrak{M}, \beta, \gamma)$, où \mathfrak{M} est un \mathfrak{S} -module libre de rang r , $\beta : \mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S}[\frac{1}{p}] \rightarrow \mathfrak{N}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]$ -modules libres, $\gamma : \mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \rightarrow V$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -modules libres, et $\alpha \circ (\beta \otimes 1) = \gamma \otimes 1$.*

b) *Soient \mathfrak{M} et \mathfrak{M}' des \mathfrak{S} -modules libres de type fini, et*

$$g \in \text{Hom}_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]}(\mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S}[\frac{1}{p}], \mathfrak{M}' \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S}[\frac{1}{p}])$$

$$\text{et } h \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(\mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}, \mathfrak{M}' \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{O}_{\mathcal{E}})$$

tels que $g \otimes 1$ et $h \otimes 1$ coïncident dans

$$\text{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{E}, \mathfrak{M}' \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{E}).$$

Alors il existe un unique morphisme $f : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}'$ tel que $g = f \otimes 1$ et $h = f \otimes 1$.

Démonstration. Partant d'un \mathfrak{S} -module libre \mathfrak{M}_0 de rang r , muni d'un isomorphisme $\mathfrak{M}_0 \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S}[\frac{1}{p}] \simeq \mathfrak{N}$, il s'agit de le modifier au point générique du diviseur $p = 0$. On peut se limiter à traiter le cas d'une modification élémentaire supérieure, c'est-à-dire que l'on suppose

$$\mathfrak{M}_0 \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \subset V \subset p^{-1}\mathfrak{M}_0 \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$$

avec $V/\mathfrak{M}_0 \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ un $k((u))$ -espace vectoriel de dimension 1 et on doit montrer que $p^{-1}\mathfrak{M}_0 \cap V$ est un \mathfrak{S} -module libre de rang r . D'abord $V/\mathfrak{M}_0 \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ est une droite du $k((u))$ -espace vectoriel $(p^{-1}\mathfrak{M}_0/\mathfrak{M}_0) \otimes_{k[[u]]} k((u))$. Il est évident que l'intersection de $k[[u]]^r$ avec une droite de $k((u))^r$ est un sous-module libre de rang 1 facteur direct de $k[[u]]^r$: il est engendré par un générateur de cette droite dont le minimum des valuations des coordonnées est nul. Donc il existe une base e_1, \dots, e_r du $k[[u]]$ -module libre $p^{-1}\mathfrak{M}_0/\mathfrak{M}_0$ telle que $k((u))e_1 = V/\mathfrak{M}_0 \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$. Soit f_1, \dots, f_r une base du \mathfrak{S} -module libre \mathfrak{M}_0 telle que $p^{-1}f_i \bmod \mathfrak{M}_0 = e_i$ pour $i = 1, \dots, r$. Alors $(p^{-1}f_1, f_2, \dots, f_r)$ est une base du \mathfrak{S} -module $p^{-1}\mathfrak{M}_0 \cap V$ et celui-ci est donc libre de rang r . \square

Remarque 2.4 *Le lemme 2.3 résulte aussi du fait que tout module de type fini réflexif sur un anneau local régulier de dimension 2 est libre (lemme 6 de [Ser59]).*

3 Construction du foncteur de Dieudonné

Soit $\mathcal{A} = K_0[[u]]$ le complété de $\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]$ pour la topologie u -adique. Cet anneau fourre-tout contient plusieurs anneaux que nous introduirons ensuite et les inclusions et intersections de ces anneaux auront lieu dans \mathcal{A} .

On note \mathcal{O} le sous-anneau de \mathcal{A} formé des éléments qui, considérés comme fonctions de la variable u , convergent sur le disque ouvert de rayon 1. Pour décrire \mathcal{O} de façon plus explicite on a besoin d'introduire une norme ultramétrique $|\cdot|$ sur \mathbb{Q}_p , que l'on étend de façon évidente à K_0 puis à K . Le choix de $|p| \in]0, 1[$ est arbitraire mais on a bien sûr $|\pi_K| = |p|^{\frac{1}{e}}$.

Pour $r \in]0, 1[$ et $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n u^n \in \mathcal{A} = K_0[[u]]$ on pose

$$|x|_r^{\text{naïf}} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| r^n \in [-\infty, +\infty].$$

Pour $x, y \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ on a $|xy|_r^{\text{naïf}} = |x|_r^{\text{naïf}} |y|_r^{\text{naïf}}$.

On a alors

$$\mathcal{O} = \{x \in \mathcal{A}, \forall r \in]0, 1[, |x|_r^{\text{naïf}} < +\infty\}$$

et pour $r \in]0, 1[$ on note $|\cdot|_r$ la restriction de $|\cdot|_r^{\text{naïf}}$ à \mathcal{O} .

On munit \mathcal{O} de la topologie telle que les parties

$$\{x \in \mathcal{O}, |x|_r \leq \varepsilon\}$$

pour $r \in]0, 1[$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ forment une base de voisinage de 0.

On a les inclusions $\mathfrak{S}[\frac{1}{p}] \subset \mathcal{O} \subset \mathcal{A}$.

On introduit

$$\lambda = \prod_{n=0}^{\infty} \varphi^n \left(\frac{E}{E(0)} \right) \in \mathcal{O}.$$

Comme $\lambda = 1$ modulo u , λ est une unité dans \mathcal{A} , donc λ n'est pas diviseur de 0 dans \mathcal{O} . On note d'ailleurs que λ est inversible dans $\mathfrak{S}[\frac{u^e}{p}] \subset \mathcal{A}$. On étend $|\cdot|_r$ à $\mathcal{O}[\frac{1}{\lambda}]$ en posant $|x\lambda^{-n}|_r = |x|_r |\lambda|_r^{-n}$. On note que $|\cdot|_r$ n'est pas la restriction de $|\cdot|_r^{\text{naïf}}$ à $\mathcal{O}[\frac{1}{\lambda}] \subset \mathcal{A}$, d'où l'adjectif "naïf". Pour la suite on note que

$$\begin{aligned} |E(0)|_r &= |p|_r = |p| = |\pi_K|^e, \quad |\varphi^m(E)|_r = \max(|\pi_K|^e, r^{p^m e}), \\ |\lambda|_r &= \prod_{m=0}^{\infty} \max \left(1, \left(\frac{r^{p^m}}{|\pi_K|} \right)^e \right) \end{aligned} \quad (11)$$

et qu'en particulier

$$\begin{aligned} |\varphi^m(E)|_{|\pi_K|^{p^{-n}}} &= |p|^{p^{m-n}} \text{ pour } m < n, \quad |\varphi^m(E)|_{|\pi_K|^{p^{-n}}} = |p| \text{ pour } m \geq n, \\ |p|_{|\pi_K|^{p^{-n}}} &= |p| \quad \text{et} \quad |\lambda|_{|\pi_K|^{p^{-n}}} = |p|^{(p^{-1} + \dots + p^{-n}) - n}. \end{aligned} \quad (12)$$

Lemme 3.1 *L'anneau \mathcal{O} est complet vis-à-vis des normes $|\cdot|_r$. En d'autres termes, si $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de \mathcal{O} telle que pour tout $r \in]0, 1[$ la suite $|y_n - y_{n+1}|_r$ tend vers 0, alors la suite (y_n) converge dans \mathcal{O} vers une limite y et pour tout $r \in]0, 1[$, $|y|_r = \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n|_r$. \square*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\widehat{\mathfrak{S}}_n$ le complété de $\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]$ par rapport à l'idéal engendré par $\varphi^n(E)$. C'est un anneau local d'uniformisante $\varphi^n(E)$. En effet $\varphi^n(E)$ est un élément irréductible de \mathfrak{S} car c'est un polynôme d'Eisenstein. On note que $\widehat{\mathfrak{S}}_0 = \widehat{\mathfrak{S}}$ et que $\varphi : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ s'étend en des morphismes continus $\varphi : \widehat{\mathfrak{S}}_n \rightarrow \widehat{\mathfrak{S}}_{n+1}$ et $\varphi : \widehat{\mathfrak{S}}_n[\frac{1}{\varphi^n(E)}] \rightarrow \widehat{\mathfrak{S}}_{n+1}[\frac{1}{\varphi^{n+1}(E)}]$.

Lemme 3.2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{Id}_{\mathfrak{S}}$ s'étend de façon unique en un morphisme $\mathcal{O} \rightarrow \widehat{\mathfrak{S}}_n$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ le morphisme*

$$\mathcal{O} \rightarrow \widehat{\mathfrak{S}}_n / \varphi^n(E)^k \widehat{\mathfrak{S}}_n = (\mathfrak{S} / \varphi^n(E)^k \mathfrak{S})[\frac{1}{u}]$$

qui s'en déduit est continu lorsque l'on munit l'espace d'arrivée de la topologie "u-adique" pour laquelle les voisinages de 0 sont les $u^m (\mathfrak{S} / \varphi^n(E)^k \mathfrak{S})$. \square

Lemme 3.3 Soit $x \in \mathcal{O}[\frac{1}{\lambda}]$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'image de x dans $\widehat{\mathfrak{S}}_n[\frac{1}{\varphi^n(E)}]$ appartienne à $\widehat{\mathfrak{S}}_n$. Alors x appartient à \mathcal{O} . \square

Lemme 3.4 Soit $x \in \mathcal{O}$. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $|x|_r \leq C$ pour tout $r \in]0, 1[$. Alors x appartient à $\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]$.

Démonstration. On écrit $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n u^n$ avec $x_n \in K_0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $|x_n| \leq Cr^{-n}$ pour tout $r \in]0, 1[$, d'où $|x_n| \leq C$. \square

Soit $(\mathfrak{N}, \varphi_{\mathfrak{N}})$ un pseudo-iso- φ/\mathfrak{S} -module. Nous allons construire son image par \mathbb{D}_{iso} , qui est un φ -module de Hodge-Pink $D = (D, \varphi_D, V_D)$, c'est-à-dire un K_0 -espace vectoriel D muni d'un isomorphisme de K_0 -espaces vectoriels $\varphi_D : {}^\varphi D \rightarrow D$, et d'un $\widehat{\mathfrak{S}}$ -réseau V_D dans ${}^\varphi D \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}]$.

On remarque d'abord que

$$\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]/u\mathfrak{S}[\frac{1}{p}] = \mathfrak{S}[\frac{1}{p}, \frac{1}{E}]/u\mathfrak{S}[\frac{1}{p}, \frac{1}{E}] = K_0.$$

Soit (D, φ_D) le φ -module défini par

$$D = \mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} K_0 = \mathfrak{N}/u\mathfrak{N} \quad \text{et} \quad \varphi_D = \varphi_{\mathfrak{N}} \text{ mod } u. \quad (13)$$

Lemme 3.5 Il existe un unique morphisme ξ de $\mathcal{O}[\frac{1}{\lambda}]$ -modules congru à 1 modulo u de $D \otimes_{K_0} \mathcal{O}[\frac{1}{\lambda}]$ vers $\mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \mathcal{O}[\frac{1}{\lambda}]$ vérifiant

$$\xi(\varphi_D \otimes 1) = (\varphi_{\mathfrak{N}} \otimes 1)^\varphi \xi. \quad (14)$$

De plus c'est un isomorphisme de $\mathcal{O}[\frac{1}{\lambda}]$ -modules et il dépend fonctoriellement de $(\mathfrak{N}, \varphi_{\mathfrak{N}})$.

Démonstration. L'unicité de ξ est évidente car (14) détermine ξ modulo u^p, u^{p^2}, \dots et $\mathcal{O}[\frac{1}{\lambda}] \subset \mathcal{A}$ est une inclusion.

Montrons l'existence. Soit $s_0 \in \text{Hom}_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]}(D \otimes_{K_0} \mathfrak{S}[\frac{1}{p}], \mathfrak{N})$ égal à 1 modulo u . On choisit aussi un W -réseau Δ de D et un \mathfrak{S} -module libre \mathfrak{M} avec un isomorphisme $\mathfrak{M}[\frac{1}{p}] = \mathfrak{N}$.

On pose alors

$$\begin{aligned} \xi &= \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \text{ dans } \text{Hom}_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]}(D \otimes_{K_0} \mathfrak{S}[\frac{1}{p}], \mathfrak{N}) \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \mathcal{O}[\frac{1}{\lambda}] \\ &\text{où } s_n = \varphi_{\mathfrak{N}} \dots \varphi_{\mathfrak{N}}^{\varphi^{n-1}} \varphi_{\mathfrak{N}}^{\varphi^n} s_0 \varphi_D^{\varphi^{n-1}} \varphi_D^{-1} \dots \varphi_D^{-1} \\ &\in \text{Hom}_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]}(D \otimes_{K_0} \mathfrak{S}[\frac{1}{p}], \mathfrak{N})[\frac{1}{E}, \dots, \frac{1}{\varphi^{n-1}(E)}]. \end{aligned}$$

Cette limite existe pour la raison suivante. Soit $C \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\varphi_{\mathfrak{N}} \in p^{-C} E^{-C} \text{Hom}_{\mathfrak{S}}(\varphi \mathfrak{M}, \mathfrak{M}), \quad \varphi_D^{-1} \in p^{-C} \text{Hom}_W(\Delta, \varphi \Delta) \quad (15)$$

$$\text{et } s_0 \in p^{-C} \text{Hom}_{\mathfrak{S}}(\Delta \otimes_W \mathfrak{S}, \mathfrak{M}). \quad (16)$$

Alors

$$(s_{n+1} - s_n) \in p^{-C(2n+3)} E^{-C} \dots \varphi^n(E)^{-C} u^{p^n} \text{Hom}_{\mathfrak{S}}(\Delta \otimes_W \mathfrak{S}, \mathfrak{M})$$

$$\text{donc } \lambda^C (s_{n+1} - s_n) \in p^{-C(3n+4)} u^{p^n} (\varphi^{n+1} \lambda)^C \text{Hom}_{\mathfrak{S}}(\Delta \otimes_W \mathfrak{S}, \mathfrak{M})$$

et donc

$$\lambda^C (s_{n+1} - s_n) \in p^{-C(3n+4)} u^{p^n} \text{Hom}_{\mathfrak{S}}(\Delta \otimes_W \mathfrak{S}, \mathfrak{M}) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S} \left[\left[\frac{u^{ep^{n+1}}}{p} \right] \right].$$

Le lemme 3.1 montre que la suite $\lambda^C s_n$ converge dans $\text{Hom}_{\mathfrak{S}}(\Delta \otimes_W \mathfrak{S}, \mathfrak{M}) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{O}$. Donc ξ appartient à $\text{Hom}_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]}(D \otimes_{K_0} \mathfrak{S}[\frac{1}{p}], \mathfrak{N}) \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \lambda^{-C} \mathcal{O}$. Ceci termine la démonstration de l'existence de ξ .

De la même façon, on choisit $s'_0 \in \text{Hom}_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]}(\mathfrak{N}, D \otimes_{K_0} \mathfrak{S}[\frac{1}{p}])$ égal à 1 modulo u , on pose $\xi' = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_D \dots \varphi^{n-1} \varphi_D \varphi^n s'_0 \varphi^{n-1} \varphi_{\mathfrak{N}}^{-1} \dots \varphi_{\mathfrak{N}}^{-1}$ et on montre que ξ' appartient à $\text{Hom}_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]}(\mathfrak{N}, D \otimes_{K_0} \mathfrak{S}[\frac{1}{p}]) \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \mathcal{O}[\frac{1}{\lambda}]$. Une adaptation de l'argument d'unicité de ξ montre que $\xi' \xi = 1$ et $\xi \xi' = 1$, donc ξ est un isomorphisme. \square

Remarque 3.6 *C'est le lemme 1.2.6 de [Kis05]. La démonstration précédente est exactement la même que celle donnée dans [Kis05]. Elle est aussi parallèle à celle du lemme 7.4 de [GL10] (la transcription est détaillée dans le dernier paragraphe).*

Remarque 3.7 *Dans le cadre des (φ, Γ) -modules apparaissent d'autres relèvements de φ de W à \mathfrak{S} , qui sont donnés par*

$$u \mapsto u^p + h_{p-1} u^{p-1} + \dots + h_1 u \quad \text{avec } h_i \in pW, \quad (17)$$

au lieu de $u \mapsto u^p$. On renvoie à [KR09] pour une situation proche de la nôtre. Pour un tel relèvement de φ la suite s_n de la démonstration précédente ne converge pas nécessairement (sauf évidemment en rang 1). D'ailleurs la démonstration du lemme 2.2.2 de [KR09] est de nature différente, car elle utilise la connexion induite par l'action de Γ . En fait l'analogie brutale du lemme 3.5 est faux dans le cadre de [KR09], comme le montre l'exemple suivant. On prend $E(u) = \frac{(1+u)^p - 1}{u}$ et le relèvement de φ de W à \mathfrak{S} donné

par $u \mapsto (1+u)^p - 1$. On prend $\mathfrak{N} = \mathfrak{S}[\frac{1}{p}]^2$ et $\varphi_{\mathfrak{N}} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & E \end{pmatrix}$ avec $x \in u + u^2\mathfrak{S}$.

Par functorialité ξ devrait être de la forme $\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $y \in u\mathcal{O}[\frac{1}{\lambda}]$ et d'après (14), y devrait vérifier

$$y - p^{-1}\varphi(y) = p^{-1\varphi}\lambda x. \quad (18)$$

On écrit $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n u^n$. Alors $\varphi(y) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \left((1+u)^p - 1 \right)^n = p y_1 u \pmod{u^2}$. Donc $y - p^{-1}\varphi(y)$ est divisible par u^2 alors que $p^{-1\varphi}\lambda x$ est congru à $p^{-1}u$ modulo u^2 , donc (18) ne peut être satisfaite. En fait en revenant au cadre général du lemme précédent, mais avec un relèvement de φ comme dans (17), l'obstruction à l'existence de ξ vérifiant (14) réside toujours modulo une puissance finie de u . En effet on peut montrer que si C est comme dans (15), et si s_0 vérifie $s_0(\varphi_D \otimes 1) = (\varphi_{\mathfrak{N}} \otimes 1)\varphi s_0$ modulo u^{3C+1} , alors la suite s_n converge dans $\lambda^{-C}\text{Hom}_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]}(D \otimes_{K_0} \mathfrak{S}[\frac{1}{p}], \mathfrak{N}) \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \mathcal{O}$ et sa limite ξ vérifie (14).

Nous allons maintenant définir la structure de Hodge-Pink V_D sur D et terminer ainsi la construction de \mathbb{D}_{iso} .

Définition 3.8 *Le foncteur \mathbb{D}_{iso} envoie $(\mathfrak{N}, \varphi_{\mathfrak{N}})$ sur (D, φ_D, V_D) , où D et φ_D sont définis par (13), et où la structure de Hodge-Pink V_D est le $\widehat{\mathfrak{S}}$ -réseau de ${}^{\varphi}D \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}]$ défini par*

$$V_D = (\varphi_D \otimes 1)^{-1}(\xi^{-1}(\mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \widehat{\mathfrak{S}})) = {}^{\varphi}\xi^{-1}((\varphi_{\mathfrak{N}} \otimes 1)^{-1}(\mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \widehat{\mathfrak{S}})). \quad (19)$$

On va montrer que le foncteur \mathbb{D}_{iso} est pleinement fidèle en construisant un foncteur quasi-inverse sur son image. Autrement dit on va montrer que V_D détermine de manière unique $\xi^{-1}(\mathfrak{N}) \subset D \otimes_{K_0} \mathcal{O}[\frac{1}{\lambda}]$, et par conséquent détermine le couple $(\mathfrak{N}, \varphi_{\mathfrak{N}})$ à un unique isomorphisme près.

Soit $\widetilde{\mathfrak{N}}$ l'ensemble des $x \in D \otimes_{K_0} \mathcal{O}[\frac{1}{\lambda}]$, tels que

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'image de x dans $D \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}_n[\frac{1}{\varphi^n(E)}]$ appartient à $\varphi_D \dots \varphi_D^{\varphi^n} V_D$,
- il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|(\varphi_D \dots \varphi_D^{\varphi^{n-1}})^{-1} x|_{|\pi_K|^{p^{-n}}} \leq C. \quad (20)$$

On précise que ${}^{\varphi^n}V_D$ est un $\widehat{\mathfrak{S}}_n$ -réseau de ${}^{\varphi^{n+1}}D \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}_n[\frac{1}{\varphi^n(E)}]$ et donc $\varphi_D \dots \varphi_D^{\varphi^n} V_D$ est un $\widehat{\mathfrak{S}}_n$ -réseau de $D \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}_n[\frac{1}{\varphi^n(E)}]$.

Pour donner un sens à (20) il faut choisir un W -réseau Δ de D : dans

une base de ${}^{\varphi^n}\Delta$ sur W on écrit $(\varphi_D \dots \varphi_D^{\varphi^{n-1}} \varphi_D)^{-1}x = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}$ avec $y_i \in \mathcal{O}[\frac{1}{\lambda}]$ et

on pose $|(\varphi_D \dots \varphi_D^{\varphi^{n-1}} \varphi_D)^{-1}x|_{|\pi_K|^{p-n}} = \max(|y_1|_{|\pi_K|^{p-n}}, \dots, |y_r|_{|\pi_K|^{p-n}})$. Comme $|pb|_{|\pi_K|^{p-n}} = |p| \cdot |b|_{|\pi_K|^{p-n}}$ pour tout $b \in \mathcal{O}[\frac{1}{\lambda}]$, si on change Δ la dernière condition reste vraie pour une autre constante C , donc la définition de $\tilde{\mathfrak{N}}$ ne dépend pas du choix de Δ . On vérifie facilement que $(\varphi_D \otimes 1)({}^{\varphi}\tilde{\mathfrak{N}}[\frac{1}{E}]) = \tilde{\mathfrak{N}}[\frac{1}{E}]$.

Proposition 3.9 *On a $\xi^{-1}(\mathfrak{N}) = \tilde{\mathfrak{N}}$.*

Démonstration. On suppose $(\mathfrak{N}, \varphi_{\mathfrak{N}})$ d'amplitude $\subset [s, t]$. On fixe un \mathfrak{S} -module libre \mathfrak{M} muni d'un isomorphisme $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}[\frac{1}{p}]$ et une constante C_0 telle que la condition (PIM) de la définition 2.1 soit satisfaite (avec C_0 au lieu de C). On fixe aussi un réseau Δ de D . Grâce à Δ et \mathfrak{M} toutes les normes qui vont suivre seront bien définies. On choisit des bases de \mathfrak{M} et de Δ . Ce sont donc aussi des bases de \mathfrak{N} et de D . On va appliquer les lemmes 3.3 et 3.4 aux cordonnées d'un élément de $\xi(\tilde{\mathfrak{N}})$. En effet $\xi(\tilde{\mathfrak{N}})$ est formé des $y \in \mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \mathcal{O}[\frac{1}{\lambda}]$ tels que

- (C1) pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'image de y dans $\mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \widehat{\mathfrak{S}}_n[\frac{1}{\varphi^n(E)}]$ appartienne à $\xi(\varphi_D \dots \varphi_D^{\varphi^n} V_D)$,
- (C2) il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|(\varphi_D \dots \varphi_D^{\varphi^{n-1}} \varphi_D)^{-1} \xi^{-1} y|_{|\pi_K|^{p-n}} \leq C.$$

On a

$$\begin{aligned} \xi(\varphi_D \dots \varphi_D^{\varphi^n} V_D) &= \xi(\varphi_D \dots \varphi_D^{\varphi^{n-1}} \varphi_D \varphi_{\mathfrak{N}}^{\varphi^n} \xi^{-1}({}^{\varphi^n}\mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \widehat{\mathfrak{S}}_n)) \\ &= \varphi_{\mathfrak{N}} \dots \varphi_{\mathfrak{N}}^{\varphi^{n-1}} \varphi_{\mathfrak{N}}({}^{\varphi^n}\mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \widehat{\mathfrak{S}}_n) = \mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \widehat{\mathfrak{S}}_n \end{aligned}$$

car $\varphi_{\mathfrak{N}}, \dots, \varphi_{\mathfrak{N}}^{\varphi^{n-1}}$ sont inversibles à coefficients dans $\widehat{\mathfrak{S}}_n$. D'après le lemme 3.3 la condition (C1) équivaut donc à $y \in \mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \mathcal{O}$.

Comme $\varphi_{\mathfrak{N}}^{\varphi^{n-1}} \varphi_{\mathfrak{N}}^{-1} \dots \varphi_{\mathfrak{N}}^{-1} \xi^{-1} y = \varphi_{\mathfrak{N}}^{\varphi^n} \xi^{-1} \varphi_{\mathfrak{N}}^{-1} \dots \varphi_{\mathfrak{N}}^{-1} y$ la condition (C2) équivaut à l'existence de $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\varphi_{\mathfrak{N}}^{\varphi^n} \xi^{-1} \varphi_{\mathfrak{N}}^{-1} \dots \varphi_{\mathfrak{N}}^{-1} y|_{|\pi_K|^{p-n}} \leq C.$$

Il existe $C_1 \in \mathbb{N}$ tel que les coefficients de ξ et ξ^{-1} appartiennent à $p^{-C_1} \mathfrak{S}[[\frac{u^e}{p}]]$, d'où $|\varphi_{\mathfrak{N}}^{\varphi^n} \xi|_{|\pi_K|^{p-n}} \leq |p|^{-C_1}$ et $|\varphi_{\mathfrak{N}}^{\varphi^n} \xi^{-1}|_{|\pi_K|^{p-n}} \leq |p|^{-C_1}$

$$\text{et donc } |p|^{C_1} \leq \frac{|\varphi_{\mathfrak{N}}^{\varphi^n} \xi^{-1} \varphi_{\mathfrak{N}}^{-1} \dots \varphi_{\mathfrak{N}}^{-1} y|_{|\pi_K|^{p-n}}}{|\varphi_{\mathfrak{N}}^{\varphi^n} \varphi_{\mathfrak{N}}^{-1} \dots \varphi_{\mathfrak{N}}^{-1} y|_{|\pi_K|^{p-n}}} \leq |p|^{-C_1}.$$

Enfin, grâce à (12) la condition (PIM) donne l'encadrement suivant :

$$\begin{aligned} |p|^{-s(p^{-1}+\dots+p^{-n})+C_0} \cdot |y|_{|\pi_K|^{p^{-n}}} &\leq |\varphi_{\mathfrak{N}}^{-1} \dots \varphi_{\mathfrak{N}}^{-1} y|_{|\pi_K|^{p^{-n}}} \\ &\leq |p|^{-t(p^{-1}+\dots+p^{-n})-C_0} |y|_{|\pi_K|^{p^{-n}}}. \end{aligned}$$

On voit alors que la condition (C2) équivaut à l'existence de $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|y|_{|\pi_K|^{p^{-n}}} \leq C$.

La condition (C1) équivaut à $y \in \mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \mathcal{O}$. Sous cette hypothèse, grâce au lemme 3.4, la condition (C2) équivaut à $y \in \mathfrak{N}$, ce qui termine la démonstration de la proposition 3.9. \square

Proposition 3.10 *Le foncteur \mathbb{D}_{iso} est pleinement fidèle.*

Démonstration Cela résulte immédiatement de la proposition 3.9. \square

On note que la proposition 3.9 construit explicitement un quasi-inverse du foncteur \mathbb{D}_{iso} sur son image essentielle. On appellera admissibles les objets de son image essentielle.

La proposition suivante est l'implication "admissible implique faiblement admissible".

Proposition 3.11 *L'image du foncteur \mathbb{D}_{iso} est contenue dans la sous-catégorie pleine des φ -modules de Hodge-Pink faiblement admissibles.*

Soit $(\mathfrak{N}, \varphi_{\mathfrak{N}})$ un pseudo-iso- φ/\mathfrak{S} -module et (D, φ_D, V_D) le φ -module de Hodge-Pink qui est son image par \mathbb{D}_{iso} .

Lemme 3.12 *Pour tout \mathfrak{S} -réseau \mathfrak{M} dans \mathfrak{N} et pour tout W -réseau Δ dans D , il existe une constante C telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$|(\varphi_D \varphi_D \dots \varphi_D^{\varphi^{n-1}})^{-1} \xi^{-1}|_{|\pi_K|^{p^{-n}}} \leq C \quad (21)$$

$$\text{et } |\xi(\varphi_D \varphi_D \dots \varphi_D^{\varphi^{n-1}})|_{|\pi_K|^{p^{-n}}} \leq C. \quad (22)$$

Démonstration. On suppose $(\mathfrak{N}, \varphi_{\mathfrak{N}})$ d'amplitude $\subset [s, t]$. D'après la condition (PIM) il existe $C \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathfrak{N}} \varphi_{\mathfrak{N}} \dots \varphi_{\mathfrak{N}}^{\varphi^{n-1}} \varphi_{\mathfrak{N}} &\in p^{-C} E^s \dots \varphi^{n-1}(E)^s \text{Hom}_{\mathfrak{S}}(\varphi^n \mathfrak{M}, \mathfrak{M}) \\ \text{et } (\varphi_{\mathfrak{N}} \varphi_{\mathfrak{N}} \dots \varphi_{\mathfrak{N}}^{\varphi^{n-1}} \varphi_{\mathfrak{N}})^{-1} &\in p^{-C} E^{-t} \dots \varphi^{n-1}(E)^{-t} \text{Hom}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M}, \varphi^n \mathfrak{M}). \end{aligned}$$

D'après (12), pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\varphi_{\mathfrak{N}} \varphi_{\mathfrak{N}} \dots \varphi_{\mathfrak{N}}^{\varphi^{n-1}} \varphi_{\mathfrak{N}}|_{|\pi_K|^{p^{-n}}} \leq |p^{-C} E^s \dots \varphi^{n-1}(E)^s|_{|\pi_K|^{p^{-n}}} = |p|^{-C+s(p^{-1}+\dots+p^{-n})}$$

et

$$\begin{aligned} |(\varphi_{\mathfrak{N}} \varphi_{\mathfrak{N}} \dots \varphi_{\mathfrak{N}})^{-1}|_{|\pi_K|^{p^{-n}}} &\leq |p^{-C} E^{-t} \dots \varphi^{n-1}(E)^{-t}|_{|\pi_K|^{p^{-n}}} \\ &= |p|^{-C-t(p^{-1}+\dots+p^{-n})}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} (\varphi_D \varphi_D \dots \varphi_D)^{-1} \xi^{-1} &= \varphi^n \xi^{-1} (\varphi_{\mathfrak{N}} \varphi_{\mathfrak{N}} \dots \varphi_{\mathfrak{N}})^{-1}, \\ \xi(\varphi_D \varphi_D \dots \varphi_D) &= (\varphi_{\mathfrak{N}} \varphi_{\mathfrak{N}} \dots \varphi_{\mathfrak{N}}) \varphi^n \xi \\ \text{et d'autre part } |\varphi^n \xi|_{|\pi_K|^{p^{-n}}} &= |\xi|_{|\pi_K|} \quad \text{et} \quad |\varphi^n \xi^{-1}|_{|\pi_K|^{p^{-n}}} = |\xi^{-1}|_{|\pi_K|}. \end{aligned}$$

Le lemme 3.12 est démontré. \square

Démonstration de la proposition 3.11. Pour tout entier l , $\Lambda^l(\mathfrak{N})$ est un pseudo-iso- φ/\mathfrak{S} -module et le φ -module de Hodge-Pink associé est $\Lambda^l(D)$. En prenant l égal au rang de \mathfrak{N} , on voit qu'il existe un entier $t \in \mathbb{Z}$ et $a \in (\mathfrak{S}[\frac{1}{p}])^\times$ tels que $\varphi_{\Lambda^l(\mathfrak{N})} = E^t a$ dans une base de $\Lambda^l(\mathfrak{N})$. On a bien sûr $V_{\Lambda^l(D)} = E^{-t} U_{\Lambda^l(D)}$ donc $t_H(D) = t$. Par la condition (PIM), il existe C tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \varphi(a) \dots \varphi^{n-1}(a)$ et son inverse appartiennent à $p^{-C} \mathfrak{S}$. On en déduit $a \in \mathfrak{S}^\times$ et donc $t_N(D) = t$. Donc on a bien $t_H(D) = t_N(D)$.

Supposons par l'absurde que D n'est pas faiblement admissible. Il existe alors un sous- φ -module D' de D tel que $t_H(D') > t_N(D')$. En remplaçant \mathfrak{N} par $\Lambda^l(\mathfrak{N})$, où l est la dimension de D' , on se ramène à la situation où D' est de dimension 1. Pour toute base (e_1, \dots, e_r) de \mathfrak{N} sur $\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]$, on note (f_1, \dots, f_r) la base de D sur K_0 obtenue par réduction modulo u . On a $K_0 \subset \mathfrak{S}[\frac{1}{p}]$ et $GL_r(K_0) \subset GL_r(\mathfrak{S}[\frac{1}{p}])$, donc on peut choisir la base (e_1, \dots, e_r) telle que $D' = K_0 f_1$. Notons $j = t_N(D')$ de sorte que $\varphi_D(f_1) = a p^j f_1$ avec $a \in W^\times$. On suppose par l'absurde que $t_H(D') > t_N(D')$, c'est-à-dire

$$E^{-(j+1)\varphi} D' \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}} \subset (\varphi_D \otimes 1)^{-1} (\xi^{-1}(\mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}} \widehat{\mathfrak{S}}))$$

ou encore, de façon équivalente, $f_1 \in E^{j+1} \xi^{-1}(\mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}} \widehat{\mathfrak{S}})$. Comme $\xi = (\varphi_{\mathfrak{N}} \otimes 1) \varphi \xi (\varphi_D \otimes 1)^{-1}$, comme $\varphi_{\mathfrak{N}}$ induit un isomorphisme de ${}^{\varphi} \mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}} \widehat{\mathfrak{S}}_m$ dans $\mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}} \widehat{\mathfrak{S}}_m$ pour tout $m > 0$, et comme D' est stable par φ_D , on voit que

$$\xi(f_1) \text{ appartient à } \varphi^m(E)^{j+1}(\mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \widehat{\mathfrak{S}}_m) \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}. \quad (23)$$

On note $\xi(f_1)_1$ le premier coefficient de $\xi(f_1)$ dans la base (e_1, \dots, e_r) . On a alors

- $\lambda^{-(j+1)} \xi(f_1)_1$ est congru à 1 modulo u ,
- $\lambda^{-(j+1)} \xi(f_1)_1 \in \mathcal{O}$ d'après (23) et grâce au lemme 3.3,

- pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $|\xi(f_1)_1|_{|\pi_K|^{p-n}} \leq C|p|^{-jn}$, grâce à (22) et au fait que

$$\varphi_D^\varphi \varphi_D \dots \varphi_D^{\varphi^{n-1}} \varphi_D^{\varphi^n} f_1 = (a^\varphi a \dots \varphi^{n-1} a) p^{nj} f_1$$

et donc $|\lambda^{-(j+1)} \xi(f_1)_1|_{|\pi_K|^{p-n}} \leq C'|p|^n$ grâce à (12), pour une autre constante C' .

Or ces propriétés sont contradictoires car \mathcal{O} ne contient aucun élément ayant de telles propriétés, car tout $x \in \mathcal{O}$ congru à 1 modulo u vérifie $|x|_r \geq 1$ pour tout $r \in]0, 1[$. La proposition 3.11 est démontrée. \square

Nous allons énoncer une proposition qui permettra dans le paragraphe suivant une réduction de la preuve de “faiblement admissible implique admissible” aux objets irréductibles.

Une suite exacte courte dans la catégorie des φ -modules de Hodge-Pink est une suite exacte $0 \rightarrow D' \rightarrow D \rightarrow D'' \rightarrow 0$ dans la catégorie des φ -modules telle que $V_{D''}$ soit l'image de V_D dans $D'' \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}]$ et $V_{D'}$ l'intersection de V_D avec $D' \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}]$. Le foncteur \mathbb{D}_{iso} transforme les suites exactes en suites exactes.

Proposition 3.13 *Une extension de deux φ -modules de Hodge-Pink admissibles est admissible.*

Début de la démonstration de la proposition 3.13. Soient $(\mathfrak{N}', \varphi_{\mathfrak{N}'})$ et $(\mathfrak{N}'', \varphi_{\mathfrak{N}''})$ des pseudo-iso- φ/\mathfrak{S} -modules, et $(D', \varphi'_D, V_{D'})$ et $(D'', \varphi_{D''}, V_{D''})$ leurs images par \mathbb{D}_{iso} . Soit $D = (D, \varphi_D, V_D)$ une extension de $(D'', \varphi_{D''}, V_{D''})$ par $(D', \varphi'_D, V_{D'})$. On doit montrer que D provient d'une extension $(\mathfrak{N}, \varphi_{\mathfrak{N}})$ de $(\mathfrak{N}'', \varphi_{\mathfrak{N}''})$ par $(\mathfrak{N}', \varphi_{\mathfrak{N}'})$.

On se ramène à montrer la proposition 3.13 dans le cas où $(D'', \varphi_{D''}, V_{D''})$ est trivial (on indiquera dans la remarque 3.16 comment le lecteur qui le souhaiterait peut traiter directement le cas général, au prix de notations plus compliquées). En effet la catégorie des pseudo-iso- φ/\mathfrak{S} -modules et celle des φ -modules de Hodge-Pink possèdent des opérations produit tensoriel et dual. Par exemple le dual de $(\mathfrak{N}'', \varphi_{\mathfrak{N}''})$ est $(\mathfrak{N}''^*, {}^t\varphi_{\mathfrak{N}''}^{-1})$ où ${}^t\varphi_{\mathfrak{N}''} : \mathfrak{N}''^* \rightarrow \varphi\mathfrak{N}''^*$ est le transposé de $\varphi_{\mathfrak{N}''}$. Le produit tensoriel de $(\mathfrak{N}', \varphi_{\mathfrak{N}'})$ et du dual de $(\mathfrak{N}'', \varphi_{\mathfrak{N}''})$ est $(\mathfrak{N}' \otimes \mathfrak{N}''^*, \varphi_{\mathfrak{N}'} \otimes {}^t\varphi_{\mathfrak{N}''}^{-1})$ et il est équivalent de se donner une extension de $(\mathfrak{S}[\frac{1}{p}], \text{Id})$ par cet objet ou une extension de $(\mathfrak{N}', \varphi_{\mathfrak{N}'})$ par $(\mathfrak{N}'', \varphi_{\mathfrak{N}''})$. On est donc ramené à montrer la proposition 3.13 dans le cas où $(D'', \varphi_{D''}, V_{D''})$ est trivial, c'est-à-dire

$$D'' = K_0, \quad \varphi_{D''} = \text{Id} \quad \text{et} \quad V_{D''} = \widehat{\mathfrak{S}}.$$

On fixe un isomorphisme de K_0 -espaces vectoriels $D = D' \oplus K_0$. On a alors $\varphi_D = \begin{pmatrix} \varphi_{D'} & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour un certain $Y \in D'$ et V_D est un $\widehat{\mathfrak{S}}$ -réseau de

${}^\varphi D \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}]$ qui est une extension de $\widehat{\mathfrak{S}}$ par $V_{D'}$. Il existe $T \in {}^\varphi D' \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}]$ tel que

$$(T, 1) \in {}^\varphi D' \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}] \oplus \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}] = {}^\varphi D \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}]$$

appartienne à V_D et T est unique modulo $V_{D'}$. En d'autres termes V_D est déterminé par un élément $T \in {}^\varphi D' \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}]/V_{D'}$.

On pose $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}' \oplus \mathfrak{S}[\frac{1}{p}]$ comme $\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]$ -module. Soit $X_0 \in \mathfrak{N}'[\frac{1}{E}]$ égal à Y modulo u . On pose $\varphi_{\mathfrak{N}} = \begin{pmatrix} \varphi_{\mathfrak{N}'} & X_0 + X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $X \in u\mathfrak{N}'[\frac{1}{E}]$ arbitraire (nous choisirons ensuite X tel que la structure de Hodge-Pink associée à $\varphi_{\mathfrak{N}}$ soit V_D).

Lemme 3.14 *Avec les notations précédentes $(\mathfrak{N}, \varphi_{\mathfrak{N}})$ est un pseudo-iso- φ/\mathfrak{S} -module.*

Démonstration. La condition (PIM) de la définition 2.1 est vérifiée car dans le produit $\varphi_{\mathfrak{N}} \varphi_{\mathfrak{N}} \dots \varphi_{\mathfrak{N}}^{n-1} \varphi_{\mathfrak{N}}$ le terme non diagonal apparaît 0 ou 1 fois, donc n'ajoute pas de dénominateur en p d'ordre plus grand qu'une constante indépendante de n , et il en va de même pour $\varphi_{\mathfrak{N}}^{-1} \dots \varphi_{\mathfrak{N}}^{-1} \varphi_{\mathfrak{N}}^{-1}$. \square

Fin de la démonstration de la proposition 3.13. On va montrer qu'on peut choisir X de sorte que si

$$\xi : D \otimes_{K_0} \mathcal{O}[\frac{1}{\lambda}] \rightarrow \mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \mathcal{O}[\frac{1}{\lambda}]$$

est l'unique morphisme congru à 1 modulo u vérifiant

$$\begin{aligned} \xi(\varphi_D \otimes 1) &= (\varphi_{\mathfrak{N}} \otimes 1)^\varphi \xi \quad \text{alors} \\ {}^\varphi \xi^{-1}(\varphi_{\mathfrak{N}}^{-1}(\mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \widehat{\mathfrak{S}})) &= \varphi_D^{-1}(\xi^{-1}(\mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \widehat{\mathfrak{S}})) \subset {}^\varphi D \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}] \end{aligned}$$

soit l'extension V_D de $\widehat{\mathfrak{S}}$ par $V_{D'}$ qui est donnée au départ (et qui est une extension absolument arbitraire). On a $\xi = \begin{pmatrix} \xi' & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour un certain

$$Z \in \mathfrak{N}' \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \mathcal{O}[\frac{1}{\lambda}] \subset \mathfrak{N}' \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}]$$

dépendant de X . Comme $\xi^{-1} = \begin{pmatrix} \xi'^{-1} & -\xi'^{-1}(Z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, il s'agit de montrer que l'on peut trouver X tel que $-\varphi_{D'}^{-1}(\xi'^{-1}(Z)) \in {}^\varphi D' \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}]$ soit égal à T

modulo $V_{D'}$. Cela est équivalent à la condition suivante :

$$Z \in \mathfrak{N}' \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}] \text{ est égal modulo } \mathfrak{N}' \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \widehat{\mathfrak{S}} \text{ à}$$

$$-\varphi_{\mathfrak{N}'}(\varphi \xi'(T)) = -\xi'(\varphi_{D'}(T)) \in \mathfrak{N}' \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} (\widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}]/\widehat{\mathfrak{S}}).$$

Calculons Z en fonction de X . Comme $\xi = \begin{pmatrix} \xi' & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie

$$\xi \begin{pmatrix} \varphi_{D'} & Y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{\mathfrak{N}'} & X_0 + X \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi \xi,$$

on obtient l'équation

$$Z = -\xi'(Y) + X_0 + X + \varphi_{\mathfrak{N}'} \varphi Z.$$

On a donc

$$Z = Z_0 + (X + \varphi_{\mathfrak{N}'} \varphi X + \varphi_{\mathfrak{N}'} \varphi \varphi_{\mathfrak{N}'} \varphi^2 X + \dots)$$

où Z_0 correspond à $X = 0$ et où la somme dans le membre de droite converge au sens suivant : si C est tel que $\varphi_{\mathfrak{N}'} \in E^{-C} \text{Hom}(\varphi \mathfrak{N}', \mathfrak{N}')$ et $X \in \frac{u}{E^C} \mathfrak{N}'$, la série $\lambda^C (X + \varphi_{\mathfrak{N}'} \varphi X + \varphi_{\mathfrak{N}'} \varphi \varphi_{\mathfrak{N}'} \varphi^2 X + \dots)$ converge dans $\mathfrak{N}' \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \mathcal{O}$. Grâce au lemme 3.2 la proposition 3.13 résulte alors du lemme suivant (avec ϕ égal à la matrice de $\varphi_{\mathfrak{N}'}$ dans une base de \mathfrak{N}'). \square

Lemme 3.15 *Soit $C \in \mathbb{N}^*$ et $\phi \in p^{-C} E^{-C} M_r(\mathfrak{S})$. Alors l'application*

$$\theta : \left(\frac{u}{E^C} \mathfrak{S}[\frac{1}{p}] \right)^r \rightarrow \frac{1}{E^C} \widehat{\mathfrak{S}}^r / \widehat{\mathfrak{S}}^r$$

qui à X associe $X + \phi \varphi X + \phi \varphi \phi \varphi^2 X + \dots$ est surjective.

Démonstration. On rappelle que $E = u^e + c_{e-1} u^{e-1} + \dots + c_0$ avec $c_i \in pW$ pour $i \in \{1, \dots, e-1\}$ et $c_0 = E(0) \in pW^\times$. On a

$$\frac{u^e}{p} = a + \frac{E}{p} \text{ avec } a = -\left(\frac{c_0}{p} + \dots + \frac{c_{e-1}}{p} u^{e-1} \right) \in W^\times + u\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}^\times.$$

Donc $\frac{u^e}{p}$ est un élément inversible de $\mathfrak{S}/E\mathfrak{S}$.

On en déduit que $\frac{u^{C_e}}{p}$ appartient à $\mathfrak{S}/E^C \mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}[\frac{1}{p}]/E^C \mathfrak{S}[\frac{1}{p}]$: la formule pour cet élément est

$$\frac{u^{C_e}}{p} = a \left(u^{(C-1)e} + u^{(C-2)e} E + \dots + E^{C-1} \right) \in \mathfrak{S}/E^C \mathfrak{S}.$$

On en déduit aussi qu'il existe un élément noté par abus $\frac{p^C}{u^e} \in \mathfrak{S}/E^C\mathfrak{S}$ tel que $u^e \frac{p^C}{u^e} = p^C$ dans $\mathfrak{S}/E^C\mathfrak{S}$: la formule pour cet élément est

$$\frac{p^C}{u^e} = a^{-1}p^{C-1} - a^{-2}p^{C-2}E + \dots + (-1)^{C-1}a^{-C}E^{C-1} \in \mathfrak{S}/E^C\mathfrak{S}.$$

L'espace d'arrivée $\frac{1}{E^C}\widehat{\mathfrak{S}}^r/\widehat{\mathfrak{S}}^r$ est muni de la topologie " u -adique" telle qu'une base de voisinage de 0 soit formée par les $u^k(\frac{1}{E^C}\mathfrak{S}^r/\mathfrak{S}^r)$ (comme dans le lemme 3.2). L'existence des éléments $\frac{u^{Ce}}{p}$ et $\frac{p^C}{u^e}$ dans $\mathfrak{S}/E^C\mathfrak{S}$ montre qu'une base de voisinage de 0 est donnée aussi par les $p^k(\frac{1}{E^C}\mathfrak{S}^r/\mathfrak{S}^r)$. On en déduit aussi que

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ on a } \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \frac{u^k}{p^l} \left(\frac{1}{E^C}\mathfrak{S}^r/\mathfrak{S}^r \right) = \frac{1}{E^C}\widehat{\mathfrak{S}}^r/\widehat{\mathfrak{S}}^r. \quad (24)$$

On écrit $\theta = \sum_{i=0}^{\infty} \theta_i$ où

$$\theta_i : \left(\frac{u}{E^C}\mathfrak{S} \left[\frac{1}{p} \right] \right)^r \rightarrow \frac{1}{E^C}\widehat{\mathfrak{S}}^r/\widehat{\mathfrak{S}}^r \text{ est défini par } \theta_i(X) = \phi^\varphi \phi \dots \phi^{i-1} \phi^{\varphi^i} X.$$

En particulier $\theta_0(X) = X$.

Soient $k > C^2$ et $l \in \mathbb{N}$. On a

$$\theta_0 \left(\left(\frac{u^{ek}}{p^l E^C}\mathfrak{S} \right)^r \right) = \frac{u^{ek}}{p^l} \left(\frac{1}{E^C}\mathfrak{S}^r/\mathfrak{S}^r \right) \quad (25)$$

$$\text{et, pour } i > 0, \theta_i \left(\left(\frac{u^{ek}}{p^l E^C}\mathfrak{S} \right)^r \right) \subset \frac{u^{e(pk-2iC^2)}}{p^l} \left(\frac{1}{E^C}\mathfrak{S}^r/\mathfrak{S}^r \right). \quad (26)$$

On doit montrer (26). Soit $i > 0$. Comme $\phi \in p^{-C}E^{-C}M_r(\mathfrak{S})$ on a

$$\theta_i \left(\left(\frac{u^{ek}}{p^l E^C}\mathfrak{S} \right)^r \right) \subset \frac{1}{p^{iC} \varphi(E)^C \dots \varphi^i(E)^C} \frac{u^{ep^i k}}{p^l} \left(\frac{1}{E^C}\mathfrak{S}^r/\mathfrak{S}^r \right).$$

Comme $\frac{\varphi^m(E)}{p} \in \widehat{\mathfrak{S}}^\times$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et comme $\frac{u^{Ce}}{p}$ appartient à $\mathfrak{S}/E^C\mathfrak{S}$ on en déduit (26). Comme $k > C^2$ on a

$$\inf_{i \in \mathbb{N}^*} p^i k - 2iC^2 = pk - 2C^2$$

et on déduit de (26) que

$$(\theta - \theta_0) \left(\left(\frac{u^{ek}}{p^l E^C}\mathfrak{S} \right)^r \right) \subset \frac{u^{e(pk-2C^2)}}{p^l} \left(\frac{1}{E^C}\mathfrak{S}^r/\mathfrak{S}^r \right). \quad (27)$$

Comme $k > C^2$ on a $e(pk - 2C^2) > ek$. On déduit donc de (25) et (27) que pour tout $k > C^2$ et $l \in \mathbb{N}$ on a

$$\theta\left(\left(\frac{u^{ek}}{p^l E^C} \mathfrak{S}\right)^r\right) = \frac{u^{ek}}{p^l} \left(\frac{1}{E^C} \mathfrak{S}^r / \mathfrak{S}^r\right). \quad (28)$$

En fixant k , en faisant varier l et en utilisant (24) on termine alors la démonstration du lemme 3.15. \square

Remarque 3.16 *On peut adapter la démonstration précédente au cas général où l'on ne suppose pas $(D'', \varphi_{D''}, V_{D''})$ trivial, en prenant $Y \in D' \otimes D''^*$, $X \in u\mathfrak{N}' \otimes \mathfrak{N}''^*[\frac{1}{E}]$, et en appliquant le lemme 3.15 à la matrice de $\varphi_{\mathfrak{N}'} \otimes {}^t\varphi_{\mathfrak{N}''}^{-1}$ dans une base de $\mathfrak{N}' \otimes \mathfrak{N}''^*$.*

4 Faiblement admissible implique admissible

Le but de ce paragraphe est d'achever la démonstration du théorème 0.6, en d'autres termes de montrer que le foncteur \mathbb{D}_{iso} de la catégorie des pseudo-iso- φ/\mathfrak{S} -modules dans la catégorie $MHP(\varphi)_{f_a}$ des φ -modules de Hodge-Pink faiblement admissibles est essentiellement surjectif.

On note $MHP(\varphi)_a$ l'image essentielle de \mathbb{D}_{iso} , et on appelle φ -modules de Hodge-Pink admissibles les objets de $MHP(\varphi)_a$. On commence par énoncer les propositions 4.4 et 4.6. Puis on montrera le théorème 0.6 en admettant les propositions 4.4 et 4.6 (cela consistera en fait à se ramener au cas où k est algébriquement clos et où les φ -modules de Hodge-Pink sont anti-effectifs et irréductibles parmi les faiblement admissibles). Le reste du paragraphe sera consacré à la démonstration des propositions 4.4 et 4.6.

Le lemme suivant est une variante du lemme 2.3.

Lemme 4.1 *Soit \mathfrak{M} un \mathfrak{S} -module libre de rang r et V un $\widehat{\mathfrak{S}}$ -réseau de $\mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}]$. Alors $\mathfrak{M}' = (\mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S}[\frac{1}{E}]) \cap V$ est un \mathfrak{S} -module libre et on a*

$$\mathfrak{M}' \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S}[\frac{1}{E}] = \mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S}[\frac{1}{E}] \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}' \otimes_{\mathfrak{S}} \widehat{\mathfrak{S}} = V.$$

Si $V \subset \mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \widehat{\mathfrak{S}}$ on a $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$ et en notant k la longueur du $\widehat{\mathfrak{S}}$ -module $\mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \widehat{\mathfrak{S}}/V$ on a $\det(\mathfrak{M}') = E^k \det(\mathfrak{M})$. L'application qui à \mathfrak{M} et V associe \mathfrak{M}' commute aux opérations tensorielles, notamment le déterminant.

Démonstration. Soit $C \in \mathbb{N}$ tel que $E^C \mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \widehat{\mathfrak{S}} \subset V \subset E^{-C} \mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \widehat{\mathfrak{S}}$. Alors \mathfrak{M}' contient $E^C \mathfrak{M}$ et est déterminé par le fait que $\mathfrak{M}'/E^C \mathfrak{M} = V/E^C \mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \widehat{\mathfrak{S}}$ dans $E^{-C} \mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \widehat{\mathfrak{S}}/E^C \mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \widehat{\mathfrak{S}}$. On en déduit facilement que \mathfrak{M}' est réflexif, et

donc libre car tout module de type fini réflexif sur un anneau local régulier de dimension 2 est libre (lemme 6 de [Ser59]). Les autres assertions sont faciles. \square

Remarque 4.2 *On pourrait aussi modifier \mathfrak{M} en d'autres diviseurs que E (par exemple $\varphi^k(E)$ pour $k \in \mathbb{N}$) ou en plusieurs diviseurs simultanément (l'ordre n'importe pas par factoriabilité de \mathfrak{S}).*

Définition 4.3 *Soit $D = (D, \varphi_D, V_D)$ un φ -module de Hodge-Pink tel que $V_D \subset U_D$.*

On définit par récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, et tout W -réseau Δ de D le sous- \mathfrak{S} -module $\beta_n(\Delta)$ de $D \otimes_{K_0} \mathfrak{S}[\frac{1}{p}]$ de la façon suivante. On pose

$$\beta_0(\Delta) = \Delta \otimes_W \mathfrak{S} \quad \text{et} \quad \beta_{n+1}(\Delta) = (\varphi_D \otimes 1)(\varphi \beta_n(\Delta) \cap V_D).$$

Puis on note $\gamma_n(\Delta)$ la réduction de $\beta_n(\Delta)$ modulo u , en d'autres termes, $\gamma_n(\Delta) = \beta_n(\Delta) \otimes_{\mathfrak{S}} W$.

Il résulte du lemme 4.1 que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n(\Delta)$ est un \mathfrak{S} -module libre de rang r et

$$\beta_n(\Delta) \left[\frac{1}{p}, \frac{1}{E}, \dots, \frac{1}{\varphi^{n-1}(E)} \right] = D \otimes_{K_0} \mathfrak{S} \left[\frac{1}{p}, \frac{1}{E}, \dots, \frac{1}{\varphi^{n-1}(E)} \right]$$

donc $\gamma_n(\Delta)$ est un W -réseau de D . Dans la suite on notera φ_D au lieu de $\varphi_D \otimes 1$. On remarque que $\beta_n(\Delta)$ n'est pas un \mathfrak{S} -réseau de $D \otimes_{K_0} \mathfrak{S}[\frac{1}{p}]$ si $n > 0$ et $V_D \subsetneq U_D$. On a

$$\beta_n(\Delta) = \varphi_D \dots \varphi_D^{\varphi^{n-1}} \varphi_D(\varphi^n \Delta \otimes_W \mathfrak{S}) \cap (\varphi_D \dots \varphi_D^{\varphi^{n-1}} \varphi_D^{\varphi^{n-1}} V_D \oplus \dots \oplus \varphi_D V_D). \quad (29)$$

Dans cette formule $\varphi^i V_D$ est un $\widehat{\mathfrak{S}}_i$ -réseau de $\varphi^{i+1} D \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}_i[\frac{1}{\varphi^i(E)}]$ et l'intersection a lieu dans

$$D \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}_{n-1} \oplus \dots \oplus D \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}_0$$

où $\varphi_D \dots \varphi_D^{\varphi^{n-1}} \varphi_D(\varphi^n \Delta \otimes_W \mathfrak{S})$ s'envoie diagonalement.

Proposition 4.4 *Soit $D = (D, \varphi_D, V_D)$ un φ -module de Hodge-Pink tel que $V_D \subset U_D$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) *pour tout W -réseau Δ de D (ou pour un W -réseau Δ) il existe une constante C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p^C \Delta \subset \gamma_n(\Delta) \subset p^{-C} \Delta$.*
- ii) *D est admissible.*

On rappelle que si $(D, \varphi_D), (D', \varphi_{D'}), (D'', \varphi_{D''})$ sont des φ -modules de Hodge-Pink, une suite exacte courte $0 \rightarrow D' \rightarrow D \rightarrow D'' \rightarrow 0$ dans la catégorie des φ -modules de Hodge-Pink est une suite exacte dans la catégorie des φ -modules telle que $V_{D''}$ soit l'image de V_D dans $D'' \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}]$ et $V_{D'}$ l'intersection de V_D avec $D' \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}]$. Dans cette situation on a clairement $t_N(D) = t_N(D') + t_N(D'')$ et $t_H(D) = t_H(D') + t_H(D'')$. Le lemme suivant est immédiat.

Lemme 4.5 *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- *i) D est faiblement admissible et $t_H(D') = t_N(D')$,*
- *ii) D' et D'' sont faiblement admissibles.* □

Un φ -module de Hodge-Pink $D = (D, \varphi_D, V_D)$ faiblement admissible est irréductible dans la catégorie $MHP(\varphi)_{fa}$ des φ -modules de Hodge-Pink faiblement admissibles si et seulement si $t_N(D) = t_H(D)$ et pour tout sous- φ -module D' autre que 0 et D , $t_H(D') < t_N(D')$.

Proposition 4.6 *On suppose k algébriquement clos. Soit $D = (D, \varphi_D, V_D)$ un objet irréductible dans la catégorie $MHP(\varphi)_{fa}$ et tel que $V_D \subset U_D$.*

Alors pour tout réseau Δ de D (ou de façon équivalente pour un réseau Δ de D) il existe une constante $C \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p^C \Delta \subset \gamma_n(\Delta) \subset p^{-C} \Delta$.

Début de la démonstration du théorème 0.6 en admettant les propositions 4.4 et 4.6. On a vu au paragraphe précédent que le foncteur \mathbb{D}_{iso} de la catégorie des pseudo-iso- φ/\mathfrak{S} -modules dans la catégorie $MHP(\varphi)_{fa}$ des φ -modules de Hodge-Pink faiblement admissibles est pleinement fidèle. Il reste donc à montrer

(A1) : tout objet (D, φ_D, V_D) dans la catégorie $MHP(\varphi)_{fa}$ est admissible.

On considère les énoncés suivants, dont chacun est plus faible que le précédent.

(A2) : tout objet (D, φ_D, V_D) dans la catégorie $MHP(\varphi)_{fa}$ qui vérifie $V_D \subset U_D$ est admissible.

(A3) : si k est algébriquement clos, tout objet (D, φ_D, V_D) dans la catégorie $MHP(\varphi)_{fa}$ qui vérifie $V_D \subset U_D$ est admissible.

(A4) : si k est algébriquement clos, tout objet irréductible (D, φ_D, V_D) dans la catégorie $MHP(\varphi)_{fa}$ qui vérifie $V_D \subset U_D$ est admissible.

On va montrer (A4), puis (A3), puis (A2), puis (A1).

D'abord (A4) résulte de la proposition 4.6 et de $i) \Rightarrow ii)$ dans la proposition 4.4.

On montre maintenant (A3) à l'aide de (A4). Soit $D = (D, \varphi_D, V_D)$ comme dans (A3). D'après le lemme 4.5, D admet en tant que φ -module

de Hodge-Pink une filtration $0 = D_0 \subset D_1 \subset \dots \subset D_r = D$ où chaque quotient D_i/D_{i-1} est irréductible dans la catégorie $MHP(\varphi)_{fa}$ et vérifie $V_{D_i/D_{i-1}} \subset U_{D_i/D_{i-1}}$. Grâce à (A4), chaque quotient D_i/D_{i-1} est admissible. Or la proposition 3.13 montre qu'une extension de φ -modules de Hodge-Pink admissibles est admissible et donc D est admissible. On a montré (A3).

On montre maintenant (A2) à l'aide de (A3). Soit $D = (D, \varphi_D, V_D)$ comme dans (A2). Le lemme suivant est bien connu des spécialistes. On note $\overline{\mathfrak{S}}$ et $\widehat{\mathfrak{S}}$ les anneaux définis comme \mathfrak{S} et $\widehat{\mathfrak{S}}$ en remplaçant k par \overline{k} , c'est-à-dire que $\overline{\mathfrak{S}} = W(\overline{k})[[u]]$ et $\widehat{\mathfrak{S}}$ est le complété de $\overline{\mathfrak{S}}[\frac{1}{p}]$ pour la topologie E -adique. On appelle φ -module de Hodge-Pink sur \overline{k} un triplet $\overline{D} = (\overline{D}, \varphi_{\overline{D}}, V_{\overline{D}})$, où \overline{D} est un $W(\overline{k})[\frac{1}{p}]$ -espace vectoriel de dimension finie, $\varphi_{\overline{D}} : {}^\varphi\overline{D} \rightarrow \overline{D}$ est un isomorphisme de $W(\overline{k})[\frac{1}{p}]$ -espaces vectoriels et $V_{\overline{D}}$ est un $\widehat{\mathfrak{S}}$ -module libre qui est un réseau dans ${}^\varphi\overline{D} \otimes_{W(\overline{k})[\frac{1}{p}]} \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}]$.

Lemme 4.7 *Soit D un φ -module de Hodge-Pink, et $\overline{D} = D \otimes_{K_0} W(\overline{k})[\frac{1}{p}]$ le φ -module de Hodge-Pink sur \overline{k} qui s'en déduit (on a par exemple $V_{\overline{D}} = V_D \otimes_{\widehat{\mathfrak{S}}} \widehat{\mathfrak{S}}$). Alors si D est faiblement admissible, \overline{D} est faiblement admissible.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Soit $\overline{D}_0 \subset \overline{D}$ un sous- φ -module sur \overline{k} tel que $t_H(\overline{D}_0) > t_N(\overline{D}_0)$, et minimal pour cette propriété, ce qui fait que tout quotient \overline{D}_0'' de \overline{D}_0 vérifie $t_H(\overline{D}_0'') > t_N(\overline{D}_0'')$. Alors $\overline{D}_1 = \sum_{\gamma \in \text{Gal}(\overline{k}/k)} \gamma(\overline{D}_0)$ provient d'un sous- φ -module D_1 de D (parce que $k = \overline{k}^{\text{Gal}(\overline{k}/k)}$), et en tant que φ -module de Hodge-Pink sur \overline{k} , \overline{D}_1 est une extension successive de quotients de $\gamma(\overline{D}_0)$ pour $\gamma \in \text{Gal}(\overline{k}/k)$, donc on a $t_H(D_1) = t_H(\overline{D}_1) > t_N(\overline{D}_1) = t_N(D_1)$, ce qui contredit la faible admissibilité de D . \square

Fin de la démonstration du théorème 0.6 en admettant les propositions 4.4 et 4.6. On termine la preuve de (A2) à l'aide de (A3). Grâce au lemme 4.7, $\overline{D} = D \otimes_{K_0} W(\overline{k})[\frac{1}{p}]$ est faiblement admissible. Grâce à (A3), \overline{D} est admissible en tant que φ -module de Hodge-Pink sur \overline{k} (c'est-à-dire qu'il est associé à un pseudo-iso- φ/\mathfrak{S} -module sur $\overline{\mathfrak{S}}$). Par $ii) \Rightarrow i)$ de la proposition 4.4 (appliquée à \overline{k} au lieu de k) il satisfait la conclusion $i)$ de la proposition 4.4. Il en résulte immédiatement que D satisfait la conclusion $i)$ de la proposition 4.4 et par $i) \Rightarrow ii)$ de la proposition 4.4, D est admissible. On a montré (A2).

Enfin (A1) résulte de (A2). En effet, on s'y ramène en multipliant φ_D par p^{-k} et V_D par E^k pour un entier k assez grand (cela ne change pas

la faible admissibilité, et si $(D, p^{-k}\varphi_D, E^k V_D)$ est associé à un pseudo-iso- φ/\mathfrak{S} -module $(\mathfrak{N}, \varphi_{\mathfrak{N}})$, (D, φ_D, V_D) est associé à $(\mathfrak{N}, E^k \varphi_{\mathfrak{N}})$. On a terminé la démonstration du théorème 0.6. \square

Nous passons maintenant à la démonstration des propositions 4.4 et 4.6. Nous commençons par des propriétés générales de β_n et γ_n . Regardons déjà ce qui se passe quand $r = \dim V$ vaut 1. Plus précisément prenons $t_H \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$, $t_N \in \mathbb{Z}$ et posons $D = K_0$, $\varphi_D = p^{t_N}$, $V_D = E^{-t_H} U_D$ et $\Delta = W$. On a alors

$$\beta_n(\Delta) = p^{n(t_N - t_H)} \left(\prod_{m=0}^{n-1} \varphi^m \left(\frac{E}{E(0)} \right) \right)^{-t_H} \mathfrak{S} \quad \text{et} \quad \gamma_n(\Delta) = p^{n(t_N - t_H)} W.$$

On voit que la condition i) de la proposition 4.4 est vérifiée si et seulement si $t_N = t_H$. On suppose $t_N = t_H = t \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$. Alors (D, φ_D, V_D) est admissible (comme le prévoit la proposition 4.4) et il est associé au pseudo-iso- φ/\mathfrak{S} -module $(\mathfrak{N}, \varphi_{\mathfrak{N}}) = (\mathfrak{S}[\frac{1}{p}], (\frac{p}{E(0)} E)^t)$. Si on note $\mathfrak{M} = \mathfrak{S} \subset \mathfrak{N}$ on a $\xi^{-1}(\mathfrak{M}) = \lambda^{-t} \mathfrak{S} = \varphi^n \lambda^{-t} \beta_n(\Delta)$. On voit que la suite $\beta_n(\Delta)$ “converge” vers $\xi^{-1}(\mathfrak{M})$ car $\varphi^n(\lambda)$ est une unité dans $\mathfrak{S}[[\frac{u^{ep^n}}{p}]]$. Plus généralement pour tout \mathfrak{S} -module \mathfrak{M} libre de rang 1 muni d’un isomorphisme $\mathfrak{M}[\frac{1}{p}] = \mathfrak{N}$ il existe C tel que pour tout n on ait

$$p^C \beta_n(\Delta) \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p} \right] \right] \subset \xi^{-1}(\mathfrak{M}) \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p} \right] \right] \subset p^{-C} \beta_n(\Delta) \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p} \right] \right]. \quad (30)$$

Dans la formule précédente on a utilisé la convention suivante, qui servira dans toute la suite :

$$\text{si } Q \text{ est un } \mathfrak{S}\text{-module libre on note } Q \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p} \right] \right] = Q \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S} \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p} \right] \right].$$

On verra dans la remarque 4.11 que les inclusions (30) ont lieu pour tout pseudo-iso- φ/\mathfrak{S} -module $(\mathfrak{N}, \varphi_{\mathfrak{N}})$ et elles joueront un rôle heuristique fondamental dans la preuve de “i) implique ii)” dans la proposition 4.4.

Le lemme suivant établit quelques propriétés satisfaites par $\beta_n(\Delta)$ et $\gamma_n(\Delta)$.

Lemme 4.8 *Soient (D, φ_D, V_D) et Δ comme dans la définition 4.3. On suppose $t_N(D) = t_H(D)$. Alors il existe une constante C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

- a) $\beta_{n+1}(\Delta) \subset (\varphi_D \otimes 1)(\varphi \beta_n(\Delta))$ et $\beta_{n+1}(\Delta) \subset p^{-C} \beta_n(\Delta)$,
- b) les réseaux $\det(\gamma_n(\Delta))$ et $\det(\Delta)$ dans $\det(D)$ sont égaux et deux réseaux de D quelconques U et U' parmi $\gamma_n(\Delta)$, $\gamma_{n+1}(\Delta)$, $\varphi_D(\varphi \gamma_n(\Delta))$, $\varphi_D(\varphi \gamma_{n+1}(\Delta))$ vérifient $U \subset p^{-C} U'$,

– c) pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$\beta_n(\Delta) \bmod u^{p^k} \subset p^{-kC} \gamma_n(\Delta) \otimes_W \mathfrak{S} \bmod u^{p^k},$$

– d) on a

$$p^C \gamma_n(\Delta) \otimes_W \mathfrak{S} \left[\left[\frac{u^e}{p} \right] \right] \subset \beta_n(\Delta) \left[\left[\frac{u^e}{p} \right] \right] \subset p^{-C} \gamma_n(\Delta) \otimes_W \mathfrak{S} \left[\left[\frac{u^e}{p} \right] \right],$$

– e) pour tout $n' \in \mathbb{N}$ on a

$$p^C \gamma_{n+n'}(\Delta) \subset \gamma_n \circ \gamma_{n'}(\Delta) \subset p^{-C} \gamma_{n+n'}(\Delta).$$

Démonstration. D'abord l'inclusion évidente $\beta_{n+1}(\Delta) \subset (\varphi_D \otimes 1)(\varphi \beta_n(\Delta))$ implique $\gamma_{n+1}(\Delta) \subset \varphi_D(\varphi \gamma_n(\Delta))$. Il existe $C \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi_D(\varphi \Delta) \subset p^{-C} \Delta$. Cela implique $\beta_1(\Delta) \subset p^{-C} \beta_0(\Delta)$. On a alors pour tout n , $\beta_{n+1}(\Delta) \subset p^{-C} \beta_n(\Delta)$, ce qui termine la preuve de a). On en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_{n+1}(\Delta) \subset p^{-C} \gamma_n(\Delta)$. La construction de $\beta_n(\Delta)$ et de $\gamma_n(\Delta)$ commute au déterminant : le fait que l'intersection avec V_D commute au déterminant, et en fait à toute opération tensorielle, n'est pas évident, c'est une conséquence du lemme 4.1. On a donc

$$\det(\beta_n(\Delta)) = \left(\prod_{m=0}^{n-1} \varphi^m \left(\frac{E}{E(0)} \right) \right)^{-t_N(D)} \det(\Delta) \otimes_W \mathfrak{S}$$

comme sous- \mathfrak{S} -module de $\det(D) \otimes_{K_0} \mathfrak{S} \left[\left[\frac{1}{p} \right] \right]$, et donc $\det(\gamma_n(\Delta)) = \det(\Delta)$ comme W -réseau de $\det(D)$. Comme

$$\gamma_{n+1}(\Delta) \subset \varphi_D(\varphi \gamma_n(\Delta)), \quad \gamma_{n+1}(\Delta) \subset p^{-C} \gamma_n(\Delta) \quad \text{et} \quad \det(\gamma_n(\Delta)) = \det(\Delta)$$

il existe une nouvelle constante C indépendante de n telle que la propriété b) du lemme soit vraie.

On déduit de l'inclusion évidente $\beta_{n+1}(\Delta) \subset (\varphi_D \otimes 1)(\varphi \beta_n(\Delta))$ que pour tout n on a

$$\begin{aligned} \beta_n(\Delta) \bmod u^p &\subset \varphi_D(\varphi \gamma_{n-1}(\Delta)) \otimes_W \mathfrak{S} \bmod u^p, \\ \beta_n(\Delta) \bmod u^{p^2} &\subset \varphi_D \varphi_D(\varphi^2 \gamma_{n-2}(\Delta)) \otimes_W \mathfrak{S} \bmod u^{p^2} \dots \end{aligned}$$

Grâce à b), la propriété c) en découle.

Par la propriété c) il existe une constante C indépendante de n telle que

$$\beta_n(\Delta) \subset p^{-C} \gamma_n(\Delta) \otimes_W \mathfrak{S} \left[\left[\frac{u^e}{p} \right] \right].$$

Mais le déterminant de $\beta_n(\Delta)$ et celui de $\gamma_n(\Delta)$ diffèrent par

$$\left(\prod_{m=0}^{n-1} \varphi^m \left(\frac{E}{E(0)} \right) \right)^{t_N(D)}$$

qui est une unité de $\mathfrak{S}[[\frac{u^e}{p}]]$. On en déduit qu'il existe une constante C indépendante de n telle que d) soit vrai.

La propriété e) est plus difficile à démontrer. Elle jouera un grand rôle dans la démonstration de la proposition 4.6. Bien sûr il suffit de montrer l'une des deux inclusions car les réseaux $\gamma_n \circ \gamma_{n'}(\Delta)$ et $\gamma_{n+n'}(\Delta)$ ont des déterminants égaux. C'est l'inclusion de droite que nous allons démontrer.

Par (29) on a

$$\begin{aligned} \beta_n(\gamma_{n'}(\Delta)) &= \varphi_D \dots \varphi_D^{\varphi^{n-1}} \varphi_D(\varphi^n \gamma_{n'}(\Delta) \otimes_W \mathfrak{S}) \\ &\cap (\varphi_D \dots \varphi_D^{\varphi^{n-1}} \varphi_D^{\varphi^{n-1}} V_D \oplus \dots \oplus \varphi_D V_D). \end{aligned} \quad (31)$$

D'après d) on a

$$\varphi^n \gamma_{n'}(\Delta) \otimes_W \mathfrak{S} \subset p^{-C} \varphi^n \beta_{n'}(\Delta) \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p} \right] \right] \quad (32)$$

et (31) implique alors

$$\begin{aligned} \beta_n(\gamma_{n'}(\Delta)) &\subset p^{-C} \varphi_D \dots \varphi_D^{\varphi^{n-1}} \varphi_D(\varphi^n \beta_{n'}(\Delta) \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p} \right] \right]) \\ &\cap (\varphi_D \dots \varphi_D^{\varphi^{n-1}} \varphi_D^{\varphi^{n-1}} V_D \oplus \dots \oplus \varphi_D V_D). \end{aligned} \quad (33)$$

On rappelle que $s \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ est tel que $V_D \supset E^{-s} U_D$. On applique le lemme 4.9 ci-dessous à

$$\mathcal{M} = \varphi_D \dots \varphi_D^{\varphi^{n-1}} \varphi_D(\varphi^n \beta_{n'}(\Delta)), \quad \mathcal{V}_0 = \varphi_D V_D, \dots, \quad \mathcal{V}_{n-1} = \varphi_D \dots \varphi_D^{\varphi^{n-1}} \varphi_D^{\varphi^{n-1}} V_D.$$

Comme $\mathcal{M} \cap (\mathcal{V}_0 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_{n-1}) = \beta_{n+n'}(\Delta)$ le lemme 4.9 implique

$$\left(\mathcal{M} \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p} \right] \right] \right) \cap (\mathcal{V}_0 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_{n-1}) \subset p^{-C_1} \beta_{n+n'}(\Delta) \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p} \right] \right]. \quad (34)$$

L'inclusion (33) se réécrit

$$\beta_n(\gamma_{n'}(\Delta)) \subset p^{-C} \left(\mathcal{M} \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p} \right] \right] \right) \cap (\mathcal{V}_0 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_{n-1}). \quad (35)$$

Les inclusions (34) et (35) impliquent

$$\beta_n(\gamma_{n'}(\Delta)) \subset p^{-C-C_1} \beta_{n+n'}(\Delta) \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p} \right] \right]$$

d'où $\gamma_n(\gamma_{n'}(\Delta)) = \beta_n(\gamma_{n'}(\Delta)) \bmod u \subset p^{-C-C_1} \gamma_{n+n'}(\Delta)$,

ce qui achève la démonstration du lemme 4.8. \square

Lemme 4.9 *Pour tout $s \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ il existe une constante C_1 telle que l'énoncé suivant soit vrai. Soit $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{M} un \mathfrak{S} -module libre de rang r , et pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$ soit \mathcal{V}_i un $\widehat{\mathfrak{S}}_i$ -module libre de rang r vérifiant*

$$\varphi^i(E)^{-s} \mathcal{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \widehat{\mathfrak{S}}_i \subset \mathcal{V}_i \subset \mathcal{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \widehat{\mathfrak{S}}_i.$$

Alors $\mathcal{M} \cap (\mathcal{V}_0 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_{n-1})$ est un \mathfrak{S} -module libre de rang r et on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{M} \cap (\mathcal{V}_0 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_{n-1})) \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p} \right] \right] &\subset (\mathcal{M} \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p} \right] \right]) \cap (\mathcal{V}_0 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_{n-1}) \\ &\subset p^{-C_1} (\mathcal{M} \cap (\mathcal{V}_0 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_{n-1})) \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p} \right] \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

Démonstration. D'après le lemme 4.1, $\check{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cap (\mathcal{V}_0 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_{n-1})$ est un \mathfrak{S} -module libre de rang r et

$$\mathcal{V}_i = \check{\mathcal{M}} \otimes_{\mathfrak{S}} \widehat{\mathfrak{S}}_i \quad \text{pour tout } i \in \{0, \dots, n-1\}. \quad (37)$$

La première inclusion de (36) est évidente et pour la deuxième on remarque que, grâce à (37),

$$\begin{aligned} &(\mathcal{M} \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p} \right] \right]) \cap (\mathcal{V}_0 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_{n-1}) \\ &\subset \check{\mathcal{M}} \otimes_{\mathfrak{S}} \left(\left((E \dots \varphi^{n-1}(E))^s \mathfrak{S} \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p} \right] \right] \right) \cap (\widehat{\mathfrak{S}}_{n-1} \oplus \dots \oplus \widehat{\mathfrak{S}}_0) \right) \end{aligned}$$

et on applique le lemme suivant. \square

Lemme 4.10 *Pour tout $s \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ il existe une constante C_1 , telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\left((E \dots \varphi^{n-1}(E))^s \mathfrak{S} \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p} \right] \right] \right) \cap (\widehat{\mathfrak{S}}_{n-1} \oplus \dots \oplus \widehat{\mathfrak{S}}_0) \subset p^{-C_1} \mathfrak{S} \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p} \right] \right].$$

Démonstration. On prend pour C_1 le plus petit entier supérieur ou égal à $1 + (-s)(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots)$. On a

$$\left((E \dots \varphi^{n-1}(E))^s \mathfrak{S}\left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p}\right]\right] \right) \cap (\widehat{\mathfrak{S}}_{n-1} \oplus \dots \oplus \widehat{\mathfrak{S}}_0) \subset \mathfrak{S}\left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p}\right]\right]\left[\frac{1}{p}\right].$$

En effet pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$ on a

$$\varphi^i(E)^s \mathfrak{S}\left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p}\right]\right]\left[\frac{1}{p}\right] \cap \widehat{\mathfrak{S}}_i = \mathfrak{S}\left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p}\right]\right]\left[\frac{1}{p}\right].$$

On possède sur $\mathfrak{S}\left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p}\right]\right]\left[\frac{1}{p}\right]$ la norme $|\cdot|_{|\pi_K|^{p-n}}$. On a alors pour tout entier $r \in \mathbb{Z}$,

$$p^r \mathfrak{S}\left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p}\right]\right] \subset \{x \in \mathfrak{S}\left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p}\right]\right]\left[\frac{1}{p}\right], |x|_{|\pi_K|^{p-n}} \leq |p|^r\} \subset p^{r-1} \mathfrak{S}\left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p}\right]\right].$$

Grâce à (12), le lemme en résulte. \square

Démonstration de “ii) implique i)” dans la proposition 4.4. Soit $(\mathfrak{M}, \varphi_{\mathfrak{M}})$ un φ/\mathfrak{S} -module dont l'image par \mathbb{D}_{iso} est $D = (D, \varphi_D, V_D)$. Pour vérifier i) choisissons $\Delta = \mathfrak{M} \bmod u$. Comme $\mathcal{O}\left[\frac{1}{\lambda}\right] \subset \mathfrak{S}\left[\left[\frac{u^e}{p}\right]\right]\left[\frac{1}{p}\right]$, le lemme 3.5 montre qu'il existe C tel que $\xi^{-1}(\mathfrak{M}) \subset p^{-C} \beta_0(\Delta)\left[\left[\frac{u^e}{p}\right]\right]$. Quitte à augmenter C on suppose de plus que l'énoncé du lemme 4.8 est vrai pour cette valeur de C (le lemme 4.8 s'applique car $t_N(D) = t_H(D)$ puisque D est admissible).

On en déduit $\varphi^n(\xi^{-1}(\mathfrak{M})) \subset p^{-C} \varphi^n \beta_0(\Delta)\left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p}\right]\right]$. Par factorialité de \mathfrak{S} on a

$$\mathfrak{M} = \varphi_{\mathfrak{M}}(\varphi_{\mathfrak{M}} \cap (\varphi_{\mathfrak{M}}^{-1}(\mathfrak{M}) \otimes_{\mathfrak{S}} \widehat{\mathfrak{S}})).$$

Autrement dit $\xi^{-1}(\mathfrak{M}) = \varphi_D(\varphi(\xi^{-1}(\mathfrak{M})) \cap V_D)$ d'où

$$\begin{aligned} \xi^{-1}(\mathfrak{M}) &= \varphi_D \dots \varphi^{n-1} \varphi_D \left(\varphi^n(\xi^{-1}(\mathfrak{M})) \right) \cap (\varphi_D \dots \varphi^{n-1} \varphi_D \varphi^{n-1} V_D \oplus \dots \oplus \varphi_D V_D) \\ &\subset p^{-C} \varphi_D \dots \varphi^{n-1} \varphi_D \left(\varphi^n \beta_0(\Delta) \right) \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p} \right] \right] \cap (\varphi_D \dots \varphi^{n-1} \varphi_D \varphi^{n-1} V_D \oplus \dots \oplus \varphi_D V_D). \end{aligned} \tag{38}$$

On applique le lemme 4.9 à

$$\mathcal{M} = \varphi_D \varphi \varphi_D \dots \varphi^{n-1} \varphi_D \left(\varphi^n \beta_0(\Delta) \right), \mathcal{V}_0 = \varphi_D V_D, \dots, \mathcal{V}_{n-1} = \varphi_D \dots \varphi^{n-1} \varphi_D \varphi^{n-1} V_D.$$

L'inclusion (38) se réécrit

$$\xi^{-1}(\mathfrak{M}) \subset p^{-C} \mathcal{M} \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p} \right] \right] \cap (\mathcal{V}_0 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_{n-1})$$

et par définition de $\beta_n(\Delta)$ on a

$$\beta_n(\Delta) = \mathcal{M} \cap (\mathcal{V}_0 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_{n-1}).$$

Donc le lemme 4.9 implique

$$\xi^{-1}(\mathfrak{M}) \subset p^{-C-C_1} \beta_n(\Delta) \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p} \right] \right]. \quad (39)$$

On en déduit $\Delta = \xi^{-1}(\mathfrak{M}) \bmod u \subset p^{-C-C_1} \gamma_n(\Delta)$. Ceci montre l'une des inclusions de i) de la proposition 4.4, mais l'autre en résulte car $t_N(D) = t_H(D)$ et donc $\det(\gamma_n(\Delta)) = \det(\Delta)$. Ceci achève la démonstration de "ii) implique i)" dans la proposition 4.4.

Remarque 4.11 *L'inclusion (39) et un argument de déterminants montrent qu'il existe C tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait*

$$p^C \beta_n(\Delta) \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p} \right] \right] \subset \xi^{-1}(\mathfrak{M}) \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p} \right] \right] \subset p^{-C} \beta_n(\Delta) \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p} \right] \right]. \quad (40)$$

On pourrait en déduire une autre preuve de la proposition 3.11 "admissible implique faiblement admissible". Mais le plus important est que (40) justifie a posteriori la construction du pseudo-iso- φ/\mathfrak{S} -module $(\mathfrak{N}, \varphi_{\mathfrak{N}})$ dans la preuve de "i) implique ii)" que nous allons donner maintenant.

Début de la démonstration de "i) implique ii)" dans la proposition 4.4. On a $\det(\gamma_n(\Delta)) = p^{n(t_N(D) - t_H(D))}$. La condition i) entraîne que $t_N(D) = t_H(D)$, ce qui permet d'appliquer le lemme 4.8. On fixe un réseau Δ de D .

Lemme 4.12 *Sous la condition i) de la proposition 4.4 il existe C tel que pour tous les entiers $m, n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq m$, on ait*

$$p^C \beta_m(\Delta) \left[\left[\frac{u^{ep^m}}{p} \right] \right] \subset \beta_n(\Delta) \left[\left[\frac{u^{ep^m}}{p} \right] \right] \subset p^{-C} \beta_m(\Delta) \left[\left[\frac{u^{ep^m}}{p} \right] \right]. \quad (41)$$

Remarque 4.13 *Si on considère (40) comme une propriété de "convergence" de la suite $\beta_n(\Delta) \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p} \right] \right]$ vers $\xi^{-1}(\mathfrak{M}) \left[\left[\frac{1}{p} \right] \right]$, le lemme précédent affirme que (sous l'hypothèse i)) la suite $\beta_n(\Delta) \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p} \right] \right]$ est "de Cauchy". Le lemme 4.14 ci-dessous affirme que si une suite est "de Cauchy", elle "converge" et la combinaison des lemmes 4.12 et 4.14 permettra de construire le pseudo-iso- φ/\mathfrak{S} -module $(\mathfrak{N}, \varphi_{\mathfrak{N}})$ comme "limite" de la suite $\beta_n(\Delta) \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p} \right] \right]$.*

Démonstration du lemme 4.12. Pour montrer l'inégalité de droite de (41) on applique le lemme 4.9 avec m à la place de n et

$$\mathcal{M} = \varphi_D \dots \varphi_D^{\varphi^{m-1}} \varphi_D(\varphi^m \beta_0(\Delta)), \mathcal{V}_0 = \varphi_D V_D, \dots, \mathcal{V}_{m-1} = \varphi_D \dots \varphi_D^{\varphi^{m-1}} \varphi_D^{\varphi^{m-1}} V_D.$$

On a

$$\beta_m(\Delta) = \mathcal{M} \cap (\mathcal{V}_0 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_{m-1}) \quad (42)$$

$$\text{et } \beta_n(\Delta) = \varphi_D \dots \varphi_D^{\varphi^{m-1}} \varphi_D(\varphi^m \beta_{n-m}(\Delta)) \cap (\mathcal{V}_0 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_{m-1}). \quad (43)$$

Or

$$\begin{aligned} \beta_{n-m}(\Delta) &\subset p^{-C} \gamma_{n-m}(\Delta) \otimes_W \mathfrak{S}\left[\left[\frac{u^e}{p}\right]\right] \\ &\subset p^{-C-C'} \gamma_0(\Delta) \otimes_W \mathfrak{S}\left[\left[\frac{u^e}{p}\right]\right] = p^{-C-C'} \beta_0(\Delta) \left[\left[\frac{u^e}{p}\right]\right] \end{aligned}$$

grâce à la propriété d) du lemme 4.8 et à la condition i) de la proposition 4.4 (en notant C' la constante qui y apparaît). D'où

$$\varphi^m \beta_{n-m}(\Delta) \subset p^{-C-C'} \varphi^m \beta_0(\Delta) \left[\left[\frac{u^{ep^m}}{p}\right]\right]$$

et par (43) on a donc

$$\beta_n(\Delta) \subset p^{-C-C'} \mathcal{M} \left[\left[\frac{u^{ep^m}}{p}\right]\right] \cap (\mathcal{V}_0 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_{m-1}). \quad (44)$$

Grâce à (42) et (44) le lemme 4.9 implique

$$\beta_n(\Delta) \subset p^{-C-C'-C_1} \beta_m(\Delta) \left[\left[\frac{u^{ep^m}}{p}\right]\right].$$

Donc on a établi l'inégalité de droite de (41), et un argument de déterminants permet d'en déduire l'inégalité de gauche. \square

Suite de la démonstration de "i) implique ii)" dans la proposition 4.4. On va appliquer le lemme suivant à $\mathfrak{M}_n = \beta_n(\Delta) \left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p}\right]\right]$. On rappelle que $\mathcal{A} = K_0[[u]]$ est le complété de $\mathfrak{S}\left[\left[\frac{1}{p}\right]\right]$ pour la topologie u -adique.

Lemme 4.14 *Soit P un \mathcal{A} -module libre de rang r et pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit \mathfrak{M}_n un $\mathfrak{S}\left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p}\right]\right]$ -module libre de rang r muni d'un isomorphisme $\mathfrak{M}_n \otimes_{\mathfrak{S}\left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p}\right]\right]} \mathcal{A} = P$. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq m$ on ait*

$$p^C \mathfrak{M}_m \subset \mathfrak{M}_n \otimes_{\mathfrak{S}\left[\left[\frac{u^{ep^n}}{p}\right]\right]} \mathfrak{S}\left[\left[\frac{u^{ep^m}}{p}\right]\right] \subset p^{-C} \mathfrak{M}_m \text{ dans } P. \quad (45)$$

Alors il existe un unique $\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]$ -module \mathfrak{N} libre de rang r muni d'un isomorphisme $\mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \mathcal{A} = P$ tel que pour tout \mathfrak{S} -réseau \mathfrak{M} dans \mathfrak{N}

$$\text{il existe } C' \in \mathbb{N} \text{ tel que } p^{C'} \mathfrak{M}_m \subset \mathfrak{M} \left[\left[\frac{u^{ep^m}}{p} \right] \right] \subset p^{-C'} \mathfrak{M}_m \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}. \quad (46)$$

On a de plus

$$\mathfrak{N} = \{x \in P, \exists k \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{N}, x \in p^k \mathfrak{M}_m\}. \quad (47)$$

Début de la démonstration du lemme 4.14. Cela résultera du lemme suivant, appliqué à $Q_m = \mathfrak{M}_m \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{u^{ep^m}}]} \mathfrak{S}/u^{ep^m} \mathfrak{S}$. On remarque que $\mathcal{A}/u^k \mathcal{A} = (\mathfrak{S}/u^k \mathfrak{S})[\frac{1}{p}]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Lemme 4.15 Soit P un \mathcal{A} -module libre de rang r , et pour tout $m \in \mathbb{N}$ soit Q_m un sous- $(\mathfrak{S}/u^{ep^m} \mathfrak{S})$ -module libre de rang r de $P/u^{ep^m} P$ tel que $Q_m \otimes_{\mathfrak{S}/u^{ep^m} \mathfrak{S}} \mathcal{A}/u^{ep^m} \mathcal{A} = P/u^{ep^m} P$. On suppose qu'il existe $C \in \mathbb{N}$, tel que pour $m, n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq m$, en notant $(Q_n \text{ mod } u^{ep^m})$ l'image de Q_n dans $P/u^{ep^m} P$, on ait

$$p^C Q_m \subset (Q_n \text{ mod } u^{ep^m}) \subset p^{-C} Q_m. \quad (48)$$

Alors

$$\mathfrak{N} = \{x \in P, \exists k \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{N}, x \text{ mod } u^{ep^m} \in p^k Q_m\} \quad (49)$$

est un $\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]$ -module libre de rang r muni naturellement d'un isomorphisme $\mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \mathcal{A} = P$ et si \mathfrak{M} est un \mathfrak{S} -réseau de \mathfrak{N} ,

$$\text{il existe } C' \text{ tel que pour tout } m \in \mathbb{N}, \quad p^{C'} Q_m \subset (\mathfrak{M} \text{ mod } u^{ep^m}) \subset p^{-C'} Q_m. \quad (50)$$

Remarque 4.16 L'hypothèse que Q_m est libre est bien sûr nécessaire car si on prenait $P = \mathcal{A}$ et Q_m engendré par $1, \frac{u^e}{p}, \left(\frac{u^e}{p}\right)^2, \dots, \left(\frac{u^e}{p}\right)^{p^m-1}$ la conclusion du lemme serait fausse.

Début de la démonstration du lemme 4.15. Pour tout $n \geq m \geq 0$ on note

$$Q_m^n = \sum_{i \geq n} p^C Q_i \text{ mod } u^{ep^m}.$$

Alors $(Q_m^n)_{n \geq m}$ est une suite décroissante de sous- $(\mathfrak{S}/u^{ep^m} \mathfrak{S})$ -modules de Q_m contenant $p^{2C} Q_m$. Elle est stationnaire, car $(Q_m^n / p^{2C} Q_m)_{n \geq m}$ est une suite

décroissante de sous-modules du $(\mathfrak{S}/u^{ep^m}\mathfrak{S} + p^{2C}\mathfrak{S})$ -module de longueur finie $Q_m/p^{2C}Q_m$. On note \tilde{Q}_m la limite de la suite stationnaire $(Q_m^n)_{n \geq m}$. Donc \tilde{Q}_m est un sous- $(\mathfrak{S}/u^{ep^m}\mathfrak{S})$ -module de Q_m , on a $p^{2C}Q_m \subset \tilde{Q}_m \subset Q_m$, et pour $n \geq m$ on a une surjection $\tilde{Q}_n \rightarrow \tilde{Q}_m$. Soit (x_1^0, \dots, x_r^0) une base du $(\mathfrak{S}/u^e\mathfrak{S})$ -module libre $p^{2C}Q_0$ (qui est inclus dans \tilde{Q}_0). Par récurrence sur n on choisit $x_1^n \in \tilde{Q}_n, \dots, x_r^n \in \tilde{Q}_n$ des relèvements de $x_1^{n-1}, \dots, x_r^{n-1}$ de \tilde{Q}_{n-1} à \tilde{Q}_n . Pour tout $i = 1, \dots, r$ la limite projective des x_i^n définit un élément $x_i \in P$. On a même $x_i \in \mathfrak{N}$.

On note $P^* = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, \mathcal{A})$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$ on note

$$Q_m^* = \text{Hom}_{\mathfrak{S}/u^{ep^m}\mathfrak{S}}(Q_m, \mathfrak{S}/u^{ep^m}\mathfrak{S}).$$

Comme P^* et le système des Q_m^* vérifient les conditions du lemme on peut leur associer par la construction précédente r éléments $\eta_1, \dots, \eta_r \in P^*$ tels que pour $i \in \{1, \dots, r\}$ et $n \in \mathbb{N}$ la réduction η_i^n de η_i modulo u^{ep^n} appartienne à Q_n^* et que $\eta_1^0, \dots, \eta_r^0$ forment une base de $p^{2C}Q_0^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $i, j \in \{1, \dots, r\}$, on a $\eta_i^n \in Q_n^*$ et $x_j^n \in Q_n$, d'où $\langle \eta_i, x_j \rangle \in \mathfrak{S}/u^{ep^m}\mathfrak{S}$. En passant à la limite on obtient $\langle \eta_i, x_j \rangle \in \mathfrak{S}$. Donc $a = \det(\langle \eta_i, x_j \rangle)$ est un élément de \mathfrak{S} dont la réduction modulo u est non nulle (et appartient même à $p^{4Cr}W^\times$). Pour tout $x \in \mathfrak{N}$ on a $\langle \eta_i, x \rangle \in \mathfrak{S}[\frac{1}{p}]$. Donc on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} (\mathfrak{S}[\frac{1}{p}])^r & \hookrightarrow & \mathfrak{N} & \rightarrow & (\mathfrak{S}[\frac{1}{p}])^r \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A}^r & \xrightarrow{\sim} & P & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{A}^r \end{array}$$

où les applications horizontales sont données par $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \mapsto \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_r x_r$ et $x \mapsto (\langle \eta_1, x \rangle, \dots, \langle \eta_r, x \rangle)$ et où les flèches verticales sont les inclusions évidentes. Il résulte du diagramme que l'application $\mathfrak{N} \rightarrow (\mathfrak{S}[\frac{1}{p}])^r$ est aussi une injection. Donc \mathfrak{N} est un $\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]$ -module de type fini sans torsion et il est libre de rang r grâce au lemme suivant et au théorème de structure des modules de type fini sur les anneaux principaux.

Lemme 4.17 *L'anneau $\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]$ est principal.*

Démonstration. L'anneau \mathfrak{S} est intègre, noethérien et intégralement clos dans son corps des fractions ; il en donc de même de $\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]$. Les idéaux premiers non nuls de \mathfrak{S} sont

- les idéaux principaux (f) , où f est un élément irréductible de \mathfrak{S} ,
- l'idéal maximal (p, u) .

Par conséquent les idéaux premiers non nuls de $\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]$ sont maximaux. Il en résulte déjà que $\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]$ est un anneau de Dedekind (voir par exemple [Ser68],

chapitre 1, proposition 4). De plus les idéaux premiers de $\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]$ sont principaux, comme on vient de le voir. Donc $\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]$ est principal (ibidem, chapitre 1, proposition 7). \square

Fin de la démonstration du lemme 4.15. Il reste à montrer (50). Notons \mathfrak{M}_0 le \mathfrak{S} -module libre engendré par x_1, \dots, x_r . Soit \tilde{Q} la limite projective des \tilde{Q}_n , c'est-à-dire

$$\tilde{Q} = \{x \in P, \forall m \in \mathbb{N}, x \bmod u^{ep^m} \in \tilde{Q}_m\}.$$

Alors \tilde{Q} est un sous- \mathfrak{S} -module de P qui contient x_1, \dots, x_r . Comme $\tilde{Q}_m \subset Q_m$ et $\eta_i^m \in Q_m^*$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\langle \eta_i, x \rangle \in \mathfrak{S}$ pour $i \in \{1, \dots, r\}$ et $x \in \tilde{Q}$, d'où $\tilde{Q} \subset a^{-1}\mathfrak{M}_0$. Comme \mathfrak{S} est noethérien, \tilde{Q} est donc un \mathfrak{S} -module de type fini. On a bien sûr

$$\begin{aligned} \{x \in P, \forall m \in \mathbb{N}, x \bmod u^{ep^m} \in p^{2C}Q_m\} &\subset \tilde{Q} \\ &\subset \{x \in P, \forall m \in \mathbb{N}, x \bmod u^{ep^m} \in Q_m\}, \end{aligned}$$

donc \tilde{Q} engendre le $\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]$ -module \mathfrak{N} . Soit \mathfrak{M} un \mathfrak{S} -module libre de rang r tel que $\mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S}[\frac{1}{p}] = \mathfrak{N}$. Comme \mathfrak{M} et \tilde{Q} sont des \mathfrak{S} -modules de type fini qui engendrent \mathfrak{N} , il existe C' tel que $p^{C'}\mathfrak{M} \subset \tilde{Q} \subset p^{-C'}\mathfrak{M}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a

$$p^{2C}Q_m \subset (\tilde{Q} \bmod u^{ep^m}) = \tilde{Q}_m \subset Q_m$$

et donc $p^{2C+C'}Q_m \subset (\mathfrak{M} \bmod u^{ep^m}) \subset p^{-C'}Q_m$. \square

Fin de la démonstration du lemme 4.14. Comme cela a été annoncé, on applique le lemme 4.15 à

$$Q_m = \mathfrak{M}_m \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{u^{ep^m}}{p}]]} \mathfrak{S}/u^{ep^m}\mathfrak{S}.$$

On a le droit d'appliquer le lemme 4.15 car en tensorisant (45) par $\mathfrak{S}/u^{ep^m}\mathfrak{S}$ au-dessus de $\mathfrak{S}[\frac{u^{ep^m}}{p}]$ on obtient (48). Soient \mathfrak{N} et \mathfrak{M} comme dans le lemme 4.15. Pour $n \geq m$ on note, jusqu'à la fin de la démonstration du lemme 4.14, $\mathfrak{S}_{m,n}$ l'image de $\mathfrak{S}[\frac{u^{ep^m}}{p}]$ dans $(\mathfrak{S}/u^{ep^n}\mathfrak{S})[\frac{1}{p}]$. Grâce à l'hypothèse (45), il existe C tel que pour $n \geq m$ on a

$$p^C\mathfrak{M}_m \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{u^{ep^m}}{p}]]} \mathfrak{S}_{m,n} \subset \mathfrak{M}_n \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{u^{ep^n}}{p}]]} \mathfrak{S}_{m,n} \subset p^{-C}\mathfrak{M}_m \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{u^{ep^m}}{p}]]} \mathfrak{S}_{m,n}. \quad (51)$$

Comme $\mathfrak{M}_n \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{u^{ep^n}}{p}]]} \mathfrak{S}_{m,n} = Q_n \otimes_{\mathfrak{S}/u^{ep^n}\mathfrak{S}} \mathfrak{S}_{m,n}$ il résulte alors de (50) (avec n au lieu de m) qu'il existe C tel que pour $n \geq m$ on a

$$p^C\mathfrak{M}_m \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{u^{ep^m}}{p}]]} \mathfrak{S}_{m,n} \subset \mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S}_{m,n} \subset p^{-C}\mathfrak{M}_m \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{u^{ep^m}}{p}]]} \mathfrak{S}_{m,n}. \quad (52)$$

En fixant m et en faisant tendre n vers l'infini on en déduit (46) car $\mathfrak{S}[[\frac{u^{ep^m}}{p}]] = \varprojlim \mathfrak{S}_{m,n}$. Enfin (47) résulte de (46). \square

Fin de la démonstration de “i) implique ii)” dans la proposition 4.4.

Grâce à (41) on peut appliquer le lemme 4.14 à $\mathfrak{M}_n = \beta_n(\Delta)[[\frac{u^{ep^n}}{p}]]$ et donc

$$\mathfrak{N} = \{x \in D \otimes_{K_0} \mathcal{A}, \exists k \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{N}, x \in p^k \beta_m(\Delta)[[\frac{u^{ep^m}}{p}]]\} \quad (53)$$

est un $\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]$ -module libre de rang r . On note que d'après la démonstration du lemme 4.14 on a aussi

$$\mathfrak{N} = \{x \in D \otimes_{K_0} \mathcal{A}, \exists k \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{N}, x \bmod u^{ep^m} \in p^k \beta_m(\Delta) \bmod u^{ep^m}\}$$

mais on n'utilisera pas cette formule.

On définit $\varphi_{\mathfrak{N}}^{-1} : \mathfrak{N} \rightarrow {}^\varphi\mathfrak{N}$ comme la restriction de

$$\varphi_D^{-1} : D \otimes_{K_0} \mathcal{A} \rightarrow {}^\varphi D \otimes_{K_0} \mathcal{A}$$

(a posteriori comme $V_D \subset U_D$, $\varphi_{\mathfrak{N}}^{-1}$ n'a pas de dénominateur en E , la matrice ξ^{-1} associée à \mathfrak{N} est à coefficients dans \mathcal{O} au lieu de $\mathcal{O}[\frac{1}{\lambda}]$ et $\mathfrak{N} \subset D \otimes_{K_0} \mathcal{O} \subset D \otimes_{K_0} \mathcal{A}$).

Il nous reste à montrer que $\varphi_{\mathfrak{N}}^{-1} : \mathfrak{N} \rightarrow {}^\varphi\mathfrak{N}$ est bien défini et détermine un isomorphisme de $\mathfrak{S}[\frac{1}{p}, \frac{1}{E}]$ -modules $\varphi_{\mathfrak{N}} : {}^\varphi\mathfrak{N}[\frac{1}{E}] \rightarrow \mathfrak{N}[\frac{1}{E}]$, que $(\mathfrak{N}, \varphi_{\mathfrak{N}})$ est un pseudo-iso- φ/\mathfrak{S} -module et que $D = (D, \varphi_D, V_D)$ est le φ -module de Hodge-Pink associé.

Montrons que $\varphi_D^{-1} : D \otimes_{K_0} \mathcal{A} \rightarrow {}^\varphi D \otimes_{K_0} \mathcal{A}$ envoie \mathfrak{N} dans ${}^\varphi\mathfrak{N}$ et que son image contient $E^{-s} {}^\varphi\mathfrak{N}$ où $s \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ est tel que $V_D \supset E^{-s} U_D$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$E^{-s} \varphi_D({}^\varphi \beta_n(\Delta)) \subset \beta_{n+1}(\Delta) \subset \varphi_D({}^\varphi \beta_n(\Delta)).$$

Grâce à (46) on en déduit

$$E^{-s} \varphi_D({}^\varphi\mathfrak{N}) \subset \mathfrak{N} \subset \varphi_D({}^\varphi\mathfrak{N}).$$

Donc $\varphi_{\mathfrak{N}}^{-1} : \mathfrak{N} \rightarrow {}^\varphi\mathfrak{N}$ est bien défini comme la restriction de φ_D^{-1} à \mathfrak{N} , et $\varphi_{\mathfrak{N}}^{-1}(\mathfrak{N}) \supset E^{-s} {}^\varphi\mathfrak{N}$. On montre maintenant que $(\mathfrak{N}, \varphi_{\mathfrak{N}})$ satisfait la condition (PIM). On a

$$\varphi_D {}^\varphi \varphi_D \dots {}^\varphi_{n-1} \varphi_D({}^\varphi \beta_m(\Delta)) \subset (E \dots \varphi^{n-1}(E))^s \beta_{m+n}(\Delta) \quad (54)$$

$$\text{et } \beta_{m+n}(\Delta) \subset \varphi_D {}^\varphi \varphi_D \dots {}^\varphi_{n-1} \varphi_D({}^\varphi \beta_m(\Delta)). \quad (55)$$

Soit \mathfrak{M} un \mathfrak{S} -module libre de rang r muni d'un isomorphisme $\mathfrak{M}[\frac{1}{p}] = \mathfrak{N}$. D'après (46) il existe $C' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $l, m \in \mathbb{N}$,

$$p^{C'} \mathfrak{M}[\frac{u^{ep^m}}{p}] \subset \beta_{m+l}(\Delta)[\frac{u^{ep^m}}{p}] \subset p^{-C'} \mathfrak{M}[\frac{u^{ep^m}}{p}]. \quad (56)$$

En appliquant (56) à $l = 0$ et à $l = n$ on déduit de (54) que, pour $m, n \in \mathbb{N}$,

$$p^{2C'} (E \dots \varphi^{n-1}(E))^{-s} \varphi_{\mathfrak{N}}^\varphi \varphi_{\mathfrak{N}} \dots \varphi_{\mathfrak{N}}^{\varphi^{n-1}} \varphi_{\mathfrak{N}}(\varphi^n \mathfrak{M})[\frac{u^{ep^m}}{p}] \subset \mathfrak{M}[\frac{u^{ep^m}}{p}],$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p^{2C'} (E \dots \varphi^{n-1}(E))^{-s} \varphi_{\mathfrak{N}}^\varphi \varphi_{\mathfrak{N}} \dots \varphi_{\mathfrak{N}}^{\varphi^{n-1}} \varphi_{\mathfrak{N}}(\varphi^n \mathfrak{M}) \subset \mathfrak{M}. \quad (57)$$

De la même façon on déduit de (55) que, pour tout $m, n \in \mathbb{N}$,

$$p^{2C'} \mathfrak{M}[\frac{u^{ep^m}}{p}] \subset \varphi_{\mathfrak{N}}^\varphi \varphi_{\mathfrak{N}} \dots \varphi_{\mathfrak{N}}^{\varphi^{n-1}} \varphi_{\mathfrak{N}}(\varphi^n \mathfrak{M})[\frac{u^{ep^m}}{p}]$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p^{2C'} \mathfrak{M} \subset \varphi_{\mathfrak{N}}^\varphi \varphi_{\mathfrak{N}} \dots \varphi_{\mathfrak{N}}^{\varphi^{n-1}} \varphi_{\mathfrak{N}}(\varphi^n \mathfrak{M}). \quad (58)$$

Grâce à (57) et (58), la condition (PIM) est satisfaite et donc $(\mathfrak{N}, \varphi_{\mathfrak{N}})$ est un pseudo-iso- φ/\mathfrak{S} -module.

Montrons maintenant que (D, φ_D, V_D) est associé à \mathfrak{N} . D'abord (D, φ_D) est la réduction de $(\mathfrak{N}, \varphi_{\mathfrak{N}})$ modulo u . Le raisonnement établissant l'unicité de la matrice ξ dans le lemme 3.5 montre que l'inclusion de \mathfrak{N} dans $D \otimes_{K_0} \mathcal{A}$ est ξ^{-1} .

Il reste à démontrer que V_D est bien associé à \mathfrak{N} , c'est-à-dire que $V_D = V$ où $V = \varphi_D^{-1}(\mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \widehat{\mathfrak{S}})$ est la structure de Hodge-Pink associée à $(\mathfrak{N}, \varphi_{\mathfrak{N}})$ (puisque \mathfrak{N} désigne ici $\xi^{-1}(\mathfrak{N}) \subset D \otimes_{K_0} \mathcal{A}$). On choisit $m > 0$. D'après (46) on a

$$\mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} \mathfrak{S}[\frac{u^{ep^m}}{p}][\frac{1}{p}] = \beta_m(\Delta) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S}[\frac{u^{ep^m}}{p}][\frac{1}{p}]. \quad (59)$$

Or on a une inclusion $\mathfrak{S}[\frac{u^{ep^m}}{p}][\frac{1}{p}] \subset \widehat{\mathfrak{S}}$. D'après le lemme 4.1, $\varphi_D^{-1}(\beta_m(\Delta)) \otimes_{\mathfrak{S}} \widehat{\mathfrak{S}} = V_D$ et on déduit alors de (59) que $V = V_D$. Ceci termine la démonstration de la proposition 4.4. \square

Début de la démonstration de la proposition 4.6. Dans la suite de ce paragraphe, on a besoin de la convention suivante. Si k' est un corps

parfait contenant \mathbb{F}_p (qui sera en fait k ou une extension finie de \mathbb{F}_p), on appelle φ -module sur k' un couple $D' = (D', \varphi_{D'})$, où D' est un $W(k')[\frac{1}{p}]$ -espace vectoriel de dimension finie et $\varphi_{D'} : \varphi D' \rightarrow D'$ est un isomorphisme de $W(k')[\frac{1}{p}]$ -espaces vectoriels, et bien sûr on continue à appeler φ -module un φ -module sur k . On note que $W(\mathbb{F}_p) = \mathbb{Z}_p$.

Grâce à l'hypothèse que k est algébriquement clos, on suppose que (D, φ_D) provient d'un φ -module $(\underline{D}, \varphi_{\underline{D}})$ sur \mathbb{F}_p qui est décent au sens de [RZ96].

Si Δ et Δ' sont deux W -réseaux de D , on note $l_1(\Delta, \Delta'), \dots, l_r(\Delta, \Delta')$ les diviseurs élémentaires de Δ' par rapport à Δ : ce sont les uniques entiers relatifs tels que $l_1(\Delta, \Delta') \geq \dots \geq l_r(\Delta, \Delta')$ et que pour une certaine base e_1, \dots, e_r de Δ sur W , on ait

$$\Delta' = p^{-l_1(\Delta, \Delta')} W e_1 + \dots + p^{-l_r(\Delta, \Delta')} W e_r.$$

Dans la suite on soulignera d'un trait les φ -modules sur \mathbb{F}_p et de deux traits les φ -modules sur une extension finie \mathbb{F}_{p^t} de \mathbb{F}_p . On notera $\mathbb{Z}_{p^t} = W(\mathbb{F}_{p^t})$ et $\mathbb{Q}_{p^t} = W(\mathbb{F}_{p^t})[\frac{1}{p}]$

Lemme 4.18 *Soit (D, φ_D, V_D) un φ -module de Hodge-Pink tel que $D = \underline{D} \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_0$ et $\varphi_D = \varphi_{\underline{D}} \otimes 1$ pour un certain φ -module décent $(\underline{D}, \varphi_{\underline{D}})$ sur \mathbb{F}_p . Supposons $V_D \subset U_D$, $t_H(D) = t_N(D)$ et pour tout sous- φ -module D' de dimension 1, $t_H(D') < t_N(D')$. Soit $\underline{\Delta}$ un \mathbb{Z}_p -réseau de \underline{D} et $\Delta = \underline{\Delta} \otimes_{\mathbb{Z}_p} W$. Soit $a \in \mathbb{N}$. Il existe une constante C_0 telle que la propriété suivante soit vraie. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante C telle que pour tout réseau Δ' de D vérifiant*

$$\varphi_D(\varphi \Delta') \subset p^{-a} \Delta' \quad \text{et} \quad l_1(\Delta, \Delta') \geq l_2(\Delta, \Delta') + C,$$

on ait $l_1(\Delta, \gamma_n(\Delta')) \leq l_1(\Delta, \Delta') - n + C_0$.

Démonstration. D'après le lemme 2.18 de [RZ96] et la proposition 1.6 de [RZ99], il existe des entiers t, \tilde{a}, C_1 (ne dépendant que de D, φ_D et a) tels que, pour tout W -réseau Δ' de D vérifiant $\varphi_D(\varphi \Delta') \subset p^{-a} \Delta'$, il existe un W -réseau Δ'' de D défini sur \mathbb{F}_{p^t} (c'est-à-dire provenant d'un \mathbb{Z}_{p^t} -réseau de $\underline{D} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^t}$) et vérifiant

$$\varphi_D(\varphi \Delta'') \subset p^{-\tilde{a}} \Delta'' \quad \text{et} \quad \Delta' \subset \Delta'' \subset p^{-C_1} \Delta'.$$

En fait, en examinant les démonstrations de [RZ96] et [RZ99], on voit qu'on pourrait prendre $\tilde{a} = a$, mais on n'en a pas besoin ici. On a alors

$$\begin{aligned} l_i(\Delta, \Delta') &\leq l_i(\Delta, \Delta'') \leq l_i(\Delta, \Delta') + C_1 \\ \text{et} \quad l_i(\Delta, \gamma_n(\Delta')) &\leq l_i(\Delta, \gamma_n(\Delta'')) \leq l_i(\Delta, \gamma_n(\Delta')) + C_1 \end{aligned}$$

pour tout i . Quitte à remplacer C_0 par $C_0 + 2C_1$, C par $C + 2C_1$ et a par \tilde{a} , il suffit donc de montrer le lemme 4.18 en supposant de plus Δ' défini sur \mathbb{F}_{p^t} . Le lemme suivant montre qu'avec cette condition supplémentaire l'énoncé du lemme 4.18 est vrai avec $C_0 = 0$. On est donc ramené à montrer le lemme suivant. \square

Lemme 4.19 *Soient (D, φ_D, V_D) , $(\underline{D}, \varphi_{\underline{D}})$, $\underline{\Delta}$ et Δ comme dans le lemme précédent. Soit $a \in \mathbb{N}$ et $t, n \in \mathbb{N}^*$. On note $B(t, a)$ l'ensemble des réseaux Δ' de D qui sont définis sur \mathbb{F}_{p^t} (c'est-à-dire associés à des \mathbb{Z}_{p^t} -réseaux $\underline{\Delta}'$ de $\underline{D} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^t}$) et vérifient $\varphi_D(\varphi \Delta') \subset p^{-a} \Delta'$. Il existe une constante C telle que*

$$\begin{aligned} \text{pour tout } \Delta' \in B(t, a) \text{ vérifiant } l_1(\Delta, \Delta') &\geq l_2(\Delta, \Delta') + C, \\ \text{on ait } l_1(\Delta, \gamma_n(\Delta')) &\leq l_1(\Delta, \Delta') - n. \end{aligned}$$

Démonstration. Si l'énoncé du lemme 4.19 est faux il existe une suite de réseaux Δ_m dans l'ensemble $B(t, a)$ vérifiant

$$l_1(\Delta, \gamma_n(\Delta_m)) > l_1(\Delta, \Delta_m) - n$$

et telle que $l_1(\Delta, \Delta_m) - l_2(\Delta, \Delta_m)$ tende vers l'infini. On note $\underline{\Delta}_m$ le \mathbb{Z}_{p^t} -réseau de $\underline{D} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^t}$ tel que $\Delta_m = \underline{\Delta}_m \otimes_{\mathbb{Z}_{p^t}} W$. En notant $a_m = l_1(\Delta, \Delta_m) - l_2(\Delta, \Delta_m)$ on voit que

$$(p^{l_1(\Delta, \Delta_m)} \underline{\Delta}_m + (p^{a_m} \underline{\Delta} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_{p^t})) / (p^{a_m} \underline{\Delta} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_{p^t})$$

est un sous- $(\mathbb{Z}_{p^t}/p^{a_m})$ -module libre de rang 1 de $\underline{\Delta} \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\mathbb{Z}_{p^t}/p^{a_m})$ et définit donc un point de $\mathbb{P}^{r-1}(\mathbb{Z}_{p^t}/p^{a_m})$. Par compacité de $\mathbb{P}^{r-1}(\mathbb{Z}_{p^t})$ muni de la topologie p -adique, on peut extraire une sous-suite ayant une limite et on note \underline{D}' le sous- \mathbb{Q}_{p^t} -espace vectoriel de dimension 1 de $\underline{D} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_{p^t}$ tel que cette limite soit $\underline{D}' \cap (\underline{\Delta} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_{p^t})$, sous- \mathbb{Z}_{p^t} -module libre de rang 1 de $\underline{\Delta} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_{p^t}$. On pose alors $\underline{D}' = \underline{D}' \otimes_{\mathbb{Q}_{p^t}} K_0$ qui est un sous- K_0 -espace vectoriel de dimension 1 de D . Autrement dit, quitte à extraire une sous-suite il existe une suite d'entiers b_m tendant vers $+\infty$ quand m tend vers l'infini telle que

$$p^{l_1(\Delta, \Delta_m)} \Delta_m + p^{b_m} \Delta = (D' \cap \Delta) + p^{b_m} \Delta \text{ pour tout } m.$$

Comme les réseaux Δ_m appartiennent à $B(t, a)$, en passant à la limite on voit que D' est un sous- φ -module de D . Par construction D' est défini sur \mathbb{F}_{p^t} mais nous n'avons plus besoin de cette information. Le lemme 4.20 ci-dessous montre que si m est assez grand,

$$l_1(\Delta, \gamma_n(\Delta_m)) \leq l_1(\Delta, \Delta_m) + n(t_H(D') - t_N(D')).$$

On obtient ainsi un sous- φ -module D' de dimension 1 de D tel que $t_H(D') \geq t_N(D')$, ce qui contredit l'hypothèse. Le lemme 4.19 est donc ramené au lemme suivant. \square

Lemme 4.20 Soit (D, φ_D, V_D) un φ -module de Hodge-Pink avec $V_D \subset U_D$ et $D' = (D', \varphi_{D'}, V_{D'})$ un sous- φ -module de Hodge-Pink de dimension 1. Soit $\Delta \subset D$ un W -réseau. Soit x un générateur de D' . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $C \in \mathbb{N}$ tel que pour $r \in \mathbb{N}$ assez grand,

$$\gamma_n(Wx + p^r \Delta) \subset p^{n(t_N(D') - t_H(D'))} Wx + p^{r-C} \Delta.$$

Démonstration. On rappelle que $V_{D'} = D' \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}] \cap V_D$. On note $D'' = D/D'$ avec $\varphi_{D''}$ induit par φ_D et $V_{D''}$ l'image de V_D dans $D'' \otimes_{K_0} \widehat{\mathfrak{S}}[\frac{1}{E}]$, de sorte que $0 \rightarrow D' \rightarrow D \rightarrow D'' \rightarrow 0$ est une suite exacte courte dans la catégorie des φ -modules de Hodge-Pink. On note $\beta'_n, \beta''_n, \gamma'_n$ et γ''_n les applications correspondant à β_n et γ_n pour D' et D'' . On note Δ'' l'image de Δ dans D'' . Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe r_0 tel que $\beta_n(p^{-r_0}Wx + \Delta) \rightarrow \beta''_n(\Delta'')$ soit surjectif : on relève les vecteurs d'une base du \mathfrak{S} -module libre de rang r

$$\begin{aligned} \beta''_n(\Delta'') &= ((\varphi_{D''} \varphi_{D''} \dots \varphi_{D''}^{n-1} \varphi_{D''} \varphi_{D''}^n \Delta'') \otimes_W \mathfrak{S}) \\ &\cap (\varphi_{D''} \dots \varphi_{D''}^{n-1} \varphi_{D''} \varphi_{D''}^{n-1} V_{D''} \oplus \dots \oplus \varphi_{D''} V_{D''}) \end{aligned}$$

en des vecteurs de $(\varphi_D \varphi_D \dots \varphi_D^{n-1} \varphi_D \varphi_D^n \Delta) \otimes_W \mathfrak{S}$ que l'on corrige par des vecteurs de $(\varphi_{D'} \varphi_{D'} \dots \varphi_{D'}^{n-1} \varphi_{D'} \varphi_{D'}^n D') \otimes_{K_0} \mathfrak{S}[\frac{1}{p}]$ pour qu'ils appartiennent à $\varphi_D \dots \varphi_D^{n-1} \varphi_D \varphi_D^{n-1} V_D \oplus \dots \oplus \varphi_D V_D$, ce qui est possible, puisque

$$\mathfrak{S}[\frac{1}{p}] \rightarrow \widehat{\mathfrak{S}}_0 / E^{-s} \widehat{\mathfrak{S}}_0 \oplus \dots \oplus \widehat{\mathfrak{S}}_{n-1} / \varphi^{n-1}(E)^{-s} \widehat{\mathfrak{S}}_{n-1}$$

est surjectif (où $s \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ est tel que $E^{-s}U_D \subset V_D \subset U_D$). Soit $r \geq r_0$. Comme $\beta_n(p^{-r_0}Wx + \Delta) \rightarrow \beta''_n(\Delta'')$ est surjectif de noyau $\beta'_n(p^{-r_0}Wx)$ et $\beta_n(p^{-r}Wx + \Delta) \rightarrow \beta''_n(\Delta'')$ est surjectif de noyau $\beta'_n(p^{-r}Wx)$ on a

$$\begin{aligned} \beta_n(Wx + p^r \Delta) &= \beta'_n(Wx) + p^{r-r_0} \beta_n(Wx + p^{r_0} \Delta), \\ \text{donc } \gamma_n(Wx + p^r \Delta) &= \gamma'_n(Wx) + p^{r-r_0} \gamma_n(Wx + p^{r_0} \Delta). \end{aligned}$$

Comme $\gamma'_n(Wx) = p^{n(t_N(D') - t_H(D'))} Wx$, le lemme 4.20 est démontré, ce qui achève aussi la démonstration des lemmes 4.18 et 4.19. \square

Fin de la démonstration de la proposition 4.6. On rappelle que k est supposé algébriquement clos. Soit $D = (D, \varphi_D, V_D)$ un φ -module de Hodge-Pink qui est un objet irréductible de $MHP(\varphi)_{fa}$ et tel que $V_D \subset U_D$.

Soit a la constante du b) du lemme 4.8. On a $\varphi_D(\varphi \gamma_m(\Delta)) \subset p^{-a} \gamma_m(\Delta)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Soit $i \in \{1, \dots, r-1\}$. Le lemme 4.18, appliqué à $\Lambda^i D$ montre l'existence de $C_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe C_1 tel que si Δ' est un réseau de D vérifiant

$$\varphi_D(\varphi \Delta') \subset p^{-a} \Delta' \quad \text{et} \quad l_i(\Delta, \Delta') \geq l_{i+1}(\Delta, \Delta') + C_1,$$

alors $(l_1 + \dots + l_i)(\Delta, \gamma_n(\Delta')) \leq (l_1 + \dots + l_i)(\Delta, \Delta') - n + C_0$.

En notant C_2 la constante qui apparaît dans e) du lemme 4.8 on a donc, pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $l_i(\Delta, \gamma_m(\Delta)) \geq l_{i+1}(\Delta, \gamma_m(\Delta)) + C_1$,

$$(l_1 + \dots + l_i)(\Delta, \gamma_{n+m}(\Delta)) \leq (l_1 + \dots + l_i)(\Delta, \gamma_m(\Delta)) - n + C_0 + iC_2. \quad (60)$$

Comme $\det(\gamma_m(\Delta)) = \det(\Delta)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$(l_1 + \dots + l_r)(\Delta, \gamma_m(\Delta)) = 0.$$

On a $p^a \gamma_m(\Delta) \subset \gamma_{m+1}(\Delta) \subset p^{-a} \gamma_m(\Delta)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. En appliquant l'inégalité (60) avec $n = C_0 + (r-1)C_2$ et $i \in \{1, \dots, r-1\}$, et en appliquant le lemme 4.21 ci-dessous avec

$$C = \max(C_1, na) \text{ et } l_i^m = l_i(\Delta, \gamma_{mn}(\Delta)) \text{ pour } i \in \{1, \dots, r\} \text{ et } m \in \mathbb{N},$$

on voit qu'il existe C_3 tel que

$$p^{C_3} \Delta \subset \gamma_{mn}(\Delta) \subset p^{-C_3} \Delta \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}.$$

On a donc $p^{C_3 + [\frac{m}{2}]a} \Delta \subset \gamma_m(\Delta) \subset p^{-C_3 - [\frac{m}{2}]a} \Delta$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. On est donc ramené à montrer le lemme 4.21. \square

Pour donner un sens géométrique au lemme suivant, on signale que si Δ' est un réseau, le polygône concave ayant pour sommets $(i, (l_1 + \dots + l_i)(\Delta, \Delta'))$ pour $i = 0, \dots, r$ peut être appelé "polygône des invariants" de Δ' relativement à Δ et que les $l_i(\Delta, \Delta')$ sont les pentes de ce polygône. Dans le cas que l'on considère on a toujours $(l_1 + \dots + l_r)(\Delta, \Delta') = 0$, c'est-à-dire que le premier sommet est $(0, 0)$ et le dernier est $(r, 0)$.

Lemme 4.21 *Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $C \in \mathbb{R}_+$. Soit $l_i^n \in \mathbb{R}$ pour $i \in \{1, \dots, r\}$ et $n \in \mathbb{N}$ vérifiant*

- i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $l_1^n \geq \dots \geq l_r^n$,
- ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^r l_i^n = 0$,
- iii) on a $l_1^0 = \dots = l_r^0 = 0$,
- iv) pour $i \in \{1, \dots, r\}$ et $n \in \mathbb{N}$, $l_i^n - C \leq l_i^{n+1} \leq l_i^n + C$,
- v) pour $i \in \{1, \dots, r-1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, si $l_i^n - l_{i+1}^n \geq C$ on a

$$l_1^{n+1} + \dots + l_i^{n+1} \leq l_1^n + \dots + l_i^n.$$

Alors on a $l_i^n \in [-C', C']$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec C' ne dépendant que de r et de C .

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note P_n le polygône concave dont les sommets sont les $(i, P_n(i))$ pour $i \in \{0, \dots, r\}$, avec $P_n(i) = l_1^n + \dots + l_i^n$ (en particulier le premier sommet est $(0, 0)$ et le dernier est $(r, 0)$). La différence des pentes au sommet $(i, P_n(i))$, que nous appellerons brisure, est $l_i^n - l_{i+1}^n$. La condition v) assure que $P_{n+1}(i) \leq P_n(i)$ si la brisure de P_n en $(i, P_n(i))$ est $\geq C$. L'idée naïve de la démonstration est la suivante : si $\max_i P_n(i)$ est atteint en un sommet $(j, P_n(j))$ de brisure $\geq C$ la condition v) impose $P_{n+1}(j) \leq P_n(j)$ et si $\max_i P_{n+1}(i)$ est atteint pour la même valeur de i (c'est-à-dire $i = j$) on en déduit $\max_i P_{n+1}(i) \leq \max_i P_n(i)$, ce qui impose à P_n de rester borné de façon uniforme en n . Nous allons voir qu'en remplaçant P_n par $P_n - Q$ pour un certain Q de brisure constante $3C$ cet argument devient correct. On pose donc $Q(i) = \frac{3C}{2}i(r-i)$ pour $i \in \{0, \dots, r\}$. On pose ensuite

$$m_n = \max_{i \in \{0, \dots, r\}} (P_n(i) - Q(i)) \in \mathbb{R}_+.$$

Nous allons montrer que $m_{n+1} \leq m_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $m_n \geq 0$, il n'y a rien à démontrer si $m_{n+1} = 0$. Supposons donc $m_{n+1} > 0$ et soit $j \in \{1, \dots, r-1\}$ tel que le maximum soit atteint en j . La brisure de $P_{n+1} - Q$ en j est donc ≥ 0 . Or la brisure de Q est égale à $3C$, donc $l_j^{n+1} - l_{j+1}^{n+1} \geq 3C$. Grâce à la condition iv) on en déduit $l_j^n - l_{j+1}^n \geq C$, d'où par la condition v), $P_n(j) \geq P_{n+1}(j)$. On a donc

$$m_n \geq P_n(j) - Q(j) \geq P_{n+1}(j) - Q(j) = m_{n+1}.$$

Par la condition iii) on a $m_0 = 0$. Donc $m_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc

$$l_n^1 = P_n(1) \leq Q(1) = \frac{3}{2}C(r-1)$$

et $l_n^r = -P_n(r-1) \geq -Q(r-1) = -\frac{3}{2}C(r-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ceci termine la démonstration du lemme 4.21 (avec $C' = \frac{3}{2}C(r-1)$) et donc celle de la proposition 4.6. \square

5 Théorie entière à la Breuil

On note \mathcal{S} le complété p -adique de l'enveloppe à puissance divisées

$$\mathfrak{S}\left[\frac{u^{ei}}{i!}\right]_{i \in \mathbb{N}^*} = \mathfrak{S}\left[\frac{u^{ep}}{p}, \frac{u^{ep^2}}{p^{p+1}}, \frac{u^{ep^3}}{p^{p^2+p+1}}, \dots\right].$$

Cet anneau a été introduit par Faltings [Fal99] et Breuil [Bre99b, Bre02].

Nous allons donner une autre démonstration du théorème 2.2.1 de [CL09] (voir le théorème 5.1 ci-dessous).

On fixe $m \in \{1, \dots, p-2\}$. On rappelle que $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}, [0, m]}^\varphi$ désigne la catégorie des φ/\mathfrak{S} -modules $(\mathfrak{M}, \varphi_{\mathfrak{M}})$ d'amplitude $\subset [0, m]$, c'est-à-dire tels que $\varphi_{\mathfrak{M}}$ et $E^m \varphi_{\mathfrak{M}}^{-1}$ n'aient pas de dénominateurs en E . Soit $\text{Mod}_{/\mathcal{S}, [0, m]}^\varphi$ la catégorie des $(D, \varphi_D, V_D, \mathcal{M})$ où

- (D, φ_D) est un φ -module
- V_D est une structure de Hodge-Pink telle que $U_D \subset V_D \subset E^{-m}U_D$,
- \mathcal{M} est un \mathcal{S} -module libre, muni d'un isomorphisme

$$\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{S}} \mathcal{S}\left[\frac{1}{p}\right] \simeq {}^\varphi D \otimes_{K_0} \mathcal{S}\left[\frac{1}{p}\right], \quad (61)$$

- on suppose que \mathcal{M} est “fortement divisible”, c'est-à-dire

$$\mathcal{S}.p^{-m} {}^\varphi((\varphi_D \otimes 1)(\mathcal{M} \cap E^m V_D)) = \mathcal{M}. \quad (62)$$

Comme $\mathcal{M} \cap E^m V_D \supset E^m \mathcal{M}$ et $\frac{\varphi(E)}{p}$ est une unité dans \mathcal{S} , l'hypothèse (62) implique que $\varphi_D({}^\varphi \mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ (condition demandée par Breuil dans [Bre02]).

On note $\mathbb{D} : \text{Mod}_{/\mathfrak{S}, [0, m]}^\varphi \rightarrow \text{Mod}_{/\mathcal{S}, [0, m]}^\varphi$ le foncteur qui à $(\mathfrak{M}, \varphi_{\mathfrak{M}})$ associe $(D, \varphi_D, V_D, \mathcal{M})$ avec $(D, \varphi_D, V_D) = \mathbb{D}_{\text{iso}}(\mathfrak{M}[\frac{1}{p}], \varphi_{\mathfrak{M}} \otimes 1)$ et $\mathcal{M} = {}^\varphi \mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{S}$ qui est un \mathcal{S} -module libre muni de l'isomorphisme (61) associé à $\varphi_{\mathfrak{M}}^{-1}$.

Pour montrer que le foncteur \mathbb{D} est bien défini on doit vérifier que \mathcal{M} est fortement divisible. On rappelle cette démonstration, due à Breuil.

L'inclusion

$$\mathcal{S}.p^{-m} {}^\varphi((\varphi_D \otimes 1)(\mathcal{M} \cap E^m V_D)) \supset \mathcal{M}$$

est évidente. En effet on a

$$\mathcal{M} \cap E^m V_D \supset {}^\varphi \xi^{-1}({}^\varphi \mathfrak{M}) \cap E^m V_D \supset {}^\varphi \xi^{-1}(E^m \varphi_{\mathfrak{M}}^{-1}(\mathfrak{M}))$$

puisque par définition de la catégorie $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}, [0, m]}^\varphi$, $E^m \varphi_{\mathfrak{M}}^{-1} \in \text{Hom}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M}, {}^\varphi \mathfrak{M})$ (en fait ${}^\varphi \xi^{-1}({}^\varphi \mathfrak{M}) \cap E^m V_D = {}^\varphi \xi^{-1}(E^m \varphi_{\mathfrak{M}}^{-1}(\mathfrak{M}))$). Donc

$$\begin{aligned} p^{-m} {}^\varphi((\varphi_D \otimes 1)(\mathcal{M} \cap E^m V_D)) &\supset p^{-m} {}^\varphi((\varphi_D \otimes 1)({}^\varphi \xi^{-1}(E^m \varphi_{\mathfrak{M}}^{-1}(\mathfrak{M})))) \\ &= \left(\frac{\varphi(E)}{p}\right)^m {}^\varphi \xi^{-1}({}^\varphi \mathfrak{M}) \text{ puisque } (\varphi_D \otimes 1) {}^\varphi \xi^{-1} \varphi_{\mathfrak{M}}^{-1} = \xi^{-1}. \end{aligned}$$

Enfin $\frac{\varphi(E)}{p}$ est inversible dans \mathcal{S} . Il reste donc à montrer l'inclusion inverse

$$p^{-m} {}^\varphi((\varphi_D \otimes 1)(\mathcal{M} \cap E^m V_D)) \subset \mathcal{M}.$$

Comme $\varphi_{\mathfrak{M}}$ appartient à $\text{Hom}_{\mathfrak{S}}(\varphi_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M})$, et par la définition de V_D , on a

$$\begin{aligned} \xi((\varphi_D \otimes 1)(\mathcal{M} \cap E^m V_D)) &\subset (\mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{S}) \cap (E^m \mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \widehat{\mathfrak{S}}) \\ &= \mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} (\mathcal{S} \cap E^m \widehat{\mathfrak{S}}). \end{aligned}$$

Mais $E^{-m} \mathcal{S} \cap \widehat{\mathfrak{S}}$ est inclus dans le complété p -adique de

$$\mathcal{S} + \frac{u^{e(p-m)}}{p} \mathcal{S} + \frac{u^{e(p^2-m)}}{p^{p+1}} \mathcal{S} + \dots,$$

donc $\varphi(\mathcal{S} \cap E^m \widehat{\mathfrak{S}}) \subset \varphi(E)^m \mathcal{S}$. Comme $\frac{\varphi(E)}{p} \in \mathcal{S}$, on a

$$p^{-m} \varphi(\mathcal{S} \cap E^m \widehat{\mathfrak{S}}) \subset \mathcal{S},$$

donc \mathcal{M} est fortement divisible et le foncteur \mathbb{D} est bien défini.

Le théorème suivant est le théorème 2.2.1 de [CL09].

Théorème 5.1 *Le foncteur $\mathbb{D} : \text{Mod}_{/\mathfrak{S}, [0, m]}^{\varphi} \rightarrow \text{Mod}_{/\mathcal{S}, [0, m]}^{\varphi}$ est une équivalence de catégories.*

Remarque 5.2 *Il résulte du théorème que pour tout objet $(D, \varphi_D, V_D, \mathcal{M})$ de $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}, [0, m]}^{\varphi}$, (D, φ_D, V_D) est faiblement admissible.*

Début de la démonstration du théorème 5.1. Montrons d'abord que \mathbb{D} est pleinement fidèle. Soient $(\mathfrak{M}, \varphi_{\mathfrak{M}})$ et $(\mathfrak{M}', \varphi_{\mathfrak{M}'})$ deux objets de $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}, [0, m]}^{\varphi}$ et $(D, \varphi_D, V_D, \mathcal{M})$ et $(D', \varphi_{D'}, V_{D'}, \mathcal{M}')$ leurs images dans $\text{Mod}_{/\mathcal{S}, [0, m]}^{\varphi}$. L'application

$$\begin{aligned} &\text{Hom}_{\text{Mod}_{/\mathfrak{S}, [0, m]}^{\varphi}}((\mathfrak{M}, \varphi_{\mathfrak{M}}), (\mathfrak{M}', \varphi_{\mathfrak{M}'})) \\ &\rightarrow \text{Hom}_{\text{Mod}_{/\mathcal{S}, [0, m]}^{\varphi}}((D, \varphi_D, V_D, \mathcal{M}), (D', \varphi_{D'}, V_{D'}, \mathcal{M}')) \end{aligned}$$

est injective par la fidélité de \mathbb{D}_{iso} et on veut montrer qu'elle est surjective. Soit

$$h \in \text{Hom}_{\text{Mod}_{/\mathcal{S}, [0, m]}^{\varphi}}((D, \varphi_D, V_D, \mathcal{M}), (D', \varphi_{D'}, V_{D'}, \mathcal{M}')).$$

Par la pleine fidélité de \mathbb{D}_{iso} , on sait qu'il existe un unique morphisme f de pseudo-iso- φ/\mathfrak{S} -modules de $\mathfrak{M}[\frac{1}{p}]$ dans $\mathfrak{M}'[\frac{1}{p}]$ qui vérifie $f\varphi_{\mathfrak{M}} = \varphi'_{\mathfrak{M}'}f$ et dont la réduction modulo u est h . L'hypothèse $(h \otimes 1)(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}'$ implique que $f \otimes_{\mathfrak{S}[\frac{1}{p}]} 1_{\mathcal{S}[\frac{1}{p}]}$ envoie $\varphi_{\mathfrak{M}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{S}$ dans $\varphi'_{\mathfrak{M}'} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{S}$. Il s'agit de montrer que f appartient à $\text{Hom}_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}')$.

Choisissons des bases de \mathfrak{M} et \mathfrak{M}' sur \mathfrak{S} et notons r et r' les rangs de \mathfrak{M} et \mathfrak{M}' . On a donc $f \in M_{r', r}(\mathfrak{S}[\frac{1}{p}])$ et $\varphi f \in M_{r', r}(\mathcal{S})$ et il s'agit de montrer

$f \in M_{r',r}(\mathfrak{S})$. Comme $\mathfrak{S}/u^{ep}\mathfrak{S}$ est un quotient de \mathcal{S} , l'hypothèse ${}^\varphi f \in M_{r',r}(\mathcal{S})$ implique que f modulo u^e appartient à $M_{r',r}(\mathfrak{S}/u^e\mathfrak{S})$.

On a $f = \varphi_{\mathfrak{M}}{}^\varphi f \varphi_{\mathfrak{M}}^{-1}$. Supposons par l'absurde que f n'appartient pas à $M_{r',r}(\mathfrak{S})$. Soit $a \in \mathbb{N}$ le petit entier tel que $p^a f$ appartienne à $M_{r',r}(\mathfrak{S})$. Par hypothèse $a > 0$. Soit $b \in \mathbb{N}$ le plus grand entier tel que $p^a f \bmod p \in M_{r',r}(k[[u]])$ appartienne à $u^b M_{r',r}(k[[u]])$. Par hypothèse, $b \geq e$. On a l'égalité suivante, où toutes les matrices entre parenthèses ont leurs coefficients dans \mathfrak{S} :

$$E^m(p^a f) = (\varphi_{\mathfrak{M}})(p^a {}^\varphi f)(E^m \varphi_{\mathfrak{M}}^{-1}).$$

En réduisant cette égalité modulo p , on trouve l'égalité suivante, où toutes les matrices entre parenthèses sont à coefficients dans $k[[u]]$:

$$\begin{aligned} & u^{em} \left((p^a f) \bmod p \right) \\ &= \left(\varphi_{\mathfrak{M}} \bmod p \right) \left((p^a {}^\varphi f) \bmod p \right) \left(E^m \varphi_{\mathfrak{M}}^{-1} \bmod p \right). \end{aligned}$$

Or $(p^a f) \bmod p$ est divisible exactement par u^b et $(p^a {}^\varphi f) \bmod p$ est divisible (exactement) par u^{pb} . Le membre de gauche est divisible exactement par u^{b+em} , alors que le membre de droite est divisible par u^{pb} . Comme $b \geq e$ et $p \geq m + 2$ on a $b(p - m) > e$ ce qui amène une contradiction.

Il nous reste à montrer que le foncteur de $\text{Mod}_{\mathfrak{S},[0,m]}^\varphi$ dans $\text{Mod}_{\mathcal{S},[0,m]}^\varphi$ est essentiellement surjectif. On doit construire un \mathfrak{S} -module libre \mathfrak{M} de rang r , à partir de la donnée d'un \mathcal{S} -module libre \mathcal{M} de rang r . L'idée est de construire une suite de modules libres de rang r sur des anneaux qui se rapprochent de plus en plus de \mathfrak{S} et de définir \mathfrak{M} comme la limite de cette suite. Il y a plusieurs choix possibles pour cette suite d'anneaux. La difficulté de cette démonstration n'est pas de construire un \mathfrak{S} module \mathfrak{M} , mais de montrer qu'il est libre de rang r . Il est important de noter la parenté entre la preuve qui suit et la démonstration du théorème 0.6 donnée au paragraphe 4.

Le lemme suivant généralise le lemme 4.1 (qui correspond au cas où $\mathcal{C} = \mathfrak{C}' = \mathfrak{S}$).

Lemme 5.3 *Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et \mathcal{C} et \mathcal{C}' des anneaux tels que $\mathfrak{S} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{C}' \subset \widehat{\mathfrak{S}}$ et*

$$E^{-m}\mathcal{C} \cap \widehat{\mathfrak{S}} \subset \mathcal{C}'. \quad (63)$$

a) *Soit \mathcal{N} un \mathcal{C} -module libre de rang fini et \mathcal{W} un sous- $\widehat{\mathfrak{S}}$ -module de $\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{C}} \widehat{\mathfrak{S}}$ contenant $E^m \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{C}} \widehat{\mathfrak{S}}$. Alors $\mathcal{N}' = \mathcal{C}' \cdot (\mathcal{N} \cap \mathcal{W})$ est un sous- \mathcal{C}' -module libre de $\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{C}} \mathcal{C}'$,*

$$\mathcal{N}'\left[\frac{1}{E}\right] = \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{C}} \mathcal{C}'\left[\frac{1}{E}\right] \quad \text{et} \quad \mathcal{N}' \otimes_{\mathcal{C}'} \widehat{\mathfrak{S}} = \mathcal{W}.$$

De plus $\det(\mathcal{N}') = E^k \det(\mathcal{N}) \otimes_{\mathcal{C}} \mathcal{C}'$ où k désigne la longueur du $\widehat{\mathfrak{S}}$ -module $(\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{C}} \widehat{\mathfrak{S}})/\mathcal{W}$.

b) Soit de plus \mathfrak{N} un \mathfrak{S} -module libre muni d'un isomorphisme

$$\mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{C} = \mathcal{N}.$$

Alors l'inclusion $\mathcal{C}' \cdot (\mathfrak{N} \cap \mathcal{W}) \subset \mathcal{C}' \cdot (\mathcal{N} \cap \mathcal{W})$ est une égalité.

c) Soit de plus $\widetilde{\mathcal{C}}$ un anneau tel que $\mathfrak{S} \subset \widetilde{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}$ et $\widetilde{\mathcal{N}}$ un $\widetilde{\mathcal{C}}$ -module libre muni d'un isomorphisme $\widetilde{\mathcal{N}} \otimes_{\widetilde{\mathcal{C}}} \mathcal{C} = \mathcal{N}$. Alors l'inclusion

$$\mathcal{C}' \cdot (\widetilde{\mathcal{N}} \cap \mathcal{W}) \subset \mathcal{C}' \cdot (\mathcal{N} \cap \mathcal{W})$$

est une égalité.

Démonstration. On montre simultanément a) et b). Soit \mathfrak{N} un \mathfrak{S} -module libre muni d'un isomorphisme $\mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{C} = \mathcal{N}$. D'après le lemme 4.1, $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N} \cap \mathcal{W}$ est un \mathfrak{S} -module libre, et on a

$$E^m \mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}, \quad \det(\mathfrak{N}') = E^k \det(\mathfrak{N}) \quad \text{et} \quad \mathcal{W} = \mathfrak{N}' \otimes_{\mathfrak{S}} \widehat{\mathfrak{S}}.$$

Comme $\mathcal{N} = \mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{C}$ il résulte de ce qui précède que

$$\mathcal{N} \cap \mathcal{W} \subset \mathfrak{N}' \otimes_{\mathfrak{S}} (E^{-m} \mathcal{C} \cap \widehat{\mathfrak{S}}).$$

Donc, grâce à (63),

$$\mathcal{N}' \subset \mathfrak{N}' \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{C}'$$

et on a l'égalité puisque $\mathcal{N} \cap \mathcal{W}$ contient évidemment \mathfrak{N}' . De plus

$$\det(\mathcal{N}') = \det(\mathfrak{N}') \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{C}'.$$

Enfin c) découle de b), en choisissant \mathfrak{N} tel que $\widetilde{\mathcal{N}} = \mathfrak{N} \otimes_{\mathfrak{S}} \widetilde{\mathcal{C}}$. □

Dans la suite, pour $a \in \mathbb{N}^*$ on note

$$\mathcal{C}_a = \mathfrak{S} \left[\left[\frac{u^{ea}}{p} \right] \right].$$

On appliquera le lemme 5.3 dans les deux situations suivantes

- $\mathcal{C} = \mathcal{S}$ et $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_{p-m}$,
- pour $a > m$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_{a-m}$.

Dans ces deux situations, la condition (63) est vérifiée. Voici la justification dans le premier cas : $(E^{-m} \mathcal{S} \cap \widehat{\mathfrak{S}})$ est inclus dans le complété p -adique de $\mathfrak{S} \left[\frac{u^{e(p-m)}}{p}, \frac{u^{e(p^2-m)}}{p^{p+1}}, \frac{u^{e(p^3-m)}}{p^{p^2+p+1}}, \dots \right]$. Cet anneau est inclus dans \mathcal{C}_{p-m} car $\frac{p^{i+1-m}}{p^i + \dots + p + 1} \geq p - m$ pour tout $i \geq 0$, puisque $m \geq 1$.

Fin de la démonstration du théorème 5.1. Montrons maintenant que le foncteur $\mathbb{D} : \text{Mod}_{\mathcal{S},[0,m]}^{\varphi} \rightarrow \text{Mod}_{\mathcal{S},[0,m]}^{\varphi}$ est essentiellement surjectif. Soit $(D, \varphi_D, V_D, \mathcal{M})$ un objet de $\text{Mod}_{\mathcal{S},[0,m]}^{\varphi}$.

D'après le a) du lemme 5.3 (appliqué à $\mathcal{C} = \mathcal{S}$, $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_{p-m}$ et $\mathcal{N} = \mathcal{M}$),

$$\mathcal{C}_{p-m} \cdot (\mathcal{M} \cap E^m V_D)$$

est un \mathcal{C}_{p-m} -module libre de rang r . On note \mathfrak{M}_0 son image par $E^{-m} \varphi_D \otimes 1$, si bien que

$$\mathfrak{M}_0 = \mathcal{C}_{p-m} \cdot E^{-m} (\varphi_D \otimes 1) (\mathcal{M} \cap E^m V_D)$$

est un \mathcal{C}_{p-m} -module libre de rang r naturellement inclus dans

$$E^{-m} D \otimes_{K_0} \mathcal{C}_{p-m} \left[\frac{1}{p} \right].$$

Alors ${}^{\varphi}\mathfrak{M}_0$ est un $\mathcal{C}_{p(p-m)}$ -module libre de rang r qui est naturellement inclus dans

$$\varphi(E)^{-m} {}^{\varphi} D \otimes_{K_0} \mathcal{C}_{p(p-m)} \left[\frac{1}{p} \right].$$

Par l'hypothèse de forte divisibilité de \mathcal{M} , et comme $\frac{\varphi(E)}{p}$ est une unité dans \mathcal{S} , on a

$${}^{\varphi}\mathfrak{M}_0 \otimes_{\mathcal{C}_{p(p-m)}} \mathcal{S} = \mathcal{M}. \quad (64)$$

On définit par récurrence \mathfrak{M}_n pour $n > 0$ en posant

$$\mathfrak{M}_n = \mathcal{C}_{m_n} \cdot E^{-m} (\varphi_D \otimes 1) ({}^{\varphi}\mathfrak{M}_{n-1} \cap E^m V_D), \quad (65)$$

où la suite m_n est définie par

$$m_0 = p - m \quad \text{et} \quad m_n = pm_{n-1} - m$$

(comme $m \leq p-2$, cette suite est strictement croissante et tend vers l'infini).

Par le a) du lemme 5.3 (appliqué à $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{pm_{n-1}}$, $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_{m_n}$ et $\mathcal{N} = {}^{\varphi}\mathfrak{M}_{n-1}$), \mathfrak{M}_n est un \mathcal{C}_{m_n} -module libre de rang r , inclus dans $E^{-m} \dots \varphi^n(E)^{-m} D \otimes_{K_0} \mathcal{C}_{m_n} \left[\frac{1}{p} \right]$.

D'après (64) on a ${}^{\varphi}\mathfrak{M}_0 \subset \mathcal{M}$. On en déduit $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_0$. Cette assertion a un sens car les deux sont plongés dans $E^{-m} D \otimes_{K_0} \mathcal{C}_{p-m} \left[\frac{1}{p} \right]$. On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{M}_{n+1} \subset \mathfrak{M}_n$. En fait (64) implique, grâce au c) du lemme 5.3 (appliqué à $\mathcal{C} = \mathcal{S}$, $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_{m_0}$, $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}_{pm_0}$, $\mathcal{N} = \mathcal{M}$, $\tilde{\mathcal{N}} = {}^{\varphi}\mathfrak{M}_0$), que l'inclusion $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_0$ induit une égalité

$$\mathfrak{M}_1 \otimes_{\mathcal{C}_{m_1}} \mathcal{C}_{m_0} = \mathfrak{M}_0.$$

On montre alors, par récurrence sur n , grâce au c) du lemme 5.3 (appliqué à $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{pm_{n-1}}$, $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_{m_n}$, $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}_{pm_n}$, $\mathcal{N} = {}^\varphi\mathfrak{M}_{n-1}$, $\tilde{\mathcal{N}} = {}^\varphi\mathfrak{M}_n$), que l'inclusion $\mathfrak{M}_{n+1} \subset \mathfrak{M}_n$ induit une égalité

$$\mathfrak{M}_{n+1} \otimes_{\mathcal{C}_{m_{n+1}}} \mathcal{C}_{m_n} = \mathfrak{M}_n.$$

En particulier comme $m_{n+1} > m_n > p^n$, l'inclusion $\mathfrak{M}_{n+1} \subset \mathfrak{M}_n$ induit une égalité modulo u^{ep^n} , c'est-à-dire

$$\mathfrak{M}_{n+1} \otimes_{\mathcal{C}_{m_{n+1}}} \mathfrak{S}/u^{ep^n} = \mathfrak{M}_n \otimes_{\mathcal{C}_{m_n}} \mathfrak{S}/u^{ep^n}.$$

On prend alors \mathfrak{M} égal à l'intersection des \mathfrak{M}_n . On remarque que

$$Q_n = \mathfrak{M}_n \otimes_{\mathcal{C}_{m_n}} \mathfrak{S}/u^{ep^n}$$

est un \mathfrak{S}/u^{ep^n} -module libre de rang r et que

$$Q_n = Q_{n+1} \otimes_{\mathfrak{S}/u^{ep^{n+1}}} \mathfrak{S}/u^{ep^n}.$$

On a aussi $\mathfrak{M} = \varprojlim Q_n$ donc \mathfrak{M} est un \mathfrak{S} -module libre de rang r . De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'inclusion $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_n$ induit une égalité

$$\mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{C}_{m_n} = \mathfrak{M}_n.$$

D'après (65) et grâce au b) du lemme 5.3, on a

$$\mathfrak{M} = E^{-m}(\varphi_D \otimes 1)({}^\varphi\mathfrak{M} \cap E^m V_D).$$

On définit $E^m \varphi_{\mathfrak{M}}^{-1} : \mathfrak{M} \rightarrow {}^\varphi\mathfrak{M}$ comme la restriction de $E^m(\varphi_D \otimes 1)^{-1}$ à \mathfrak{M} . On a alors $\varphi_{\mathfrak{M}} \in \text{Hom}_{\mathfrak{S}}({}^\varphi\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$.

Comme $\mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{C}_{m_0} = \mathfrak{M}_0$ et grâce à (64) on a ${}^\varphi\mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{S} = \mathfrak{M}$. \square

Remarque 5.4 *On notera la parenté entre la preuve du théorème 5.1 et la preuve du théorème 0.6 donnée dans le paragraphe 4.*

6 Un cadre plus général

On présente ici un cadre un peu plus général où \mathbb{Z}_p est remplacé par l'anneau des entiers d'un corps local non archimédien \mathcal{O}_F . Ce cadre serait adapté à l'étude des modules π_F -divisibles munis d'une action stricte de \mathcal{O}_F au sens de [Fal02]. Il est donc plus restrictif que celui considéré par Kisin dans [Kis08], où l'action n'est pas nécessairement stricte.

Les résultats des paragraphes 2, 3, 4 et 5 s'étendent à ce cadre et y généralisent ceux de [GL10] (qui correspond au cas où \mathcal{O}_F est d'égalles caractéristiques) au lieu d'être simplement analogues. Pour la théorie rationnelle cela n'implique rien de nouveau car le théorème "faiblement admissible implique admissible" pour \mathbb{Z}_p implique facilement le théorème à coefficients dans \mathcal{O}_F si F est une extension finie de \mathbb{Q}_p . En revanche la généralisation à \mathcal{O}_F de la théorie entière du paragraphe 5 n'est pas une conséquence du cas où $\mathcal{O}_F = \mathbb{Z}_p$.

Les résultats du paragraphe 1 ne s'étendent pas de manière agréable à ce nouveau cadre à cause du rôle spécial joué par l'opérateur N_D . Lorsque $N_D = 0$, la condition (2) de transversalité de Griffiths est analogue à la condition de tranquillité dans [GL10].

Soit \mathcal{O}_F l'anneau des entiers d'un corps local non archimédien F de corps résiduel \mathbb{F}_q . On note π_F une uniformisante de \mathcal{O}_F . Soit k un corps parfait contenant \mathbb{F}_q . On note $W = W_{\mathcal{O}_F}(k)$ où $W_{\mathcal{O}_F}(k)$ est le " \mathcal{O}_F -anneau de Witt de k ", défini par

$$W_{\mathcal{O}_F}(k) = W(k) \otimes_{W(\mathbb{F}_q)} \mathcal{O}_F \text{ si } \mathcal{O}_F \text{ est d'inégales caractéristiques}$$

$$\text{et } W_{\mathcal{O}_F}(k) = k[[\pi_F]] \text{ si } \mathcal{O}_F = \mathbb{F}_q[[\pi_F]].$$

On possède un morphisme de Frobenius \mathcal{O}_F -linéaire $\varphi : W \rightarrow W$ qui relève l'endomorphisme $x \mapsto x^q$ de k . On note $K_0 = \text{Frac}W = W[\frac{1}{\pi_F}]$. On note $\mathfrak{S} = W[[u]]$. On note $z \in \mathfrak{S}$ l'image de $\pi_F \in W$. On note $\varphi : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ le morphisme égal à φ sur W et envoyant u sur u^q .

Soit $E \in \mathfrak{S}$ tel que $E(0) \in zW^\times$ et que E ne soit pas multiple de z . Soit $\mathcal{O}_K = \mathfrak{S}/E\mathfrak{S}$. Le morphisme $W \rightarrow \mathcal{O}_K$ fait de \mathcal{O}_K l'anneau des entiers d'une extension finie totalement ramifiée K de K_0 . On note π_K l'image de u , qui est alors une uniformisante de \mathcal{O}_K . Si on écrit $E = E(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n u^n$ avec $c_n \in W$ on a $c_0 = E(0) \in zW^\times$, $c_1, \dots, c_{e-1} \in zW$ et $c_e \in W^\times$ pour un certain entier e qui est aussi l'indice de ramification de K sur K_0 . Quitte à multiplier E par un élément inversible de \mathfrak{S} (ce qui ne change pas les résultats de cet article) on peut supposer si on veut que $c_e = 1$ et $c_{e+1} = c_{e+2} = \dots = 0$, c'est-à-dire que E est un polynôme d'Eisenstein, et le polynôme minimal de π_K sur K_0 .

Ce formalisme contient les cas particuliers suivants

– **situation de [Kis05] et de cet article** : on a

$$q = p, \mathcal{O}_F = \mathbb{Z}_p, \pi_F = p, W = W(k), z = p, \mathfrak{S} = W[[u]],$$

K est une extension totalement ramifiée de $K_0 = W[\frac{1}{p}]$, π_K est une uniformisante de K , et E est le polynôme minimal de π_K sur K_0 , qui est un polynôme d'Eisenstein,

– **situation de [GL10]** : on a

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_F &= \mathbb{F}_q[[\pi_F]], \mathcal{O}_K = k[[\pi_K]], \mathfrak{S} = \mathcal{O} \widehat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} \mathcal{O}_K, u = 1 \otimes \pi_K, \\ z &= \pi_F \otimes 1 \text{ et } E = z - (1 \otimes \pi_F).\end{aligned}$$

Dans [GL10], $\mathcal{O}_F, \pi_F, \mathcal{O}_K, \pi_K, \lambda$ étaient notés $\mathcal{O}, \pi, \mathcal{O}_L, \pi_L, \alpha$ respectivement. De plus \mathcal{O} était noté \mathcal{C} et muni d'une topologie légèrement plus fine.

La définition 0.1 s'étend de façon évidente à ce nouveau cadre. Plus précisément la catégorie $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}, [s, t]}^\varphi$ des φ/\mathfrak{S} -modules d'amplitude $\subset [s, t]$ est formé des couples $(\mathfrak{M}, \varphi_{\mathfrak{M}})$ où \mathfrak{M} est un \mathfrak{S} -module libre de type fini et $\varphi_{\mathfrak{M}} : {}^\varphi\mathfrak{M}[\frac{1}{E}] \rightarrow \mathfrak{M}[\frac{1}{E}]$ est un isomorphisme vérifiant $E^t \mathfrak{M} \subset \varphi_{\mathfrak{M}}({}^\varphi\mathfrak{M}) \subset E^s \mathfrak{M}$. Dans la situation de [GL10] où \mathcal{O}_F est d'égales caractéristiques, un φ/\mathfrak{S} -module est exactement un chtouca local sur \mathcal{O}_K au sens de [GL10] et l'isomorphisme ξ du lemme 3.5 est l'inverse de celui noté R dans le lemme 7.4 de [GL10]. Dans le cas où \mathcal{O}_F est d'inégales caractéristiques, on notera que E est le polynôme d'Eisenstein de π_K sur \mathcal{O}_F et non sur \mathbb{Z}_p . Cela correspond à la condition d'action stricte mentionnée au début du paragraphe.

On définit la catégorie $MHP(\varphi)$ des φ -modules de Hodge-Pink de la même façon que dans l'introduction. Les résultats des paragraphes 2, 3 et 4 s'étendent de façon évidente, en remplaçant p respectivement par π_F, z ou q selon que p est vu comme un élément de \mathbb{Z}_p , de \mathfrak{S} ou comme le cardinal du corps résiduel. En particulier on construit un foncteur de Dieudonné $\mathbb{D}_{\text{iso}} : \text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^\varphi \otimes_{\mathcal{O}_F} F \rightarrow MHP(\varphi)$ et on montre qu'il est pleinement fidèle et que son image essentielle est constituée des φ -modules de Hodge-Pink faiblement admissibles. Dans situation de [GL10] où \mathcal{O}_F est d'égales caractéristiques, ce théorème est exactement le théorème 7.3 de [GL10].

Enfin on énonce la généralisation du théorème 5.1, car ce n'en est pas une conséquence (mais la preuve est exactement la même). On note \mathcal{S} le complété z -adique de $\mathfrak{S}[\frac{u^{eq}}{z}, \frac{u^{eq^2}}{z^{q+1}}, \frac{u^{eq^3}}{z^{q^2+q+1}}, \dots]$. On fixe $m \in \{1, \dots, q-2\}$. Soit $\text{Mod}_{/\mathcal{S}, [0, m]}^\varphi$ la catégorie des $(D, \varphi_D, V_D, \mathcal{M})$ avec $(D, \varphi_D, V_D) \in MHP(\varphi)$ d'amplitude $\subset [0, m]$, et \mathcal{M} un \mathcal{S} -module libre muni d'un isomorphisme $\mathcal{M}[\frac{1}{z}] \simeq {}^\varphi D \otimes_{K_0} \mathcal{S}[\frac{1}{z}]$ et "fortement divisible" au sens où

$$\mathcal{S}.z^{-m} {}^\varphi((\varphi_D \otimes 1)(\mathcal{M} \cap E^m V_D)) = \mathcal{M}.$$

On note $\mathbb{D} : \text{Mod}_{/\mathfrak{S}, [0, m]}^\varphi \rightarrow \text{Mod}_{/\mathcal{S}, [0, m]}^\varphi$ le foncteur qui à $(\mathfrak{M}, \varphi_{\mathfrak{M}})$ associe $(D, \varphi_D, V_D, \mathcal{M})$ avec $(D, \varphi_D, V_D) = \mathbb{D}_{\text{iso}}(\mathfrak{M}[\frac{1}{p}], \varphi_{\mathfrak{M}} \otimes 1)$ et $\mathcal{M} = {}^\varphi\mathfrak{M} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathcal{S}$.

Théorème 6.1 *Le foncteur $\mathbb{D} : \text{Mod}_{/\mathfrak{S}, [0, m]}^\varphi \rightarrow \text{Mod}_{/\mathcal{S}, [0, m]}^\varphi$ est bien défini et est une équivalence de catégories. \square*

Références

- [Berg02] L. Berger. Représentations p -adiques et équations différentielles. *Inventiones Math.* 148 : 219–284, 2002.
- [Berg04a] L. Berger. Équations différentielles p -adiques et (φ, N) -modules filtrés. *Astérisque* 319 :13–38, 2008.
- [Berg04b] L. Berger. An introduction to the theory of p -adic representations. Geometric Aspects of Dwork Theory, 255–292, Walter de Gruyter, Berlin, 2004.
- [Bre97a] C. Breuil. Construction de représentations p -adiques semi-stables. *Ann. Scient. ENS.* 31 : 281–327, 1997.
- [Bre97b] C. Breuil. Représentations p -adiques semi-stables et transversalité de Griffiths”. *Math. Annalen* 307 : 191-224, 1997.
- [Bre98] C. Breuil, Schémas en groupes et corps des normes, disponible à <http://www.ihes.fr/~breuil/publications.html>, 1998
- [Bre99a] C. Breuil. Une application du corps des normes. *Compositio Math.* 117(2) :189–203, 1999.
- [Bre99b] C. Breuil. Représentations semi-stables et modules fortement divisibles. *Inventiones Math.* 136 : 89-122, 1999.
- [Bre02] C. Breuil. Integral p -adic Hodge theory. volume 36 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 51–80. 2002.
- [Car06] X. Caruso. Représentations semi-stables de torsion dans le cas $er < p - 1$. *J. Reine Ang. Math.* 594 : 35–92, 2006.
- [CL09] X. Caruso and T. Liu, Quasi-semi-stable representations. *Bull. Soc. Math. France.* 137 (2) : 185–223, 2009.
- [CF00] P. Colmez et M. Fontaine. Construction des représentations p -adiques semi-stables. *Invent. Math.*, 140 :1–43, 2000
- [Fal99] G. Faltings. Integral crystalline cohomology over very ramified valuation rings. *J. Amer. Math. Soc.*, 12(1) :117–144, 1999.
- [Fal02] G. Faltings. Group schemes with strict \mathcal{O} -action, *Mosc. Math. J.*, 2(2) :249–279, 2002.
- [Fon90] J.-M. Fontaine. Représentations p -adiques des corps locaux, I. The Grothendieck Festschrift, Vol. II :249–309, Prog. Math. 87, 1990.
- [Fon94b] J.-M. Fontaine, *Représentations p -adiques semi-stables*, with an appendix by Pierre Colmez, *Astérisque* **223**, Soc. math. France (1994), 113–184

- [GL10] A. Genestier et V. Lafforgue. Théorie de Fontaine en égales caractéristiques. A paraître aux Annales de l'ENS. Disponible à l'adresse <http://www.math.jussieu.fr/~vlafforg/fontaine.pdf>
- [Ked04] K. Kedlaya. A p -adic local monodromy theorem. *Ann of Math.* 160(1) : 93–184, 2004.
- [Ked05] K. Kedlaya. Slope filtrations revisited. *Doc. Math.* 10 :447–525, 2005
- [Kis05] M. Kisin. Crystalline representations and F -crystals. *Drinfeld's 50th birthday volume, Progr. Math.* 253 :459–496, 2006.
- [Kis08] M. Kisin. Potentially semi-stable deformation rings, *J. Amer. Math. Soc.* 21(2) :513–546 , 2008.
- [KR09] M. Kisin et W. Ren. Galois representations and Lubin-Tate groups. *Doc. Math.* 14 : 441–461, 2009.
- [Liu08] T. Liu. On lattices in semi-stable representations : a proof of a conjecture of Breuil. *Compos. Math.* 144(1) :61–88, 2008.
- [Pin97] R. Pink. Hodge structures over function fields. Preprint 1997, disponible à l'adresse <http://www.math.ethz.ch/~pink>
- [Pin00] R. Pink. Uniformisierung von t -motiven. Exposé, 12 juillet 2000.
- [RZ96] M. Rapoport and T. Zink. *Period spaces for p -divisible groups*, volume 141 of *Annals of Mathematics Studies*. 1996.
- [RZ99] M. Rapoport and T. Zink. A finiteness theorem in the Bruhat-Tits building : an application of Landvogt's embedding theorem. *Indag. Math.* 10(3) : 449–458, 1999.
- [Ser59] J.P. Serre Classes des corps cyclotomiques (d'après K. Iwasawa). Séminaire Bourbaki 1958/59, Vol. 5, Exp. No. 174, 83–93, SMF, 1995.
- [Ser68] J.P. Serre Corps locaux. Hermann, 1968.